This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

126.9

BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
Of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)

Rec'd 19 March, 1884.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ACHTUNDZWANZIGSTER BAND.

1876.

MIT 4 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

~~48.23~~
LSoc1726.9

MAR 19 1884

Harvard.

INHALT.

Seite

G. Wiedemann, Ueber die Gesetze des Durchganges der Electricität durch Gase. (Mit 1 Tafel.) 1

F. Zöllner, Ueber die physikalischen Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrodynamischen Erscheinungen. (Mit 2 Tafeln.) 59

F. Zöllner, Zur Widerlegung des elementaren Potentialgesetzes von Helmholtz durch elektrodynamische Versuche mit geschlossenen Strömen. (Mit 1 Tafel.) 227

F. Zöllner, Nachtrag zu der Abhandlung: Ueber die physikalischen Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrodynamischen Erscheinungen 240

Carl Neumann, Zwei Sätze über correspondirende Flächenelemente 253

Carl Neumann, Ueber das Ampère'sche Gesetz. 256

M. W. Drobisch, Einige elementare Bemerkungen über den Raum von drei Dimensionen. 268

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglieder.

Seine Excellenz der Minister des Königlichen Hauses, Freiherr *Johann Paul von Falkenstein.*

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.
- Professor *Friedrich Zarncke* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
- Geheimer Hofrath *Hermann Brockhaus* in Leipzig.
- —— —— *Georg Curtius* in Leipzig.
- Professor *Adolf Ebert* in Leipzig.
- —— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
- —— *Hermann Alfred von Gutschmid* in Jena.
- Domherr und Geheimer Rath *Gustav Hänel* in Leipzig.
- Professor *Gustav Hartenstein* in Jena.

Herr Professor und Universitäts-Oberbibliothekar *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- Professor *Ludwig Lange* in Leipzig.
- —— *August Leskien* in Leipzig.
- Oberschulrath *Carl Joachim Marquardt* in Gotha.
- Professor *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Professor *Anton Springer* in Leipzig.
- —— *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.

Se. Exc. Herr Geheimer Rath *Karl Georg von Wächter* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Conrad Bursian* in München.
- —— *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- Geheimer Justiz- und Oberappellationsgerichtsrath *Andreas Ludwig Jacob Michelsen* in Schleswig.
- Professor *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Hofrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.
- —— *Karl Bernhard Stark* in Heidelberg.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Wilhelm Scheibner* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Geheimer Hofrath *Carl Bruhns* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.

Herr Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- —— *Wilhelm His* in Leipzig.
- —— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Hermann Kolbe* in Leipzig.
- —— —— *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
- —— —— *Carl Friedrich Wilhelm Ludwig* in Leipzig.
- Professor *Carl Neumann* in Leipzig.
- Oberbergrath *Ferdinand Reich* in Freiberg.
- Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- Geheimer Medicinalrath *Ernst Heinrich Weber* in Leipzig.
- Hofrath *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
- Professor *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.
- —— *Johann Carl Friedrich Zöllner* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
- Hofrath *Otto Funke* in Freiburg.
- Geheimer Hofrath *Carl Gegenbauer* in Heidelberg.
- Professor *Wilhelm Hofmeister* in Tübingen.
- Staatsrath *Mathias Jacob Schleiden* in Wiesbaden.
- Professor *Samuel Friedrich Nathanael Stein* in Prag.
- Geheimer Medicinalrath *Alfred Wilhelm Volkmann* in Halle.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1876 eingegangenen Schriften.

Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Monatsberichte der K. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1875. Sept. — Dec. 1876. Jan. — Aug.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philosophisch-histor. Cl. Bd. 23. Wien 1874.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathematisch-naturwissensch. Cl. Bd. 34. Wien 1875.

Sitzungsberichte d. Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philosophisch-histor. Cl. Bd. 75. Heft 1—3. Jahrg. 1873. Oct. Nov. Dec. Wien 1873. — Bd. 76. Heft 1. 2. 3. Jahrg. 1874. Jänner. Febr. März. — Bd. 77. Jahrg. 1874. Heft 1—4. April. Mai. Juni. Juli. — Bd. 78. Jahrg. 1874. Heft 1—3. Jahrg. 1874. Oct. Nov. Dec. Wien 1874. — Bd. 79. Heft 1—3. Jahrg. 1875. Jänner. Febr. März. — Bd. 80. Heft 1—3. Jahrg. 1875. April. Mai. Juni. Wien 1875.

Register zu den Bdd. 1—70 der Sitzungsberichte der philol.-histor. Cl. der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Wien 1874.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturwiss. Cl. Abth. I. Bd. 70. 3—5. Heft. Bd. 71. 1—5. Heft. — Abth. II. Bd. 70. 3—5. Heft. Bd. 71. 1—5. Heft. — Abth. III. Bd. 70. 3—5. Heft. Bd. 71. 1. 2. Heft. Wien 1875.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwiss. Cl. Jahrg. 1875. Nr. 21. 22. 27. 28. Jahrg. 1876. Nr. 1—12. 15—28.

Monumenta Conciliorum generalium sec. decimi quinti. Ediderunt Caesareae Academiae scientiarum socii delegati. — Concilium Basileense. Scriptorum Tomus secundus. Vindobonae 1873. Fol. — Joannis de Segovia, Presbyteri Cardinalis Tit. Sancti Calixti, historia gestorum generalis Synodi Basiliensis. Ad fidem codd. mss. nunc primum edidit Ern. Birk. Vol. I. Lib. I—XII.

Tabulae codd. manu scriptorum praeter graecos et orientales in Bibliotheca Palatina Vindobonensi asservatorum. Ed. Academia Caesarea Vindobonensis. Vol. VII. Cod. 11501—14000. Vindobonae 1875.

Almanach d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. 1875. Jahrg. XXV. Wien 1875.

Fontes rerum austriacarum. Erste Abth. Scriptores. VIII. Bd. Die Königsaaler Geschichtsquellen mit den Zusätzen und der Fortsetzung des Domherrn Franz von Prag. Wien 1875.

Archiv für österreichische Geschichte. 51. Bd. 2. Hälfte. Wien 1873. Register zu den Bdd. 1—50 des Archives f. österr. Geschichte. Wien 1874. 52. Bd. 1. u. 2. Hälfte. 53. Bd. 1. u. 2. Hälfte. Wien 1874. 1875.

Das Gebirge um Hallstatt. Eine geologisch-paläontologische Studie aus den Alpen von Edm. Mojsisovics v. Mojsvár. I. Theil. Die Mollusken-Faunen der Zlambach- und Hallstätter Schichten. II. Heft mit 38 lithogr. Tafeln. Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. VI. Heft 2. Wien 1875.

Die Congerien- und Paludinenschichten Slavoniens und deren Faunen. Ein Beitrag zur Descendenz-Theorie von Dr. M. Neumayr und C. M. Paul. Mit 10 lithogr. Tafeln. Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. VII. Heft 3. Wien 1875.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1875. No. 11—18. Jahrg. 1876. No. 1—13. Wien.

Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1875. Bd. XXIV. No. 3. Juli, August, September. Mit Taf. VII—IX. Dazu: G. Tschermak, Mineralogische Mittheilungen. Bd. V. Heft 3. — Bd. XXV. No. 4. Oct., Nov., Dec. Mit Taf. X—XVII. Dazu: G. Tschermak, Mineralog. Mittheilungen, Bd. V, Heft 4. — Jahrg. 1876. Bd. XXVI. Nr. 1. Jänner, Febr., März. Mit Taf. I—IV. Dazu: G. Tschermak, Mineralog. Mittheilungen, Bd. VI, Heft 1 mit Tafel I—VII. Nr. 2. April. Mai. Juni. Mit Taf. V—XIV. Dazu: G. Tschermak, Mineralog. Mittheilungen, Bd. VI, Heft 2. Wien 1875. 1876. Nr. 3. Juli. Aug. Sept. Mit Taf. XV—XVII. Dazu: G. Tschermak, Mineralog. Mittheilungen, Bd. VI, Heft 3. Wien.

Mittheilungen der k. u. k. geograph. Gesellschaft in Wien 1874. 17. Bd. (Der neuen Folge 7.) 18. Bd. (Der neuen Folge 8.) Wien 1874. 1875.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1875. Bd. XXV. Mit 16 Tafeln. Wien 1876.

Festversammlung zur Feier des 25jährigen Bestehens der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Wien 1876.

Festschrift zur Feier des 25jährigen Bestehens der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Mit 20 Tafeln. Wien 1876.

Mittheilungen aus dem Jahrbuche der königl. ungarischen geologischen Anstalt Bd. I. Heft 1—3. Bd. II. Heft 1—3. Bd. III. Heft 1—3. Bd. IV. Heft 1. 2. Pest 1872—1876.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrg. 1875. Nr. 3—6. Prag 1876.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen auf der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1875. Sechsunddreissigster Jahrg. Prag 1876.

Lotos. Zeitschrift für Naturwissenschaften. Herausgeg. vom naturhistor. Vereine »Lotos« in Prag. 25. Jahrg. Prag 1875.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. XII. Jahrg. Nr. III—VI. XIII. Jahrg. Nr. I—VI. XIV. Jahrg. Nr. I. II. Prag 1874. 1875.

Zwölfter Jahresbericht des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Für das Vereinsjahr 1873—1874. — Dreizehnter Jahresbericht u. s. w. für das Vereinsjahr 1874—1875. Prag 1874. 1875.

Beiträge zur Geschichte von Arnau. Von Dr. C. Leeder. II. Aus den Mittheilungen des Vereins f. Gesch. d. Deutschen in Böhmen. Prag 1873.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. 23. Heft. 24. Heft. Graz 1875. 1876.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Herausgeg. vom histor. Vereine für Steiermark. 12. Jahrg. 13. Jahrg. Graz 1875. 1876.

Urkundenbuch des Herzogthums Steiermark, bearbeitet von J. Zahn. Herausgegeben vom histor. Vereine für Steiermark. I. Bd.: 798 —1192. Graz 1875.

Steiermärkisches Landrecht des Mittelalters, bearbeitet von Dr. Ferdinand Bischoff. Herausgegeben vom histor. Vereine für Steiermark. Graz 1875.

Dionysius Petavius. Ein Beitrag zur Gelehrtengeschichte des XVII. Jahrhunderts. Von Dr. Franz Stanonik, Prof. der Dogmatik. Festschrift der k. k. Universität Graz aus Anlass der Jahresfeier am XV. Nov. 1875. Graz 1876.

Berichte des naturwiss.-medizin. Vereines in Innsbruck. 6. Jahrg. 1875. 1. Heft.

Abhandlungen der philosoph.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. 13. Bd. 3. Abth. (In d. Reihe d. Denkschriften d. XLVI. Bd.) München 1875.

Abhandlungen der histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. 12. Bd. 3. Abth. (In d. Reihe d. Denkschriften d. XLIII. Bd.) München 1875. — 13. Bd. 1. Abth. In der Reihe der Denkschriften der XLVII. Bd. München 1875.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. 12. Bd. 1. Abth. (In d. Reihe d. Denkschriften d. XLIV. Bd.) München 1875.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München. 1874. Bd. II. Heft 2. — 1875. Bd. II. Heft 2. 3. 4. (Supplement-) Heft 3. — 1876. Bd. I. Heft 1. 2. 3. 4. München 1874. 1875. 1876.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1875. Heft 3. — 1876. Heft 1. 2. München 1875. 1876.

Ueber die Beziehungen der Chemie zur Rechtspflege. Festrede u. s. w. von Dr. L. A. Buchner. München 1875.

Siebzehnte Plenar-Versammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Secretariats. München d. 12. Oct. 1876.

Almanach der k. bayer. Akad. d. Wissensch. für das J. 1875.

Catalogus codd. latinorum Bibliothecae Regiae Monacensis. Secundum Andr. Schmelleri Indices composuerunt Car. Halm, Frid. Keinz, Gul. Meyer, Georg. Thomas. T. II. P. II. Cod. num. 11001 —15028 complectens. Monachi 1876.

Die hebräischen Handschriften der K. Hof- und Staatsbibliothek in München, beschrieben von M. Steinschneider. München 1875. Mit dem Haupttitel: Catalogus codd. manu scriptorum Bibliothecae Regiae Monacensis. Tomi primi pars prima, codd. hebraeos complectens. Monachii 1875.

Verzeichniss der orientalischen Handschriften der K. Hof- und Staatsbibliothek in München mit Ausschluss der hebräischen, arabischen und persischen. Nebst Anhang zum Verzeichniss der arabischen und persischen Handschriften. München 1875. Mit dem Haupttitel: Catalogus codd. manu scriptorum Bibliothecae Regiae Monacensis. Tomi primi pars quarta, codd. orientales praeter hebraeos et arabicos et persicos complectens. Monachii 1875.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Zwanzigster Bd. v. J. 1875. Mit einer Steindrucktafel. Göttingen 1875.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1875. Göttingen 1875.

Leopoldina, amtliches Organ der kais.-leopoldinisch-carolinisch-deutschen Akademie der Naturforscher. Heft XI. Nr. 15 u. 16. 23 u. 24. Heft XII. Nr. 1—24. Dresden 1875. 1876.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureau's. XXI. Jahrg. 1875. 1—4. Heft. Beilage zu Nr. 1—6 Jahrg. 1875 der Zeitschrift des k. sächs. statist. Bureau's. (Vertheilung der Bevölkerung des Königreichs Sachsen nach den Haupt-Erwerbs- und Berufs-Classen.) XXII. Jahrg. 1876. 1—4. Heft. Dresden 1875. 1876.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Oct. 1875 — Oct. 1876. Dresden 1876.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. X. Jahrg. 4. Heft. XI. Jahrg. 1—4. Heft. Leipzig 1875. 1876.

Monatliche Berichte über die Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen angestellt an den Königl. Sächs. Stationen im J. 1875. Von Dr. C. Bruhns. Dresden 1876.

Fünfter Bericht der naturwissenschaftlichen Gesellschaft in Chemnitz. Chemnitz 1875.

Neues Lausitzisches Magazin. 51. Bd. 52. Bd. 1. Heft. Görlitz 1874. 1876.

Zeitschrift f. d. gesammten Naturwissenschaften, redig. von C. G. Giebel. Neue Folge. Bd. XI. 1875. Juli — Dec. Berlin 1876.

Die Fortschritte der Physik im J. 1874, dargestellt von der physikal. Gesellsch. in Berlin. Jahrg. XXVII. 2. Abth. Berlin 1876.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Neunter Jahrg. (1876.) No. 1—18.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. von Ohrtmann, Müller u. Wangerow. V. Bd. Heft 1 u. 2. Berlin 1875. VI. Bd. Heft 1. Berlin 1876.

Schriften der Königl. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. XVI. 1875. Abth. 1 u. 2. Königsberg 1875. 1876.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. XIII. No. 2. 3. Halle 1875.

Bericht über die Sitzungen der naturforsch. Gesellsch. zu Halle im J. 1875.

Dreiundfünfzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1875. Breslau 1876.

Schriften der Universität zu Kiel aus d. J. 1875. Bd. XXII. Kiel 1876.

Verhandlungen des Vereins für naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg 1875. Hamburg 1876.

Jahresbericht des physikal. Vereins zu Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1874—1875. Frankfurt 1876.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. Heft LII—LVIII. Bonn 1872—1876.

Die mittelalterliche Kunst in Soest. Ein Beitrag zur Rheinisch-Westphälischen Kunstgeschichte. Mit IX Tafeln und mehrern eingedruckten Holzschnitten von Jos. Aldenkirchen. Festprogramm zu Winckelmann's Geburtstage am 9. Dec. 1875. Herausgeg. vom Vorstande des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. Bonn 1875.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Societät zu Erlangen. 7. Heft. Nov. 1874—Aug. 1875. Erlangen 1875.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellsch. in Würzburg. Neue Folge. Bd. IX. Heft 1—4. Bd. X. Heft 1 u. 2. Würzburg 1876.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. I. Bd. 3. Heft. 4. Heft. Heidelberg 1876.

15. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1876.

Korrespondenzblatt des Vereins für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben. Erster Jahrg. Nr. 1. 3. 4. 6. 7. 8. 9. 1876. Dazu ein Kunstblatt: Die Rückseite des Zeitblom'schen Altars v. J. 1497 in der K. W. Staatssammlung der Kunst-Alterthümer.

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Herausgeg. von der historischen Gesellschaft in Basel. X. Bd. Basel 1876.

Das Urner Spiel vom Wilhelm Tell. Nach der Originalausgabe neu herausgegeben von Wilhelm Vischer. Basel u. Genf 1874. (Ueberreicht durch die historische und antiquarische Gesellschaft zu Basel.)

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. 58. Jahresversammlung in Andermath. Jahresbericht 1874/5. Luzern 1876.

Neue Denkschriften der allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften. Bd. 27 oder 3. Decade. B. 7. Zürich 1876.

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 19. Jahrg. Heft 1—4. 20. Jahrg. Heft 1—4. Zürich 1874. 1875.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1875. No. 878—905. Bern 1876.

Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Neue Folge. Jahrg. 19. (1874/5.) Chur 1876.

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. Tome XXIV, partie 2. Genève 1875—1876.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afd. Letterkunde. 8. Deel. Afd. Natuurkunde. 15. Deel. Amsterdam 1875.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afd. Letterkunde. 2e Reeks. 4e Deel. Amsterdam 1874. — Afd Natuurkunde. 2e Reeks. 9e Deel. Amsterdam 1876.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam voor 1874. Amsterdam 1874.

Processen-Verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Afd. Natuurkunde. Mei 1874 — April 1875.

Musa. Elegia Petri Esseiva, Friburgensis Helvetii, cui certaminis poetici instituti ex legato Jac. Henr. Hoeufft praemium adjudicatum est in consessu publico Academiae Regiae disciplinarum Neerlandicae a. d. VII. Id. Mart. anni 1874. Amstelodami 1874.

Ad procum Satira Petri Esseiva, Friburgensis Helvetii, ornata praemio aureo e legato Jac. Henr. Hoeufft in certamine poetico a. d. VIII. Id. Mart. 1875. Accedit Elegia Franc. Tr. Moltedo. Amstelodami 1875.

Nederlandsch Kruidkundig Archief. Verslag en Mededeel. d. Nederl. Bot. Vereen. Tweede Serie. 2e Deel. 1. Stuk. Nijmegen 1875. 1876.

Zur Speciesfrage von H. Hoffmann, Prof. d. Botanik an d. Universität in Giessen. Natuurkundige Verhandelingen der Hollandsche Maatschappij d. Wetenschappen, 3de Verz. Deel II, No. 5. Haarlem 1875.

Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Uitgeg. door F. C. Donders en Th. W. Engelmann. Derde Reeks. III. Afl. II. IV. Afl. 1. Utrecht 1875. 1876.

Zeventiende jaarlijksch Verslag betrekkelijk de verpleging en het onderwijs in het Nederlandsch Gasthuis voor ooglieders, door F. C. Donders. Utrecht 1876.

Verslag van den staat der Sternwacht te Leiden en van de aldaar volbrachte werkzaamheden, in het tijdvak van d. 1. Juli 1873 tot de laatste dagen der maand Juni 1874, uitgebracht door H. G. van de Sande Bakhuyzen. Amsterdam 1874.

Annalen der Sternwarte in Leiden, herausgeg. von Dr. H. G. van de Sande Bakhuyzen. Vierter Bd. Haag 1875.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, over het jaar 1875. Leiden 1875.

Levensberichten der afgestorvene Medeleden van het Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde. Bijlage tot de Handelingen van 1875. Leiden 1875.

Verhandelingen rakende de natuurlijke en geopenbaarde Godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. Nieuwe Serie. Vierde Deel. Haarlem 1876. Welchen Werth hat die Statistik der sittlichen Thatsachen für die sittlichen Wissenschaften? Von Dr. W. Hollenberg. Von der Teyler'schen Gesellschaft gekrönte Preisschrift. Harlem 1876.

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. X. Livr. 4 et 5. T. XI. Livr. 1. 2. 3. La Haye 1875. 1876.

Société Hollandaise des sciences à Harlem. Notice historique. Liste des protecteurs, présidents, secrétaires, directeurs et membres résidants et étrangers et liste des publications de la Société depuis sa fondation en 1752. Liste des publications des Sociétés savantes et des Journaux scientifiques qui se trouvent dans la bibliothèque de la Société. 1 Janvier 1876. Harlem 1876. Dazu: Programme de la Société Hollandaise des sciences à Harlem. Année 1876.

Archives du Musée Teyler. Vol. I. Fasc. 1, 2e édit. revue et corrigée. Harlem 1875. — Vol. IV. Fasc. 1. Harlem 1876.

Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Handelingen en Mededeelingen 1876. Afl. 2. Verslagen en Praeadviezen van Directeuren voor de 99ste algemeene Vergadering te Deventer, 1876. Haarlem.

Nederlandsche Maatschappij &c. Handelingen der 99ste algemeene Vergadering en van het 20ste Nijverheids-Congres, gehouden te Deventer, 11, 12 en 13 Julij 1876. Haarlem 1876.

Tijdschrift uitgegeven door de Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. 1876. Derde Reeks. Deel XVII. (van de geheele Reeks Deel XXXIX.) Derde Stuk. Vijfde Stuk. Haarlem.

Société Néerlandaise pour le progrès de l'industrie. Adresse à S. M. le Roi.

Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome XLI. 1. et 2. Partie. Bruxelles 1875. 1876.

Annuaire de l'Acad. Roy. des sciences etc. de Belgique. 41. Année. 42. Année. Bruxelles 1875. 1876.

Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers publ. par l'Acad. Roy. des sciences etc. de Belgique. Tome XXXIX. 1. Partie. Bruxelles 1876.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. par l'Académie Roy. des. sciences etc. de Belgique. Collection in-8°. Tome XXIV—XXVI Bruxelles 1875.

Académie Roy. des sciences etc. de Belgique. Notices biographiques et bibliographiques. 1874. Bruxelles 1875.

Bulletins de l'Acad. Roy. des sciences etc. de Belgique. 43. Année. 2. Sér. T. XXXVIII. 44. Année. 2. Sér. T. XXXIX. 44. Année. 2. Sér. T. XL. Bruxelles 1874. 1875.

Annales de la Société entomologique de Belgique. Tome XVIII. Bruxelles 1875.

Société entomologique de Belgique. Série II. No. 28. No. 30. No. 32.

Compte-rendu de la Société entomologique de Belgique. 1876. Sér. II. No. 15—17. 21—29. 31.

Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles et mathématiques. Tome XV. Luxembourg 1875.

Elenco de' Partecipanti dell' Instituto archeologico germanico alla fine dell' anno 1875. — Bullettino &c. No. I—XII. Gennajo—Dicembre 1876. Roma.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Fine del Vol. XVIII, p. 343—594. Venezia 1875. — Vol. XIX. Venezia 1876.

Atti del R. Istituto Veneto &c. dal Nov. 1874 all' Ott. 1875. Tomo I, Serie V, Disp. VII—X. Venezia 1874—75. Tomo II, Serie V, Disp. I—III. Venezia 1875—76.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Cl. di lettere e scienze morali e politiche. Vol. XII. III della Serie III. Fasc. IV e ultimo. Vol. XIII. IV della Serie III. Fasc. I. II. Milano 1873—1875. — Cl. di scienze matematiche e naturali. Vol. XIII. IV della Serie III. Fasc. II. Milano 1875.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Serie II. Vol. VII. Fasc. XVII—XX e ultimo. — Vol. VIII. Fasc. I—XX e ultimo. Milano 1874. 1875.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. X. Disp. 1—8. Vol. XI. Disp. 1—6. Torino 1875—76.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie seconda. Tomo XXVIII. Torino 1876.

Bollettino meteorologico ed astronomico del Reg. Osservatorio della Reg. Università di Torino. Anno VIII (1873). Anno IX (1874). Anno X (1875). Torino 1875. 1876.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. I. Fasc. 1—3. Vol. II. Fasc. 1. Pisa 1875. 1876.

Report of the Commissioners of Patents for Inventions, pursuant to the Act 15 & 16 Vict. Cap. 83. 1858—1873. 16 Hefte.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. Vol. 164. (1874.) P. I. II. London 1874.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXII. No. 151—155. Vol. XXIII. No. 156—163. London 1874. 1875.

J. W. L. Glaisher, On a class of identical relations in the theory of elliptic functions. (From the Philos. Transactions of the R. Soc. of London, Vol. 165, P. 2.)

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. 42. 1873—75. London 1875.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. VII. P. V. VI. London 1875.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 27. Part. 3. For the Session 1874—75.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Session 1874—75. Vol. VIII. No. 90—92.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. XXIV. Antiquities. P. IX. Dublin 1874.

The Journal of the R. Dublin Society. No. XLIV. Vol. VII. Dublin 1875.

Journal of the R. Geological Society of Ireland. New Series. Vol. IV. Part 2. (1874—75.) London, Dublin, Edinburgh 1875.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des sciences. Tome 21. Paris et Lyon 1875—76. Classe des lettres. Tome 15. Paris et Lyon 1870—74. Tome 16. 1874—75.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. Nouvelle Série. Année 1875. Tome XXII. Lyon, Paris 1876.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 2. Sér. T. I. 2. et 3. Cahier. Paris et Bordeaux. Année 1876.

Extrait des Procès-verbaux des séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Année 1874—75.

Extraits des Procès-verbaux des séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 1875—76. Bordeaux.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoire de la section des lettres. Tome IV. 1. Fasc. Année 1864. Montpellier 1864. — Tome V. 4. Fasc. Année 1872. Montpellier 1873. — Tome VI. 1. Fasc. Année 1875. Montpellier 1876. — Mémoires de la section des sciences, Tome VIII. 4. Fasc. Année 1875. Montpellier 1876.

Mémoires de la Société Nationale des sciences naturelles de Cherbourg. T. XIX. (2. Sér. T. IX.) Paris et Cherbourg 1875.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1875—76. Paris 1876.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. 5. Række. Naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10. Bd. VII. VIII. IX. 11. Bd. I. II. 12. Bd. I. II. Kjøbenhavn 1875.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1874. No. 3. Aaret 1875. No. 1. Kjøbenhavn.

Øiets Nethinde, en histologisk, historisk-kritisk og physiologisk Undersøgelse af Ad. Hannover. Med 6 Kobbertavler. Vidensk. Selsk. Skr., 5te Række, naturvidensk. og mathemat. Afd. 11te Bd. II. Kjøbenhavn 1875.

Velhas-Flodens Fiske. Et Bidrag til Brasiliens Ichthyologi. Efter Prof. Reinhardts Indsamlinger og Optegnelser. Ved Chr. Fr. Lütken. Vidensk. Selsk. Skr., 5te Række, nat. og math. Afd. 12te Bd. II. Kjøbenhavn 1875.

Postola Sögur. Legendariske Fortællinger om Apostlernes Liv, deres Kamp for Kristendommens Udbredelse samt deres Mærtyrdød. Efter gamle haandskrifter udgivne af C. R. Unger. Udgiven som Universitetsprogram for andet Semester 1873. Christiania 1874.

Die aegyptischen Denkmäler in St. Petersburg, Helsingfors, Upsala und Copenhagen. Von J. Lieblein. Mit 35 autographirten Tafeln. Universitäts-Programm für d. 1ste Semester 1874. Christiania 1873.

Grundtrækkene i den ældeste norske Proces af Ebbe Hertzberg. Udgivet ved Dr. Fr. Brandt. Universitetsprogram for første Halvaar 1874. Kristiania 1874.

Ungedruckte, unbeachtete und wenig beachtete Quellen zur Geschichte des Taufsymbols und der Glaubensregel, herausgeg. und in Abhandlungen erläutert von Dr. C. P. Caspari. III. Universitätsprogramm. Christiania 1875.

Norske Rigs-Registranter, tildeels i uddrag. Femte Binds andet Hefte. 1623—1627. Sjette Binds første Hefte, 1628—1631. Udgivet ved O. Gr. Lundh og J. E. Sars. Christiania 1874.

Beretning om Bodsfængslets Virksomhed i Aaret 1869. 1870. 1871. 1872. 1873. 1874. Christiania 1870—1875.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd, Bd. 11. Stockholm 1873—75. — Bd. 11. No. 7. Études sur les Echinoïdes par Lovén. Atlas de 53 planches. Stockholm 1875.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Årgången 32. Stockholm 1875—76.

Meteorologiska Iakttagelser i Sverige, utgifna af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 15. (2. Ser. Bd. 1.) Stockholm 1876.

Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 3. H. 1. Stockholm 1875.

Minnesteckning öfver Jacob August von Hartmansdorff. Föredragen på Kongl. Vetenskaps-Akademiens Högtidsdag d. 5 April 1872. Af Henning Hamilton. Stockholm 1872.

Minnesteckning öfver Hans Järta. Föredragen på Kongl. Vetenskaps-Akademiens Högtidsdag d. 31 Mars 1874. Af Louis de Geer. Stockholm 1874.

Sveriges geologiska Undersökning. Beskrifning till Kartbladet Årsta (Nr. 50), Nynäs (Nr. 51), Trosa (Nr. 52), Björksund (Nr. 53), Riseberga (Nr. 54), Latorp (Nr. 55) och Nora (Nr. 56). — Om Sveriges lagrade Urberg jemförda med Sydvestra Europas. — Om Rullstensbildningar. — Om Mellersta Sveriges Glaciala Bildningar. — Om Malmlagrens Åldersföljd och deras användande Såsom Ledlager. Stockholm 1874—75.

Kongl. Svenska Fregattens Eugenies Resa omkring Jorden. Heft 13 (schwedisch). Heft 14 (franz. Text). Stockholm 1858—1874.

Lefnadsteckningar öfver Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens efter år 1854 aflidna Ledamöter. Bd. 1. Häfta 3. Stockholm 1869—1873.

Astronomiska Iakttagelser och Undersökningar anstalda på Stockholms Observatorium, utgifna af H. Gyldén. Första Bandet. Häftet 1. Stockholm 1876.

Nova Acta Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. X. Fasc. 1. Upsaliae 1876.

Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal. Vol. VII. Année 1875. Rédigé par Dr. H. Hildebrand Hildebrandson. Upsal 1875—76.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. Tom. X. Helsingforsiae 1875.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XVII. 1874—1875. Helsingfors 1875.

Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk, utgifna af Finska Vetenskaps-Societeten. 24. Häftet. Helsingfors 1875.

Observations météorologiques publiées par la Société des sciences de Finlande. Année 1873. Helsingfors 1875.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VIIe Série. T. XXII, No. 4—10. T. XXIII, No. 1. St.-Pétersbourg 1875—1876.

Bulletin de l'Acad. Impér. des sciences de St.-Pétersbourg. T. XIX, No. 4. 5. T. XX, No. 1. 3. 4. T. XXI, No. 1—5. T. XXII, No. 1. 2. St.-Pétersbourg 1874—1876.

Tableau général méthodique et alphabétique des matières contenues dans les publications de l'Académie Impér. des sciences de St.-Pétersbourg. I. Partie. Publications en langues étrangères. St.-Pétersbourg 1872.

Trudy Imper. S.-Petersburgskago Botaniéeskago Sada. Tom III. Wypusk I. II. S.-Peterburg 1874. 1875.

Istoriéeskoje rozyskanie o russkich powremennich izdaniach i sbornikach za 1703—1802 gg. Sanktpeterburg 1875.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausgeg. von H. Wild. Jahrg. 1874. St. Petersburg 1876.

Repertorium für Meteorologie, herausgeg. von der Kaiserl. Aademie der Wissensch., redigirt von H. Wild. Bd. IV. Heft 2. Bd. V. Heft 1. St. Petersburg 1875—1876.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1874. No. 3. Année 1875. No. 2. 3. 4. Moscou 1875.

Annales de l'Observatoire de Moscou. Vol. II. Livr. 2. Moscou 1876.

Izwjestia i Uéenyja Zapiski Imper. Kazanskago Universiteta. God XLI. 1874. No. 3—6 (Juli—Dec.) God XLII. 1875. No. 1—6. (Jan.—Dec.) Kazan 1874. 1875.

Φιλολογικὸς σύλλογος »Παρνασσός«. Περὶ τοῦ παρελθόντος καὶ τοῦ μέλλοντος τῆς ἐλευθερίας. Ὁμιλία Νικολάου Ι. Σαριπόλου αὐτοσχεδίως γενομένη τὴν ἑσπέραν τῆς 17 Δεκεμβρίου 1871. Ἐν Ἀθήναις 1872. — Περὶ πολιτευμάτων καὶ πολιτῶν. Διατρίβη ἀναγνωσθεῖσα ἐν τῇ συνεδριάσει τῆς 24 Μαΐου 1872 ὑπὸ Ἰωάννου Σούτσου. Ἀθήνησιν 1872. — Ἔκθεσις τῆς ἐφορίας τῆς σχολῆς τῶν ἀπόρων παίδων. Ἀθήνησιν 1873. — Ἔκθεσις περὶ τῆς σχολῆς τῶν ἀπόρων παίδων. Σεπτ. 1873—Ὀκτ. 1874. Ἐν Ἀθήναις 1874. — Ἡ ΚΕ Μαρτίου 1874. Ἐν Ἀθήναις 1874. — Λογοδοσία τῶν κατὰ τὸ θ' ἔτος γενομένων ἀναγνωσθεῖσα τῇ 13 Ὀκτωβρίου 1874 ὑπὸ Μιχάλα Π. Λαμπροῦ. Ἐν Ἀθήναις 1875.

Νεοελληνικὰ Ἀνάλεκτα περιοδικῶς ἐκδιδόμενα ὑπὸ τοῦ φιλολογικοῦ συλλόγου Παρνασσοῦ ἐπιστασίᾳ ἐπταμέλους ἐπιτροπῆς. Τόμος Α'. Μέρος Α'. Φυλλάδιον Γ'. Δ'. Ε'. ς'. Ζ'. Ἐν Ἀθήναις 1871. 1872. — Τόμος Α'. Μέρος Β'. Φυλλάδιον Α'. Ἐν Ἀθήναις 1874. — Τόμος Β'. Φυλλάδιον Α' καὶ Β'. Ἐν Ἀθήναις 1874.

Κανονισμὸς τοῦ ἐν Ἀθήναις φιλολογικοῦ συλλόγου ὁ Παρνασσός. Ἐν Ἀθήναις 1871.

Transactions of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XV. New Series. Part II. Philadelphia 1875.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XIV (sic). No. 95. Jun.—Dec. 1875. Vol. XVI (sic). Jan. — Jun. 1876. No. 97.

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. P. I. II. III. Jan. — Dec. 1875. Philadelphia 1875—76.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. Vol. II. P. IV. No. 2. 3. 4. Boston 1875. 1876.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XVII. Part III. IV. Vol. XVIII. Part I. II. Boston 1875. 1876.

Occasional papers of the Boston Society of Natural History. II. Boston 1875.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. New Series. Vol. II. Whole Series Vol. X. Vol. III. Whole Series Vol. XI. Boston 1875. 1876.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. II. Nr. 9. Cambridge 1876.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College. Vol. III. No. 11—16. Cambridge, Mass. 1876.

Illustrated Catalogue of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College. Nr. VIII. 2. Cambridge 1875.

Annual Report of the Trustees of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College in Cambridge for 1874. Boston 1875. — For 1875. Boston 1876.

The Transactions of the Academy of Science of St. Louis. Vol. III. No. 3. St. Louis 1876.

Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. III. No. 1. 2. Buffalo 1875—76.

Memoirs of the Peabody Academy of Sciences. Vol. I. No. IV. Salem, Mass. 1875.

Annual Report of the Trustees of the Peabody Academy of Sciences for the year 1873. (Sixth Report.) Salem 1874.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. III. Part I. New-Haven 1876.

Astronomical and meteorological observations made at the U. S. Naval Observatory during the year 1873. Washington 1875.

Report of the United States geological and geographical survey of the Territories. Vol. II. Vol. IX. Vol. X. Washington 1875. 1876.

Bulletin of the United States geological and geographical survey of the Territories. Second Ser. Bull. Nr. 5. Nr. 6. — Vol. II. Nr. 1. 2. 3. Washington 1876.

Report of the Superintendent of the U. S. coast survey, showing the progress of the survey during the year 1869, 1870, 1871, 1872, 1873. Washington 1872—75. (5 Stück.)

United States geological survey of the Territories. Miscellaneous publications Nr. 1. Nr. 5.

Annual Report of the United States geological and geographical survey of the territories etc., Report of progress of the exploration for the year 1874. Washington 1876.

Geographical explorations and surveys West of the 100th meridian. Topographical Atlas. Wheeler. 1874.

Annual Report upon the geographical explorations and surveys West of the one hundredth meridian, in California, Nevada, Nebraska, Utah, Arizona, Colorado, New Mexico, Wyoming, and Montana, by Ge. M. Wheeler, first Lieutenant of Engineers, U. S. A.; being Appendix LL of the Annual Report of the Chief of Engineers for 1875. Washington 1875.

Report of explorations in 1873 of the Colorado of the West and its Tributaries, by Prof. J. W. Powell, under the direction of the Smithsonian Institution. Washington 1874. (2 Expl.)

Catalogue of the publications of the United States geological survey of the Territories. By F. v. Hayden. Washington 1874.

The complete works of Count Rumford. Publ. by the American Academy of arts and sciences. Vol. IV. Boston 1875.

The American Naturalist, a popular illustrated magazine of Natural History. Vol. VIII. Nr. 2—12. 1874. — Vol. IX. No. 1—12. 1875. Salem (Mass.).

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1874. Washington 1875.

Drilling in stone without metal. By Charles Rau. From the Report of the Smithsonian Institution for 1868. Washington (s. a.) (2 Expl.).

Thoughts on the nature and origin of force. By William B. Taylor. From the Report of the Smithsonian Institution for the year 1870. Washington 1872.

The scientific education of Mechanics and Artizans. By Prof. Andrew P. Peabody, of Harvard College. Reprinted from the Report of the Smithsonian Institution for 1872. Washington 1873. (2 Expl.)

Transactions and Proceedings of the Royal Society of Victoria. Vol. XI. Melbourne 1874.

Boletin de la Sociedad de Geografía y Estadística de la República Mexicana. Tercera Época, Tomo III, correspondiente al año de 1876. Números 1 y 2. Impresos por cuenta de la Sociedad. (2 Expl.)

Calendario Azteca, ensayo arqueológico por Alfr. Chavero, Secretario perpetuo de la Sociedad de la Geografía y Estadística de Mexico. Segunda edicion. Mexico 1876. (2 Expl.)

Archivos do Museu nacional de Rio de Janeiro. Vol. I. 1. Trimestre 1876. Rio de Janeiro 1876.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel XXXVII. XXXVIII. Batavia 1875.

Notulen van de algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van K. en W. Deel XIII. No. 3. 4. Deel XIV. No. 1. Batavia 1876.

Die Triangulation von Java ausgeführt vom Personal des geographischen Dienstes in Niederländisch Ost-Indien. Erste Abth. Vergleichung der Maassstäbe des Repsold'schen Basis-Mess-Apparates mit dem Normalmeter von Dr. J. A. C. Oudemans. Batavia 1875.

Kawi Oorkonden in Facsimile, onder toezicht van A. B. Cohen Stuart op steen gebracht door M. L. Huart te Batavia en T. Hooiberg te Leiden. — Inleiding en Transscriptie van A. B. Cohen Stuart. Voor rekening van het Bataviaasch Genootschap van K. en W. Leiden 1875.

Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXI. Afl. 3—6. Deel XXII. Afl. 1—6. Deel XXIII. Afl. 1—4. Batavia 1874—1876.

Einzelne Schriften.

Theory of the moon's motion. By John N. Stockwell. Philadelphia 1875.

Caspar Bruschius. Ein Beitrag zur Geschichte des Humanismus und der Reformation von Adalbert Horawitz. Prag u. Wien 1874.

De spectatoriale Geschriften van 1741—1800. Bijdrage tot de kennis van het huiselijk, maatschappelijk en kerkelijk leven onder ons volk, in de tweede helft der 18de eeuw, door J. Hartog. Utrecht 1872.

Das Dasein Gottes u. das Glück der Menschen, materialistisch-erfahrungsphilosophische Studien u. s.w. von Prof. König. Berlin 1874.

La vie et les œuvres de P. Chr. Asbjørnsen. Esquisse bibliographique et littéraire. Christiania 1873.

Thai-Kih-Thu, des Tscheu-Tsï Tafel des Urprinzipes, mit Tschu-Hi's Commentare nach dem Hoh-Pi-Sing-Li chinesisch mit mandschuischer und deutscher Uebersetzung, Einleitung und Anmerkungen. Inaugural-Dissertation von Georg von der Gabelentz. Dresden 1876.

Einleitung in das Studium der arab. Grammatiker. Die Ajrūmiyyah des Mu'hammad bin Daūd. Arab. Text mit Uebersetzung u. Erläuterungen von Ernst Trumpp. München 1876.

Das geograph. Wörterbuch des 'Abu 'Obeid 'Abdallah ben 'Abd el-'Aziz el Bekrí nach den Hdschrr. von Leiden, Cambridge, London und Mailand herausgeg. von F. Wüstenfeld. Erster Bd. Erste Hälfte. Zweite Hälfte. Zweiter Bd. Erste Hälfte. Göttingen 1876. (Autographirt.)

Die Wissenschaftslehre oder Philosophie. Von R. Grassmann. 4 Theile. Die Denklehre. Die Wissenslehre. Die Erkenntnisslehre. Die Weisheitslehre. Stettin 1875. 1876.

Ein Fund vorgeschichtlicher Steingeräthe bei Basel. Von Albert Müller. Basel 1875.

Phanerogamenflora von Chemnitz und Umgegend. Von F. Kramer. Chemnitz 1875.

Die arsenhaltigen Eisensäuerlinge von Val Sinistra bei Sins (Unter-Engadin). Von Dr. A. Husemann. Chur 1876.

Mikroskopische Studien über klastische Gesteine. Inauguraldissertation von F. Arno Anger. (Aus G. Tschermak's Mineralog. Mittheilungen.)

A. E. Törnebohm, Geognostisk Beskrifning öfver Persbergets Grufvefält. Stockholm 1875.

Er. Orsoni, Ricerche elettro-dinamiche &c. Noto 1876.

E. Klein, The anatomy of the lymphatic system. II. London 1875.

Geo. F. Kittredge, The present condition of the earth's interior. Buffalo 1876.

Henshaw, Annotated list of birds of Utah. (From Annals New-York Lyceum Nat. Hist. Vol. XI.) Salem 1874.

Abhandlungen von F. W. Bessel, herausgeg. von Rud. Engelmann. 3 Bde. Leipzig 1875—76.

Publications of the Cincinnati Observatory. Catalogue of new double stars. Cincinnati 1876.

Checklist of the ferns of North America. Nord of Mexico. Published for John Robinson. Salem (Mass.) 1873.

SITZUNG AM 12. FEBRUAR 1876.

G. Wiedemann, *Ueber die Gesetze des Durchganges der Electricität durch Gase.*

In den Berichten der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Oct. 1871 habe ich in Gemeinschaft mit Herrn Dr. *R. Rühlmann* eine Abhandlung über den Durchgang der Electricität durch Gase veröffentlicht.

Um einen genaueren Einblick in diese Erscheinungen zu gewinnen, erschien es zweckmässig, die Bedingungen der Versuche möglichst einfach herzustellen. Es wurde desshalb zunächst als Electricitätsquelle eine *Holtz*'sche Electrisirmaschine angewendet, welche die Electricitäten in gleichmässigem, langsamem Strome zu den Electroden führte, und zwar in gleichen Zeiten in Quantitäten, die von der Stromesbahn selbst wesentlich unabhängig waren. Zugleich waren hiebei die Electricitätsmengen, welche während der Dauer einer Entladung den Electroden durch die Maschine neu zugeführt wurden, verschwindend klein gegen die durch jene Entladung zwischen den Electroden übergeführte Electricitätsmenge.

Erst nach der Erledigung dieser einfachsten Vorgänge sollten die Entladungserscheinungen unter Anwendung der Leydener Batterie, des Inductoriums und der galvanischen Säule als Electricitätsquellen, bei denen jene Unabhängigkeit nicht allgemein stattfindet und ausserdem noch complicirende Umstände obwalten, näher betrachtet werden.

Ich erlaube mir, im Folgenden eine Fortsetzung der oben erwähnten Arbeit mitzutheilen, welche ebenfalls noch hauptsächlich die Erscheinungen behandeln soll, die sich bei schwäche-

ren Drucken ergeben, bei denen die Entladungen wesentlich durch das den Entladungsapparat erfüllende Gas vermittelt werden.

Durch die früheren Untersuchungen hatte sich gezeigt, dass unter diesen Bedingungen bei Verbindung der einen der beiden gleich grossen Electroden des Entladungsapparates mit der positiven Electrode der Electrisirmaschine und Ableitung der nicht verbundenen Electroden zur Erde in der Zeiteinheit weniger Entladungen erfolgen, als bei umgekehrter Verbindung. Aus diesen und analogen Versuchen mit verschieden grossen Electroden war der Satz abgeleitet worden, dass zur Einleitung einer Entladung an der positiven Electrode ein grösseres Potential der gesammten Electricitäten auf die auf der Oberflächeneinheit der Electrode angehäufte Electricität erforderlich ist, als an der negativen. Hieraus folgte unmittelbar, dass die electrisirten Gastheilchen sich von der positiven Electrode mit grösserer Anfangsgeschwindigkeit entfernen, also auch weiter ausbreiten, als von der negativen, und die Annahme, dass die positive Electricität leichter aus den electrisirten Körpern ausströme, als die negative, nicht richtig ist.

Man könnte es vielleicht für möglich halten, dass diese Erscheinungen durch secundäre Umstände bedingt wären, infolge deren sich nach früheren Ansichten die eine (positive) Electricität leichter in die (feuchte) Luft zerstreute. Es wäre etwa anzunehmen, dass dadurch bei Verbindung der einen (positiven) Electrode der Electrisirmaschine mit der einen Electrode des Entladungsapparates und Ableitung der anderen Electroden beider Apparate dem Entladungsapparat selbst in gleicher Zeit eine geringere Electricitätsmenge zuflösse, als bei umgekehrter Verbindung und dieselbe somit auch in einer geringeren Zahl von Entladungen durch den Apparat zur Erde überginge.

Dieser Einwand lässt sich indess durch directe Messung der in jedem Fall durch den Entladungsapparat hindurchgegangenen Electricitätsmengen widerlegen, wie die folgenden Versuche zeigen.

Hiezu wurde mit geringen Abänderungen derselbe Apparat, wie zu den früheren Versuchen, verwendet. Wie in der ersten Abhandlung erwähnt ist, wurden dabei die einzelnen, parallel der Richtung der Rotationsaxe der Electrisirmaschine zwischen den Electroden erfolgenden Entladungen in einem auf die Axe aufgesetzten und mit ihr rotirenden Spiegel mittelst einer helio-

meterartigen Vorrichtung (einem Fernrohr mit vertical zerschnittener Objectivlinse) beobachtet. Durch Verschiebung der einen Hälfte der Objectivlinse wurde die eine Hälfte des Entladungsbildes um den Abstand zweier auf einander folgender Bilder verschoben, und somit der Abstand der Entladungen gemessen. Bei dem nunmehr benutzten Apparat war die durchschnittene Linse des heliometrischen Apparates grösser, als früher (ihr Durchmesser betrug 10 Ctm., ihre Brennweite 30 Ctm., bei den späteren Versuchen mit den Entladungsröhren 21 Ctm.). Sodann wurde die Scheibe der Electrisirmaschine mittelst eines *Schmid*'schen Hydromotors in Bewegung gesetzt, der mit der Wasserleitung des Laboratoriums in Verbindung stand und sich durch seinen stundenlang sehr regelmässig andauernden Gang auszeichnete. Eine Umdrehung des Triebrades des Hydromotors entsprach 7 Umdrehungen der Scheibe der Electrisirmaschine. Die Electroden der Electrisirmaschine wurden durch zwei mit Guttapercha überzogene Kupferdrähte A und B, Fig. 1, von gleicher Länge mit einem einfachen Gyrotrop verbunden, der aus einer Paraffinplatte bestand, in welche vier Löcher a, b, c, d, eingebohrt waren, die halb mit Quecksilber gefüllt waren. Die Drähte A und B tauchten in die Löcher a und b. Das Quecksilber im Loche c war mittelst eines Kupferdrahtes mit den Wasserleitungsröhren des Hauses, Loch d mit der einen Electrode des Entladungsapparates verbunden. Zwei an einen Schellackstab gekittete amalgamirte Messingbügel konnten je nach ihrer Lage die Löcher a mit d und c mit b, oder auch a mit c und b mit d verbinden. Somit gelangte entweder die positive oder die negative Electricität der Electrisirmaschine zum Entladungsapparat, während die andere durch c zur Erde fortgeführt wurde. Die andere Electrode des Entladungsapparates war mit dem Loche d' eines ganz gleichen Gyrotropes verbunden. In die Löcher a' und b' desselben tauchten die Enden der mit Guttapercha überzogenen Leitungsdrähte des Galvanometers; c' war zur Erde abgeleitet. Je nach der Lage des Bügels dieses Gyrotropes konnte mithin die durch den Entladungsapparat hindurchgegangene Electricitätsmenge in der einen oder anderen Richtung durch das Galvanometer zur Erde geführt werden. Das Galvanometer war in der von mir angegebenen Art construirt; die Spiralen bestanden aus je 47 Windungen von 1,5 Mm. dickem Kupferdraht, der mit einer 2 Mm. dicken Schicht von Guttapercha bedeckt war. Die Zuleitungs-

drähte zu demselben waren frei in der Luft nebeneinander fortgeführt und mittelst *Paalzow*'schen Klemmen mit den Spiralen verbunden. Der Magnetspiegel des Galvanometers war durch einen in der magnetischen Nordsüdebene vorgelegten Magnetstab [1]) hinlänglich astasirt. Das Galvanometer war so eingestellt, dass beim Durchleiten eines constanten Thermostromes in der einen oder anderen Richtung (mittelst des zweiten Gyrotropes), die positiven und negativen Ablenkungen des Magnetspiegels einander gleich waren. — Um zu untersuchen, ob innerhalb der Grenzen der Versuche die Isolation der Spiralwindungen genügte, jeden Uebergang von freier Electricität zwischen ihnen zu verhindern, und ob auch bei grösseren electrischen Spannungen keine Electricitätsverluste eintraten, wurden erst die mit den Electroden des Entladungsapparates verbundenen Quecksilbernäpfe d und d' der beiden Gyrotropen direct durch einen Draht miteinander in Verbindung gebracht, und somit der Entladungsapparat selbst aus dem Kreise ausgeschaltet. Bei einer bestimmten Drehungsgeschwindigkeit der Scheibe der Holtz'schen Maschine wurde die Ablenkung des Galvanometerspiegels bestimmt. Dann wurde durch Entfernung des Verbindungsdrahtes der Entladungsapparat in den Schliessungskreis eingeführt und die Stromintensität bei verschiedenen Drucken der in demselben befindlichen Luft (von 0,7 bis 70 Mm. Quecksilber) gemessen. Obgleich die Zahl der Entladungen in der Zeiteinheit hiebei im Verhältniss von 6 : 1 abnahm, also die bei jeder einzelnen Entladung durch das Galvanometer hindurchgehende Electricitätsmenge in demselben Verhältniss zunahm, blieb doch die Ablenkung des Galvanometerspiegels so gut wie constant. Sie schwankte nur etwa um 1 %, und zwar unabhängig von der Zunahme jener Electricitätsmenge. Auch waren beim Umlegen des Bügels des Gyrotrops II. die positiven und die negativen Ausschläge die gleichen.

Die entsprechenden Resultate ergaben sich, als der Entladungsapparat durch eine *Geissler*'sche Spectralröhre ersetzt wurde, in die durch einen Hahn Luft oder Wasserstoff von verschiedener Dichtigkeit eingeführt war.

Demnach entsprach die Einrichtung des Apparates in dieser Beziehung den Anforderungen zur Genüge.

Nunmehr wurde bei verschiedenen Drucken des in dem Entladungsapparat enthaltenen Gases die eine oder andere Elec-

1) Vgl. *E. du Bois-Reymond*. Monatsber. der Berl. Acad. 1874. S. 748. Galvanism. II. 2 S. 747.

tricität demselben zugeführt, und sowohl der Abstand y der Entladungen, also auch die Ablenkung $\pm J$ des Galvanometerspiegels bei abwechselnder Verbindung des Galvanometers mit dem Entladungsapparat in dem einen oder anderen Sinne bestimmt. Dabei wurde die Zahl z der Umdrehungen des Triebrades des Hydromotors constant auf 50 in je 30 Secunden erhalten, und wenn etwa ganz geringe Abweichungen in der Intensität J eintraten, die erhaltenen Werthe auf die Intensität $J = \pm 50$ reducirt. So wurde u. A. gefunden, je nachdem die positive oder negative Electrode zum Boden abgeleitet und die andere Electrode mit der Maschine verbunden war:

Reihe I.

Druck	y (+ abgel.)	y (— abgel.)	Druck	y (+ abgel.)	y (— abg.)
13,5 Mm.Hg.	6	8,9	33	8,5	13,5
24,5	7	12	56,2	10,5	16,5

Aehnliche Werthe lieferten andere Beobachtungen bei verschiedenen Drucken und Abständen der Electroden.

Ganz analoge Resultate ergeben sich beim Durchgang der Entladungen durch Entladungsröhren von Glas. So war z. B.

Druck	z	J	y (+ abg.)	z	J	y (— abg.)
2,2	44	71	—	44	71	7
5,4			9,4			12,2
11,2			13			16,6
14,5			13,5			20
18			13,5			21,5
25			15,2			26,2
29,3			—			31,2
31,9			21			33
35,7			23,5			35
45,5			32,3			38,2
49,2			33,5			43
60,7			40			54

Aehnliche Bestimmungen werden wir weiter unten anführen.

Es ist also unzweifelhaft, dass die Verschiedenheit der Entladungserscheinungen bei Ableitung der positiven oder negativen Electrode und die zur Einleitung einer Entladung an der positiven Electrode erforderliche grössere Ladung nicht etwa durch secundäre Electricitätsverluste bedingt ist, sondern sich auch zeigt, wenn in beiden Fällen ganz gleiche Electricitätsmengen in gleichen Zeiten zwischen den Electroden übergehen.[1])

1) Vgl. dagegen *Riess*. Monatsber. der Berl. Academie 1875. 11. Febr. S. 148.

Ganz ähnliche Erscheinungen, wie bei der Bildung der electrischen Entladung zwischen zweien, frei in einem Gase einander gegenüber stehenden Electroden, zeigen sich bei Umgebung derselben mit Glasröhren; so z. B. in den sogenannten Geissler'schen Spectralröhren, nur compliciren sich die Verhältnisse durch die Ladung der Glashülle, wie die folgenden Versuche zeigen.

Die Entladungsröhren bestanden für die ersten Versuchsreihen aus zwei Glaskugeln a und b (Fig. 2) von 39 Mm. Durchmesser, an welche einerseits Glashähne, anderseits Glasröhren von 6 Mm. Durchmesser und 30 Mm. Länge angesetzt waren. Oben waren in dieselben Platindrähte eingeschmolzen, die bis auf ihr Ende mit einer Glashülle umgeben waren und in der Mitte der Glaskugeln kugelförmige Electroden von Aluminium von 4 Mm. Durchmesser trugen. Die Drähte endeten ausserhalb der Röhren in kleinen, oben auf die Glaskugeln aufgeschmolzenen und mit Quecksilber gefüllten Trichtern, durch die die Leitung vermittelt wurde. — Zwischen die an die Glaskugeln angesetzten Röhren wurden verschieden lange und weite Capillarröhren eingeschaltet, indem sie erst mit einem Kautschukring umgeben in die Glasröhren eingepresst wurden, und sodann noch ein Kautschukschlauch über die Verbindungsstellen geschoben und daselbst fest geschnürt wurde. Die Fugen wurden mit geschmolzenem Kautschuk verstrichen. Durch den einen Hahn wurden die Röhren mit der Jolly'schen Quecksilberluftpumpe, durch den anderen mit dem Trockenapparat (enthaltend concentrirte Schwefelsäure, resp. wasserfreie Phosphorsäure) und einem das verwendete Gas enthaltenden Gasometer verbunden. Die Röhren lagen parallel der Verlängerung der Axe der rotirenden Scheibe der Electrisirmaschine in einem mit einem Glasdeckel versehenen Glaskasten, in welchem unterhalb ein flaches Gefäss mit Chlorcalcium aufgestellt war. Der Abstand y der Entladungen wurde, wie früher, durch Beobachtung des Spiegelbildes der Röhre in dem auf die Axe der Electrisirmaschine aufgesetzten Spiegel mittelst der heliometrischen Vorrichtung bestimmt.

Hiebei ergaben sich die folgenden Resultate:

Reihen II—V.

Capillarrohr I, innerer Durchmesser 1,092 Mm., Querschnitt 0,940 □Mm. Verschiedene Längen dieses Rohres wurden zwischen die Glaskugeln mit den Electroden eingefügt.

Die Entladungsröhre wurde mit Wasserstoff gefüllt und für sich mit den gleich langen Electroden der Electrisirmaschine verbunden, von denen event. die eine oder die andere zur Erde abgeleitet war. Von Zeit zu Zeit wurde das Galvanometer in den Schliessungskreis eingeschaltet, um die Constanz der Wirkung der Maschine zu prüfen, und gleichzeitig die Zahl z der Umdrehungen des Triebrades des Hydromotors bestimmt. Das Capillarrohr wurde für die aufeinanderfolgenden Reihen immer weiter verkürzt. Für alle Reihen betrug die Ablenkung des Galvanometerspiegels bei der Umdrehungszahl des Triebrades des Hydromotors $z = 52$ in der halben Minute stets $J = \pm 53$ bis 54.

Reihe II.

Länge 171,5 Mm.

Druck	(y) isol.	+ abgel.	— abgel.
1,1	9	10	10,5
4,1	12	(14)	12
10	15	(13)	16
18,2	17,5	(13,5)	21,3
25,2	18,5	15,4	24,7
34,4	19,5	16,7	27,5
40,2	21,9	18	32
52,6	25	—	35
69,4	26,5	—	41

Reihe III.

Länge 125,5 Mm.

Druck	isol.	+ abgel.	— abgel.
0,9	7,5	8,5	8,4
2,2	11,5	9,6	8,2
3,2	12,5	11,5	9,3
7,4	14	11,3	13
10,9	13	10	15,2
18,8	15,5	14,5	18,5
20,2	16	12,2	20,4
32,4	19	15,4	25,4
43,3	20,8	17,5	31,8

Reihe IV.

Länge 86 Mm.

Druck	isol.	+ abgel.	— abgel.
0,8	—	—	5,6
3,1	8	9,3	9,3
5,5	11,4	10,2	12,8
8,5	15	10,4	18,5
14,5	13,6	11	18,7
20,1	16,8	11	19
24,5	17,5	12,5	20
34,1	18,9	14,5	26
42,7	18,8	16,5	30,8
44,1	19,5	17	34,2
47,9	19,2	17,5	35,5
61	21,8	20	39,5
68,4	23,6	—	—
—	—	—	—
—	—	—	—
—	—	—	—

Reihe V.

Länge 53 Mm.

Druck	isol.	+ abgel.	— abgel.
4,2	6,5	8,3	9,6
5,5	8	9,3	10
8,1	10,6	10,6	16,6
10,6	10,7	10,6	19,3
14,2	12,3	9,5	22
16,1	12	10	24,5
17,9	12,6	10,5	25,5
20	13,5	11	—
24	14,5	11	24
29	14,2	14	24
32,7	15	14	25,5
36,2	16	15,5	26,5
43	16	16	28,5
48,4	18	16,5	35
53,4	19,2	17	37,5
68,2	21,8	19,8	45,8

Reihen VI. und VII.

Capillarrohr II; innerer Durchmesser 0,73 Mm., Querschnitt 0,418 □Mm.; mit Wasserstoff gefüllt. Die Versuche wurden wie bei den Reihen II—V ausgeführt. Die Ablenkung des Galvanometerspiegels betrug bei der Umdrehungszahl des Triebrades des Hydromotors $z = 50$ in der Secunde stets $J = 51$.

Reihe VI.

Länge 200 Mm.

Druck	isol.	+ abgel.	— abgel.
1,6	7	7	11,8
2,7	10,8	10,2	11,8
6,3	15	13,8	15,5
8,2	16,5	13,5	18,2
11,4	15,5	13,8	21
16,4	15,5	15	23,8
16,4	15	14,8	23,8
18,9	15	14	24
23	17	14,5	25
29,9	18	17	30,2
36	20	18,5	32,3
45	22,8	21,8	35,2
56,8	25,3	—	40
74,3	—	—	46,6

Reihe VII.

Länge 150 Mm.

Druck	isol.	+ abgel.	— abgel.
1,5	9,8	8,8	13,5
2,5	14,5	11,1	15
5,9	17,5	(16,5)	16
7,6	18,2	(16,5)	20
9,7	18	14,5	23,5
13,4	18	15	24,8
18	18	15,5	26,5
25	18,8	17	30,3
28	19,3	17,5	32,5
36	20,8	21,5	38
44,6	23	22,5	39
54	26	(26)	44,3
55,4	29	(30)	43,1
66,4	31	—	46,3
72,4	33	—	48,5

Reihen VIII—IX.

Capillarrohr II; innerer Durchmesser 0,73 Mm.; Querschnitt 0,418 □Mm. Die Entladungsröhren wurden ganz ähnlich, wie der Entladungsapparat in der Reihe I, in den Stromkreis eingefügt, so dass also die eine Electrode desselben abwechselnd mit der positiven oder negativen Electrode der Electrisirmaschine verbunden, die andere Electrode durch das Galvanometer zur Erde abgeleitet war. Die nicht verbundene Electrode der Electrisirmaschine war ebenfalls abgeleitet.

Reihe VIII.

Länge des Capillarrohres 150 Mm.

Druck	+ abgel.	— abgel.	Druck	+ abgel.	— abgel.
1	10,5	13	27,2	15,2	29,7
3,2	13	13,5	35,4	17	35,5
6,4	13,3	16,5	41,3	19	37,6
10,1	13,5	20	46,4	(19,5)	38
14,3	13,5	24	52,6	(21,8)	39,5
18,8	13,5	(27)	61,5		44
23	14,2	28			

Reihe IX.

Länge 100 Mm.

Druck	+ abgel.	— abgel.	Druck	+ abgel.	— abgel.
9	12	17	12,2	17,6	38,5 (37,5)
14	12,5	21	18,2	21,3	40,4 (38,3)
19	12,6	23,6	55,4	21,8	43,4 (41,6)
26,7	15,2	30,2	64	23,5	44,5 (42,6)
36,3	16	34,8			

Reihen X—XIII.

Capillarröhren von 70 Mm. Länge und verschiedenem Querschnitt: 1) von kreisförmigem Querschnitt: Nr. III von 0,75 Mm. Durchmesser und 0,402 □Mm. Querschnitt; Nr. IV von 1,104 Mm. Durchmesser und 0,957 □Mm. Querschnitt; Nr. V von 2,10 Mm. Durchmesser und 3,47 □Mm. Querschnitt. 2) Nr. VI von flachelliptischem Querschnitt; Flächeninhalt desselben 0,441 □Mm. Die Versuchsmethode war dieselbe, wie bei den Reihen VIII und IX.

Reihe X.

Nr. III. Durchmesser 0,75 Mm.

Druck	+ abgel.	— abgel.
0,8	6,2	6,3
2,8	8,5	9,5
3,7	12	12,8
5,9	13,8	15
9,3	12,5	17,3
13,9	13	21,4
17,1	—	23,7
19,7	14,5	26
24,3	14,5	28,4
29,4	15,5	30,5
38,2	16,5	32,6
43,5	18	36,2
54,1	20,2	37
58,9	21	40
64,9	22	44,8

Reihe XI.

Nr. IV. Durchmesser 1,104 Mm.

Druck	+ bgel.	— abgel.
1,8	—	5,2 (4,9)
4,2	(10,5)	10,2 (9,6)
6,4	(10,5)	11,6 (11)
9,2	(10,5)	17,2 (16,3)
14,1	(12,5)	21,8 (20,6)
15,1	(12,5)	23,2 (21,9)
19,8	12,5	25,5 (24,1)
27,2	14	27 (25,5)
38,3	16,5	29,2 (27,5)
55,2	18,5	35,5 (33,1)
61,2	20	38,5 (36,3)
71,5	23	45,4 (42,8)

Reihe XII.

Nr. V. Durchmesser 2,1 Mm.

Druck	+ abgel.	— abgel.	Druck	+ abgel.	— abgel.
2,2	—	7 (6,1)	29,3	—	31,2 (28,0)
5,4	9,4	12,2 (10,7)	31,9	21	33 (29,0)
11,2	13	16,6 (14,6)	35,7	23,5	35 (31,3)
14,5	13,5	20 (17,6)	45,5	32,3	38,3 (33,6)
18	13,5	21,2 t(20,4)	49,2	33,5	43 (37,7)
25	15,2	26,2 (23,0)	60,7	40	54 (47,4)

Reihe XIII.

Nr. VI. Elliptische Röhre.

Druck	+ abgel.	— abgel.	Druck	+ abgel.	— abgel.
1,8	12,5	13,5 (11,8)	31,5	16,5	30 (26,2)
3,9	13	14,2 (12,4)	38,8	20,5	32,5 (28,3)
9,9	12,5	17,2 (15,0)	45,5	21,5	35,5 (31,0)
12,9	12,5	17,8 (15,5)	55,5	22,5	43,6 (38,9)
17,9	13	21 (19,6)	68,3	25	49 (42,7)
23,5	15,5	24,9 (21,7)			

Reihen XIV—XV.

Die Capillarröhre (Nr. III) von 0,402 □Mm. Durchmesser und 148 Mm. Länge wurde zwischen verschieden grosse Glaskugeln eingefügt, welche die kugelförmigen Aluminiumelectroden von 4 Mm. Durchmesser umgaben. Als abgeleitete Electrode des Entladungsapparates diente stets dieselbe, welche schon in den früheren Reihen gedient hatte und von einer Glaskugel von 39 Mm. Durchmesser eingeschlossen war. Bei der Reihe XIV war die nicht abgeleitete, mit der Maschine verbundene Electrode von einer Glaskugel von 50 Mm., bei der Reihe XV von einer solchen von 25 Mm. Durchmesser umgeben.

Reihe XIV.

Glaskugel 50 Mm. Durchmesser.

Druck	+ abgel.	— abgel.
1,6	6,5	10,6 (9,2)
2,2	10	11,5 (10,1)
5,9	14,5	15,5 (13,4)
7,8	15	18 (15,6)
10,6	15	21,5 (18,7)
12,7	15	22,8 (19,8)
17,4	16	33,5 —
21,7	20	35 —
25,5	23	32,1 (27,9)
34,3	21	35,5 (30,8)
44,5	23	40,5 (35,2)
49,3	24,5	42,7 (37,1)
54,7	26,5	47,8 (41,3)
73,3	—	52(?) (45,2)

Reihe XV.

Glaskugel 25 Mm. Durchmesser.

Druck	+ abgel.	— abgel.
0,8	12,2	12,5 (10,5)
3,9	—	17 (10,9
5,3	15	17 (11,4)
6,1	15,8	15 (13,1)
8	16	16,2 (13,6)
10,6	15,8	28,2 (15,3)
13,9	15	19 (16,0)
19,7	15	22 (18,5)
22,3	15	24,5 (20,6)
26,9	15	26 (21,9)
32	16	26,5 (22,3)
36,3	—	28 (23,6)
43,1	—	32,2 (27,1)
45,8	—	35,5 (29,8)

Die Entladungen der letzten Reihe waren, namentlich bei Ableitung der positiven Electrode, etwas unstet.

Wurde die Richtung der Entladung plötzlich gewechselt, so waren in den ersten Zeiten die Abstände der Entladungen etwas kleiner, wuchsen aber bald zu einer constanten Grösse an.

Reihen XVI und XVII.

Entladungsapparat ähnlich, wie der in Reihe II benutzte; nur war das Capillarrohr von etwa 150 Mm. Länge und 1 Mm. Weite fest mit den die Electroden enthaltenden Glaskugeln verschmolzen.

Die positive Electrode der Electrisirmaschine wurde direct mit der einen, die negative unter Einschaltung des Galvanometers mit der anderen Electrode der Entladungsröhre verbunden. In demselben Rohre wurde Luft und Wasserstoff untersucht. Die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe der Electrisirmaschine blieb stets die gleiche. Die in Klammern der 3ten Columne der Tabellen beigefügten Zahlen geben die auf die Intensität 60 reducirten Entladungsabstände.

Reihe XVI.

Luft.

Druck	Intens.	y	
0,4	62	7,3	(7,4)
1,4	60	10,5	(10,5)
3,2	59	13,3	13,4
4,3	62	15,7	(16,2)
7,4	59	17,4	(17,4)
11,2	62	19,3	(19,9)
15,6	58	20,6	(19,9)
18,7	59	21,8	(21,4)
21,3	59	21,9	(21,5)
26,6	58	22,4	(21,6)
30,3	58	34,3	(33,1)
35,5	58	36,8	(35,6)
43,4	56	39,4	(36,7)
47,3	58	40,8	(39,4)
53,5	62	41,1	(42,5)

Reihe XVII.

Wasserstoff.

Druck	Intens.	y	
0,5	55	7,4	(6,8)
2,3	55	11	(10,1)
5,7	59	10,5	(10,3)
12,3	58	14,5	(14,0)
18,3	57,8	14,8	(14,3)
25,3	57	16,7	(15,9)
31,9	57	17,3	(16,4)
38,9	57,5	18,4	(17,6)
49	56,5	25	(24,1)
68,8	56	33,5	(31,3)

Die vorstehenden Beobachtungsresultate sind zum Theil auf beifolgender Curventafel (Taf. I.) verzeichnet, auf welcher die Abscissen die Drucke, die Ordinaten die auf gleiche Stromintensität reducirten Entladungsabstände, wie sie in den Tabellen in Klammern neben den direct beobachteten Werthen angegeben sind, bedeuten. Die Curven sind mit den Nummern der ihnen entsprechenden Reihen bezeichnet.

Aus den vorhergehenden Versuchen folgt zunächst das gleiche Resultat, wie bei der Entladung zwischen zweien in einem grösseren Raum einander gegenüberstehenden Electroden. Die Electricität gleicht sich in einzelnen, äusserst kurze Zeit dauernden Entladungen zwischen den Electroden aus. Und zwar ist, wenn die gesammten, in der Zeiteinheit durch den Entladungsapparat hindurchgegangenen Electricitätsmengen gleich sind, die bei Ableitung der positiven Electrode in jeder Entladung entladene Electricitätsmenge kleiner, als bei Ableitung der negativen Electrode, so dass also die zur Einleitung einer Entladung für die positive Electricität erforderliche Ladung grösser ist, als für die negative.

Sodann nähert sich bei zunehmenden Drucken die bei jeder Entladung übergeführte Electricitätsmenge zuerst schnell, dann langsamer einem bestimmten Werth, welcher bei etwa 20—30 Mm. Druck erreicht ist. Bei etwas weiter gesteigertem Druck wächst die zu einer Entladung erforderliche Electricitätsmenge wesentlich schneller und nimmt dann ziemlich proportional mit dem wachsenden Drucke zu.

Betrachtet man hiebei die äussere Erscheinung der Entladungen, so breitet sich bei geringen Drucken die positive, wie die negative Entladung zuerst ziemlich gleichmässig nach allen Seiten nebelartig aus; bei stärkeren Drucken zieht sie sich gegen die Electrode nach und nach zusammen, concentrirt sich dabei auf der der verbindenden Glasröhre zugekehrten Seite und bildet so allmählich ein gegen letztere hin sich erweiterndes Conoid, in welchem indess bei nicht allzuhohem Druck noch keine Metallentladungen, weder direct noch durch das Spectroscop, wahrzunehmen sind. Dieses Conoid verdichtet sich bei stärkerem Druck namentlich an der positiven Electrode auf einen immer kleineren Ausgangspunkt und wird immer dünner, bis es zuletzt einen feinen, scharf gezeichneten, in die Röhre hineinlenkenden Strahl bildet, während die Entladung an der negativen Electrode immer noch eine etwas breitere Ausdehnung bewahrt. Die Röhre selbst ist von einem hellen Lichtstrahl erfüllt, der bei höheren Drucken Schichtungen zeigen kann. Bei der Ableitung der einen oder anderen Electrode der Maschine ändern sich die Erscheinungen ein wenig. Im Allgemeinen verengt sich bei Ableitung der negativen Kugel das Conoid an der positiven Electrode des Entladungsapparates zu einem feineren Strahl, während in der negativen die nebelartige Entladung um die Electrode selbst

concentrirt und das gegen die Röhre gerichtete Conoid diffuser und dunkler wird. Bei Ableitung der positiven Electrode der Maschine wird bei kleinen Drucken das Conoid an der positiven Electrode des Entladungsapparates dunkler und diffuser, während an der negativen die nebelartige, nach allen Seiten gehende Entladung mehr conoidisch gegen die Verbindungsröhre gerichtet und schärfer begrenzt erscheint.

Der helle Lichtstrahl im Verbindungsrohr selbst rückt bei Ableitung der positiven Electroden der Maschine und des Entladungsapparates bei Drucken von etwa 2 Mm. in einem scharf begrenzten Strahl ein wenig in die negative Glaskugel hinein; unter höheren Drucken, wo er bei isolirter Verbindung beider Electroden des Entladungsapparates mit denen der Maschine bis in die negative Kugel hineinragt, zieht er sich durch Ableitung der positiven Electrode bis an das Glasrohr, durch Ableitung der negativen Electrode bis 2—3 Mm. in das Glasrohr hinein und ist dabei stets an seinem Ende scharf begrenzt. Bei längeren und engeren Röhren und höheren Drucken (50 Mm.) ist in letzterem Fall nur ein grösseres oder kleineres Stück des Rohres von der positiven Electrode an hell beleuchtet, während der der negativen Electrode zugekehrte Theil des Rohres dunkler erscheint. Die Uebergangsstelle zwischen dem hellen und dunklen Theil rückt bei zunehmendem Druck immer weiter gegen die positive Electrode vor.

Abgesehen von den oben erwähnten Unregelmässigkeiten liegen die Curven, welche für die Röhren von gleichem Querschnitt, aber verschiedener Länge, die Abhängigkeit der Abstände der Entladungen vom Druck darstellen, sehr nahe an einander, so dass also im Allgemeinen die für eine Entladung erforderliche Electricitätsmenge innerhalb gewisser Grenzen von der Länge des die Räume um die Electroden verbindenden Rohres unabhängig ist.

Jedenfalls ist eine Proportionalität jener Electricitätsmengen mit den Längen oder auch nur den Quadratwurzeln der Längen der Verbindungsröhren u. dglm. nicht vorhanden; die Abweichungen der für die verschieden langen Röhren erhaltenen Werthe können sehr wohl von der grösseren Wechselwirkung der Elec-

tricitäten der Aluminiumkugeln des Entladungsapparates bei grösserer Annäherung und der etwas abweichenden Form der Entladung, sowie auch von dem nicht ganz gleichen Abfall der freien Spannung in den Röhren herrühren.

Auch bei verschieden weiten Röhren ändert sich mit Zunahme des Querschnittes die für eine Entladung erforderliche Electricitätsmenge innerhalb gewisser Grenzen nur wenig, sowohl bei den flachen, wie den kreiscylindrischen Röhren. Auch hier können die Abweichungen von der vollständigen Gleichheit darauf zurückgeführt werden, dass bei den engeren Röhren die positive Entladung sich auf einen kleineren Querschnitt concentriren muss, und die auf der inneren Wand der Capillarröhren aufgehäuften, auf die Electrode rückwirkenden Electricitätsmengen etwas verschieden sind. Endlich zeigen sich auch bei Vergleichung der Resultate der Reihen VIII und XIV die für eine Entladung erforderlichen Electricitätsmengen bei verschieden weiten kugelförmigen, die Electroden umgebenden Glashüllen innerhalb gewisser Grenzen nicht bedeutend von dem Radius derselben abhängig. Nur bei kleineren Glashüllen (Reihe XV) werden jene Electricitätsmengen kleiner; wie schon an der Form der Entladung ersichtlich ist, in Folge der grösseren Nähe der in der Verbindungsröhre angehäuften, weniger dichten Electricitäten.

Endlich sind analog, wie sich schon bei den Entladungen im freien Gasraume ergeben hat, bei gleichem Druck und gleicher Stromintensität die Entladungsabstände in der Luft grösser, als im Wasserstoff.

Die Begründung der soeben mitgetheilten Erfahrungen lässt sich im Allgemeinen aus den schon in der ersten Abhandlung abgeleiteten Sätzen entnehmen.

Werden die Electroden der Entladungsröhre mit den Zuleitern der Electrisirmaschine verbunden, so laden sich bald die ihnen gegenüber stehenden Wände der umhüllenden Glaskugeln mit der gleichnamigen Electricität, die sich mit abnehmender Dichtigkeit auch bis in die Verbindungsröhre der Glaskugeln ausbreitet (s. w. u.).

Bei sehr geringen Drucken des Gases bedarf es zu jeder einzelnen Entladung nur einer geringen Ladung der Electroden; die Ladung der Glaskugeln kann nur wenig dicht, ebenso der Abfall der Electricitäten im Verbindungsrohr nur klein sein. In diesem ist also, namentlich nahe den Glaskugeln, die electrische Dichtigkeit nur wenig von der Dichtigkeit der Electricität auf letztern verschieden. So geht die Entladung ziemlich gleichmässig nach allen Seiten von den Electroden aus. Da ausserdem eine gleichmässig electrische Hülle auf einen electrischen Punkt im Innern nicht wirkt, können die von den Electroden sich enfernenden electrisirten Gastheile die Glaskugeln ziemlich vollständig erfüllen. — Wird der Druck stärker, also die zur Entladung erforderliche Electricitätsmenge grösser, so fällt von der die Electrode umgebenden Glashülle die Spannung der Electricität an den Glaswänden der Glasröhre schneller bis zur zweiten Electrode ab, die Electroden sind nicht mehr überall von nahezu gleichförmig geladenen Wänden umgeben. Hierdurch wird auch die Vertheilung der Electricität auf der Electrode vor der Entladung geändert; sie wird bei gleicher Gesammtladung auf der der Röhre zugekehrten Seite dichter. An letzterer Stelle wird also bei weiterer Electricitätszufuhr eher das zum Beginn der Entladung erforderliche Maximum erreicht, als an den anderen Stellen der Electrode, und dieEntladung geht nur von jener Stelle aus. Da sich aber zugleich dieses Maximum unter gleichen Bedingungen bei dieser Vertheilung an der betreffenden Stelle bei einer kleineren Gesammtmenge der Electricität herstellt, so muss, wenn mit gesteigertem Druck jene Stelle immer kleiner wird, die zu einer Entladung erforderliche Electricitätsmenge immer langsamer wachsen; die Entladungscurve nähert sich also mehr und mehr dem Parallelismus mit der Abscissenaxe; ihre Ordinaten nähern sich einem constanten Werth. Ist endlich die Ausgangsstelle der Entladungen bei zunehmendem Drucke auf ein Minimum beschränkt, so sind bei noch mehr gesteigertem Drucke letzterem entsprechend wieder fortschreitend grössere Electricitätsmengen zum Beginn einer Entladung erforderlich; die Entladungscurve steigt wieder schneller an.

Da nun bei Ableitung der negativen Electrode überhaupt die zur Erzeugung einer Entladung erforderlichen Electricitätsmengen grösser sind, als bei Isolation beider Electroden oder

Ableitung der positiven, so müssen in ersterem Falle diese Verhältnisse stärker hervortreten, als in den letzteren Fällen.

Kann man die soeben betrachteten secundären Umstände, die Wirkung der im Verbindungsrohr allmählich abfallenden Electricitäten und die Wechselwirkung der entgegengesetzten Electricitäten in der Umgebung beider Electroden, vernachlässigen, so ist die zu einer Entladung erforderliche Electricitätsmenge bei constantem Druck nur von den Verhältnissen der Umgebung der Electroden selbst bedingt. Dann muss diese Electricitätsmenge von der Länge und dem Querschnitt des Verbindungsrohres unabhängig sein, wie es die Versuche innerhalb gewisser Grenzen ergeben.

Da endlich die Kraft, welche auf einen electrisirten Punkt im Innern einer kugelförmigen, im vorliegenden Fall gleichnamig electrischen Hülle ausgeübt wird, bei gleichförmiger Vertheilung der Electricität auf der Hülle von dem Radius derselben unabhängig gleich Null ist, so muss auch, wenn sich die Hülle einmal geladen hat und wenn nicht secundäre Umstände auftreten, die zu einer Entladung erforderliche Electricitätsmenge von dem Radius der Hülle unabhängig sein. Diesem Resultat entsprechen im Allgemeinen die Beobachtungen. Dass bei engeren Hüllen kleinere Electricitäten erforderlich sind, als diesem Satz entspricht, hat seinen Grund in der grösseren Nähe der schnell abfallenden Electricitäten der Verbindungsröhre an der Electrode, wodurch die oben erwähnten Bedingungen wesentlich abgeändert werden.

Bei verschieden grossen Electroden muss, wenn die Entladung nach allen Seiten gleichmässig ausgeht und die Spannung der freien Electricitäten auf allen Punkten der Electrode die gleiche ist, die zu jeder einzelnen Entladung erforderliche Electricitätsmenge der Oberfläche der Electroden proportional sein, wie dies von *Hittorf* für cylindrische Electroden in cylindrischen Glashüllen bewiesen worden ist (s. w. u.).

Wenn es nach den vorliegenden Versuchen feststehen dürfte, dass die Entladungen durch die Gase stets in einzelnen, sehr kurz dauernden Ausgleichungen bestehen, für deren Beginn bei den entgegengesetzten Electricitäten eine verschieden starke Ladung erforderlich ist, so erschien es ausserdem nöthig, um die Art, in welcher sich die Electricitäten in der Gasentladung ausgleichen, noch etwas näher zu ergründen, auch die Wärmeerzeugung, zunächst in dem die Glashüllen um die Electroden verbindenden Glasrohr, zu untersuchen.

Hierzu wurden Entladungsröhren angewendet, welche den S. 6 beschriebenen (Fig. 2) ganz ähnlich waren. Dieselben wurden in den Glaskasten (S. 6) eingelegt. Auf die oberen Ränder des Kastens war mittelst zweier Nuthen quer ein Holzbrett (Fig. 3) aufgelegt und daselbst durch einen den Glaskasten umfassenden Kautschukring festgehalten. Das Brett *A* trug einen aus Holzstäbchen gebildeten Bügel, in dem sich ein verticaler Messingstab *c* verschob. Durch einen in eine verjüngte Stelle desselben eingreifenden Vorreiber *d* konnte der Stab *c* in seiner höchsten Stellung festgehalten werden. Unterhalb trug er einen Messingbügel *e*. Eine Spiralfeder *f* diente dazu, den Bügel abwärts zu drücken. Die verticalen Enden des Bügels waren von viereckigen Löchern durchbohrt, in denen zwischen zwei Elfenbeinkeilen vermittelst seitlicher, die Keile zusammen pressender Schrauben die Enden eines Thermoelementes festgeklemmt waren. Dasselbe bestand aus zwei 0,5 Mm. dicken Drähten von Eisen und Neusilber, welche in der Mitte zwischen den Enden des Bügels mit ihren Querschnitten aneinander gelöthet waren. Die freien Enden der Drähte waren mit Kupferdrähten verlöthet, die zum Galvanometer führten. Die Löthstellen waren, um ihre Temperatur constant zu erhalten, in ein Glas *g* voll Oel gesenkt. Einer der Kupferdrähte war hiebei mit der Erde verbunden, um die electrische Ladung des Galvanometers durch die auf der Oberfläche der Entladungsröhren angehäufte Electricität zu verhindern. Vorläufige Versuche zeigten, dass die Ableitung, auf welcher Seite der Löthstelle sie auch stattfand, den Ausschlag des Galvanometerspiegels nicht änderte. Ein ⊂förmiges Schutzblech war um das Thermoelement herumgelegt, während es in seiner höchsten Lage war, um es vor der Strahlung von der Entladungsröhre her zu schützen.

Nachdem der Strom der Electrisirmaschine hinlängliche Zeit

durch die Entladungsröhre geleitet war, wurde das Schutzblech entfernt und das Thermoelement auf die Röhre hinabgelassen, die mit seiner Längsaxe einen Winkel von 90° machte.

Bei jedem Versuch wurde der Druck des Gases, die Intensität des Stromes der Electrisirmaschine, die Zahl der Umdrehungen des Triebrades des Hydromotors, der Abstand der Entladungen und die den Temperaturerhöhungen des Thermoelementes entsprechende Ablenkung des Galvanometerspiegels bestimmt. Ein einfacher Commutator mit Quecksilbernäpfen gestattete hierzu, abwechselnd die eine Electrode der Entladungsröhre oder die eine Electrode des Thermoelementes mit dem einen Ende des Drahtes des Galvanometers zu verbinden, während im ersten Fall das andere Ende dieses Drahtes zur Erde, im zweiten mit der zweiten Electrode des Thermoelementes verbunden war. Mit der endgültigen Bestimmung wurde stets so lange gewartet, bis sich bei wiederholtem Anlegen des Thermoelementes constante Resultate ergaben. Dabei wurde die Drehungsgeschwindigkeit der Scheibe der Maschine und entsprechend die Stromintensität während des ganzen Versuches möglichst constant erhalten.

Bei der Länge der Zeit (15 bis 20 Minuten), die jeder Versuch vor den definitiven Ablesungen erforderte, war es in Folge der nicht selten vorkommenden, zufälligen Störungen des Wasserzuflusses zum Hydromotor, der Aenderungen der Stellung des ziemlich stark astasirten Magnetspiegels u. s. f. nicht ganz leicht, sehr genaue Resultate zu erzielen. Indess stimmten doch wiederholte, unter gleichen Bedingungen angestellte Beobachtungen recht gut miteinander überein.

Die folgenden Tabellen enthalten einige der so gewonnenen Resultate. Die Columnen geben unter p den Gasdruck, unter J die Intensität des Electricitätsstromes, unter z die Zahl der Umdrehungen des Triebrades des Hydromotors in 30 Secunden, unter t die der Temperaturerhöhung des Thermoelementes entsprechenden Ablenkungen des Galvanometerspiegels, unter y den im rotirenden Spiegel beobachteten Abstand der Entladungen. Die Columnen t_1 und y_1 enthalten die Werthe, welche sich für t und y ergeben würden, wenn die Intensität des Electricitätsstromes bei 50 Umdrehungen des Triebrades des Hydromotors in 30 Secunden gleich 80 wäre. $\left\{t_1 = t\frac{80}{J}; y_1 = y \cdot \frac{J}{80} \cdot \frac{50}{z}\right.$ (s. w. u.).$\left.\right\}$

Reihe XVIII.

Die Entladungsröhre war mit Wasserstoff gefüllt. Das Capillarrohr zwischen den die Electroden enthaltenden Glaskugeln hatte 130 Mm. Länge und 1 Mm. Durchmesser. Beide Electroden waren isolirt mit der Maschine verbunden, das Galvanometer wurde nur zeitweise in den Entladungskreis eingeschaltet. Die Umdrehungszahl z war constant 50.

p	J	y	y_1	t	t_1
1,1	46	2,3	1,3	17,5	30,4
4,6	44	6,6	3,6	36	65,5
7,5	43	7,6	4,2	56,8	105,6
19,6	43	13,2	7,1	95	176,7
29,6	43	17,7	9,5	130	241,8
42,2	42	22	11,5	155	295,2
52,7	40,5	23,1	11,7	175	345,6
69,5	41	28,8	14,8	226	441

Reihe XIX.

Dasselbe Rohr, gefüllt mit Luft. Andere Einstellung des Galvanometers; daher sind die Beobachtungen nicht mit denen der Reihe XVIII zu vergleichen. Positive Electrode abgeleitet.

p	J	z	y	y_1	t	t_1
1,2	36,5	48	7,5	3,5	17,5	38,3
2,4	36,2	48	11,2	5,9	23	50,8
3,9	36	48	13,2	6,5	31,5	70,0
7,9	34	48	13,3	5,9	51	120,0
12,6	33	49	13,5 *	5,7 *	69	167,3
20	34	49	13,5 *	5,8 *	100	235,8
29	35,5	48	18	8,7	121,5	278,8
36	34	51	32	13,3	136	320,0

* Entladungen sehr unstet.

Reihen XX und XXI.

Zwischen die die Electroden der Entladungsröhre enthaltenden Glaskugeln (s. auf S. 6) war ein Capillarrohr von 1,44 Mm. Durchmesser und 178 Mm. Länge eingesetzt. Die Röhre wurde mit Stickstoff gefüllt. Die Astasirung des Galvanometers war eine andere, wie bei den vorherigen Reihen.

Reihe XX.

p	J	z	y	y_I	t	t_I
3,2	72	48	42	41,2	50	55,5
6,3	72	48	45	44,1	62	70,5
11,1	71	48	46	44,8	85,5	99,0
16,1	69	48	49	47,1	127	147,2
20,4	67,5	47	34,5	28,2	128	151,7
25,5	68,5	48	30 ?	27,3	140,5	164,1
29,5	70	49	33	29,4	155	177
35,5	69	48	34	30,5	178,2	206,6
43,6	65,5	48	34	29,0	206	251,7
55	64	48	35	29,2	248	310

Reihe XXI.

p	J	z	y	y_I	t	t_I
3,4	78	49	42,5	42,4	56,5	57,9
8,1	82	52	45,5	45,3	98	95,6
13,8	82	51	45,5	45,6	132	131,8
22,2	76	52	30	27,4	144	151,7
26	80	50	35 ?	34,8	166,5	166,5
30,4	81,8	51	35,5	35,1	183	178,9
38	77	51	38	35,9	200	207,8
48	73	51	41	36,7	243	266,3

Bei den letzten beiden Beobachtungen der Reihe XX und der letzten der Reihe XXI fand vor der Eintrittsstelle der Electricität in die Entladungsröhre ein seitliches Ausströmen derselben statt; dem entsprechend ist die Intensität J des Electricitätsstromes im Rohr selbst verkleinert. Die Beobachtungen der Entladungsabstände y waren ziemlich unsicher.

Reihen XXII und XXIII.

Es wurde derselbe Entladungsapparat, wie für die vorigen Reihen, verwendet; nur wurde die Capillarröhre nach einander auf die Längen 178 Mm. und 106 Mm. gebracht. Der Apparat war mit Wasserstoff gefüllt. Das Galvanometer war unverändert in gleicher Weise astasirt, wie bei den Reihen XX und XXI.

Reihe XXII.

Capillarrohr 178 Mm. lang.

p	J	z	y	y_I	t	t_I
6,7	84,5	50	40	40,2	67	65,8
14,1	82,5	50	40,5	40,8	132	128,0
22	79	51	43,5	43,1	150	151,9
30	78,5	51	44,5	44,0	179	182,4
41,3	80	51	28	27,5	216	216,0
50	77	50	32	30,8	238	247,4
57,8	79	50	35,5	35,0	264	267,4
74	70	51	(?)	(?)	267	305,2

Reihe XXIII.

Capillarrohr 106 Mm. lang.

p	J	z	y	y_I	t	t_I
3,5	86	51	9,5	10	40	37,2
7,7	78	49	8,2	9,6	73	74,9
16	85	49	11,5	12,5	130,5	122,0
23,2	85	48	11,6	12,8	161	152,0
38	83,5	52	15	15,1	218	208,9
48,2	83,5	49	27	28,8	239	229,0
56,7	86	51	32,5	34,3	271	252,2
70,3	83	50	43	44,6	282	271,6

Reihen XXIV und XXV.

Capillarröhren von 1,5 Mm. innerem und 5,6 Mm. äusserem Durchmesser und 177 Mm. und 105 Mm. Länge zwischen den früher angewandten Electroden. Der Apparat war mit Wasserstoff gefüllt, die positive Electrode zur Erde abgeleitet. Nach dem Abheben des Thermoelementes von der Capillarröhre wurde zwischen beide kein Schutzblech geschoben; dagegen wurde der ganze, die Röhre und das Thermoelement enthaltende Glaskasten durch hohe Pappwände allerseits gegen etwaige Luftströmungen sorgfältigst geschützt. Es konnte zwar hiebei der Entladungsabstand nicht bestimmt werden, indess waren die Wärmemessungen dadurch noch regelmässiger und sicherer, als in Reihe XXII und XXIII. Die Resultate sind also mit denen der vorigen Reihen nicht vergleichbar.

Reihe XXIV.

Capillarrohr 177 Mm. lang und 1,5 Mm. weit.

p	J	z	t	t_I
4,2	88	52	84	29,5
15,8	88,5	51	93	84,1
30,2	88	52	140	127,3
47,3	82	50	166	162
62,5	82,5	49	193	187
72	79	49	207	210

Reihe XXV.

Capillarrohr 105 Mm. lang und 1,5 Mm. weit.

p	5	z	t	t_I
5,6	85,2	49	35	33
20,2	83	49	97	93
36,4	79,5	47	139	140
52	80	47	163	162
64,5	80	49	186	192
80,6	79	45	212	215

Reihen XXVI und XXVII.

Der Entladungsapparat wie in den vorigen Reihen; nur wurde ein Capillarrohr von 0,74 Mm. innerem und 5,25 Mm. äusserem Durchmesser und resp. 177 und 105 Mm. Länge verwendet. Die Reihe t_{II} enthält die Werthe, welche durch Multiplication von t_I mit dem Verhältniss der Oberflächen der in Reihen XXVI und XXVII einerseits und der in Reihen XXIV und XXV andererseits verwendeten Röhren erhalten sind, also die Werthe

$$t_{II} = \frac{5{,}25}{5{,}6}\, t_I.$$

Reihe XXVI.

Capillarrohr 177 Mm. lang und 0,74 Mm. weit.

p	J	z	t	t_I	t_{II}
3,5	78	51	43	44	41,3
19,3	75	54	96	102	96,0
34	81,7	51	153	150	140,5
50,7	80	50	183	183	167

Reihe XXVII.

Capillarrohr 105 Mm. lang und 0,74 Mm. weit.

p	J	z	t	t_I	t_{II}
4	73	45	39	43	40,4
14	88,7	52	101	91	85,4
23	88	—	184	122	114,2
40,1	86,2	50	184	173	162
54	86,7	48	224	216,5	193,7
85	75	—	224	239	224

Reihe XXVIII.

Zwischen die die Electroden umgebenden Glaskugeln wurde ein Capillarrohr von 180 Mm. Länge und 1,5 Mm. innerem und 5,6 Mm. äusserem Durchmesser eingefügt. Die Erwärmung desselben wurde abwechselnd nahe der die positive und der die negative Electrode enthaltenden Glaskugel gemessen. Die mit der Electrisirmaschine verbundene Electrode ist mit a, die abgeleitete mit b bezeichnet.

Electrode a	p	J	z	t	t_I	
+	56	94,5	54	160	141	nahe
—	,,	87	53	180	165	a
—	,,	86	52	170	158	nahe
+	,,	85	50	147	138	b

Reihen XXIX und XXX.

Das zwischen die Electrodenkugeln eingefügte Capillarrohr bestand aus zwei in einer geraden Linie liegenden und an einem Ende mit einander zusammengeschmolzenen Röhren von je 85 Mm. Länge und (*A*) 1,43 Mm. innerem und 5,5 Mm. äusserem Durchmesser und (*B*) 0,73 Mm. innerem und 5,2 Mm. äusserem Durchmesser. Die negative Electrode der Electrisirmaschine war mit der isolirten Electrode *a* des Entladungsapparates verbunden, die andere Electrode *b* desselben abgeleitet. Es wurde die Temperaturerhöhung etwa in der Mitte einer jeden der beiden Röhrenhälften bestimmt. Der Werth t_{II} ist $t_{II} = \frac{5,2}{5,5} t_I$.

Reihe XXIX.

Die Hälfte *A* des Capillarrohres an *a*, Hälfte *B* an *b*.

Thermoelement an	p	J	t	t_I	t_{II}
B	17,9	79,2	100	101	95,5
A	17,9	76,5	90	94	—
A	46	70,7	148	157	—
B	46	75,5	155	164	155

Reihe XXX.

Die Hälfte *B* des Capillarrohres an *a*, die Hälfte *A* an *b*.

Thermoelement an	p	J	t	t_I	t_{II}
B	18,6	77	101	105	99,1
A	18,6	75,1	90	93	—
A	36,8	74	140	152	—
B	36,8	72	153	170	160,7

Da der Durchgang der Electricität durch die Entladungsröhren in einzelnen Entladungen erfolgt, zu deren Beginn eine bestimmte Ladung der Electroden erforderlich ist, und also die Zahl der Entladungen in der Zeiteinheit der Menge *J* der in derselben den Electroden zugeführten Electricität entspricht, so muss die unter gleichen Umständen durch die Entladungen er-

zeugte Wärmemenge J proportional sein, es lässt sich also die einer bestimmten Intensität J, z.B. 80 entsprechende Wärmemenge t_1 durch Multiplication der beobachteten Wärmemenge t mit $80/J$ berechnen.

Die Temperatur der Capillarröhren wird constant, wenn die durch die Entladungen von Innen zugeführte Wärme der auf der Oberfläche der Röhren ausgestrahlten und an die Luft abgegebenen gleich ist. Da letztere innerhalb der engen Temperaturgrenzen bei den Versuchen für die Längeneinheit der Oberfläche der Röhren proportional ist, so erscheinen bei gleicher Wärmezufuhr von Innen die Röhren von geringerem äusserem Durchmesser d_1 heisser, als die von grösserem Durchmesser d. Um daher die bei ersteren beobachteten Erwärmungen t_1 der Röhren mit denen der letzteren vergleichen zu können, müssen sie mit $\frac{d_1}{d}$ multiplicirt werden. Hierdurch ergeben sich die Werthe t_{II}.

Ein kleiner Fehler ist bei diesen Bestimmungen nicht wohl zu vermeiden, indem die erwärmte Masse des Thermoelementes zu der Masse der Längeneinheit der weiteren und engeren Röhren nicht ganz in demselben Verhältnisse steht. Bei den geringen Dimensionen der Drähte des Thermoelementes und den nicht bedeutenden Verschiedenheiten der Massen jener Röhren ist aber die betreffende Correction nur unbedeutend.

Die so berechneten Resultate der Reihen XXII bis XXVII sind zum Theil auf beifolgender Tafel unter D dargestellt, deren Abscissen die Drucke p, deren Ordinaten die Temperaturen t_1, oder, wo sie besonders berechnet sind, die Temperaturen t_{II} bezeichnen.

Aus diesen und manchen andern Versuchen lassen sich zunächst direct folgende Resultate ableiten:

Die Temperaturerhöhungen der Capillarröhren nehmen bei gleicher Electricitätszufuhr mit wachsendem Gasdruck, so wie mit der für jede einzelne Entladung erforderlichen Electricitätsmenge im Allgemeinen immer langsamer zu.

Dabei ist bei bestimmten mittleren Drucken ein relatives Maximum der Temperaturerhöhungen, ähnlich wie für die zu jeder einzelnen Entladung erforderlichen Electricitätsmengen, nicht deutlich zu beobachten. Dagegen nimmt die durch jede

einzelne Entladung hervorgebrachte Temperaturerhöhung (const. $t_1 y_1$) zuerst langsamer und zwar in etwas geringerem Verhältniss, als das Ansteigen des Druckes, bis zu dem Drucke zu, bei welchem auch das relative Maximum der Entladungsabstände erfolgt; bei höherem Druck nimmt die Temperaturerhöhung durch jede Einzelentladung viel schneller zu, als vorher, aber nahezu proportional der Zunahme des Druckes.

So lange bei geringeren Drucken die zur Erzeugung einer Entladung erforderlichen Electricitätsmengen im Stickstoff und Wasserstoff unter sonst gleichen Umständen von einander wenig verschieden sind, sind es ebenso auch die Temperaturerhöhungen der Capillarröhren. Bei höheren Drucken, bei welchen für jede Entladung im Stickstoff grössere Electricitätsmengen erforderlich sind, als im Wasserstoff, ist auch die Temperaturerhöhung in ersterem bedeutender.

Unter sonst gleichen Bedingungen ist die Erwärmung jedes einzelnen Querschnittes eines kürzeren oder längeren Capillarrohres, welches zwischen die die Electroden umgebenden weiteren Glashüllen eingeschaltet wird, nahezu die gleiche, selbst wenn die Längen im Verhältniss von 1 : 1,78 geändert werden. Dabei ist die äussere Erscheinung der Entladung an den Electroden bei längeren und kürzeren Capillarröhren unter sonst gleichen Verhältnissen kaum von einander verschieden.

Bei längeren Röhren nimmt indess die Erwärmung von der mit der Electrisirmaschine verbundenen gegen die abgeleitete Electrode hin ein wenig ab (Reihe XXVIII). Bei relativ sehr langen Röhren tritt dies namentlich hervor, wenn die isolirte Electrode der Röhren positiv geladen ist. Man bemerkt sodann, wie wir schon erwähnten, einen mit starken Drucken immer weiter von der Seite der abgeleiteten Electrode sich im Capillarrohr ausbreitenden dunklen Raum, dessen Temperatur wesentlich niedriger ist, als die der helleren Stellen.

Aus diesem Grunde wurde auch bei den meisten der oben erwähnten vergleichenden Versuche die positive Electrode der Entladungsröhren zur Erde abgeleitet.

Röhren von verschiedenem innerem, aber gleichem äusserem Durchmesser erhalten in gleichen Zeiten durch die Entladungen unter sonst gleichen Umständen nahezu gleiche Wärmemengen, selbst wenn der Querschnitt des

Entladungsraumes im Verhältniss von 1 : 4 zunimmt. Dies zeigt sich sowohl bei nach einander folgender Einschaltung verschieden weiter Capillarröhren zwischen die Electroden, als auch bei Einschaltung eines an verschiedenen Stellen ungleich weiten Rohres zwischen dieselben.

Bei anderen Versuchen wurde der Einfluss der Erwärmung auf die Entladungserscheinungen untersucht. Der Entladungsapparat bestand dabei aus zwei conaxialen, 12 Mm. weiten und 70 Mm. langen cylindrischen Glasröhren, die durch ein 115 Mm. langes und 1 Mm. weites Capillarrohr verbunden waren. In den Axen der weiteren Glasröhren waren Platindrähte als Electroden angebracht, die an ihren, dem Capillarrohr zugekehrten Enden mit kleinen Glaskuppen bedeckt waren. Die Röhren waren mit Stickstoff oder Wasserstoff gefüllt. Die Zahl der Entladungen in denselben wurde in der früher angeführten Art gemessen. Dieselbe änderte sich kaum, als die Hüllen um die Electroden oder das Capillarrohr schwach erhitzt wurden. Wurde aber letzteres an einer Stelle *stark* erhitzt, wenn auch noch lange nicht bis zum Glühen, so nahm bei gleicher Electricitätszufuhr die Zahl der Entladungen in der Zeiteinheit stark zu (z. B. im Verhältniss von 7 : 12). Dann erschien die erhitzte Stelle nicht mehr röthlich oder bläulich, sondern hellgelb gefärbt, und mit dem Spectroscop war in dem vorher reinen Wasserstoff- oder Stickstoffspectrum die Natriumlinie sehr hell sichtbar. Im rotirenden Spiegel zeigten sich an der erhitzten Stelle nur die einzelnen, scharf von einander getrennten Entladungen gelb gefärbt, so dass also ein dauerndes Glühen der natriumhaltigen Glaswand nicht eintrat. Zugleich breitete sich während der Entladungen das gelbe Natriumlicht *nicht* über die stark erhitzte Stelle der Röhren aus.

Bei stärkerer Erhitzung des Raumes um die eine oder andre Electrode erschien auch nur an der die Platindrähte vorn bedeckenden Glaskuppe oder unmittelbar auf denselben gelbes Natriumlicht, welches sich aber ebenfalls nicht weiter ausbreitete. Dabei wurden die Abstände der Entladungen grösser (z. B. im Verhältniss von 10 : 13). Wurde aber der zur Luftpumpe führende Hahn geöffnet, so dass sich die durch die Erwärmung erzeugte Steigerung des Luftdrucks wieder ausgleichen konnte, so fiel

der Entladungsabstand wieder auf das frühere. Also selbst bei Temperaturerhöhungen bis nahe zum Schmelzen des Glases ändert sich die zu einer Entladung erforderliche Electricitätsmenge nicht merklich.

Es wurde ferner die electroscopische Ladung der Capillarröhren untersucht, welche zwischen die die Electroden umgebenden Glashüllen geschaltet waren, indem an verschiedene Stellen derselben ein Metallplättchen gelegt wurde, welches durch einen dünnen Draht mit dem Goldblatt eines Fechner-Bohnenbergerschen Electroscopes in Verbindung stand.

Wurde nur die eine Electrode des Rohres geladen, die andere abgeleitet, so zeigte das ganze Capillarrohr die Electricität der isolirten Electrode in abnehmender Stärke gegen das abgeleitete Ende. Die die abgeleitete Electrode umgebende Glaskugel erschien nicht geladen.

Wenn beide Electroden der Entladungsröhre isolirt mit den Kämmen der Electrisirmaschine verbunden und die Hähne an beiden Enden des Entladungsapparates geschlossen waren, so war die der positiven Electrode zugekehrte Hälfte der Capillarröhre positiv, die der negativen Electrode zugekehrte negativ geladen; in der Mitte lag ein Indifferenzpunkt.

Wurde eine Stelle des Capillarrohres ableitend berührt, so änderte sich die Vertheilung des Lichtes in demselben kaum, wenn die Electroden des Entladungsrohres beide isolirt mit der Maschine verbunden oder auch die positive Electrode abgeleitet war. War indess die negative Electrode abgeleitet, so zeigte sich bei engen und langen Röhren unter dem ableitenden Draht eine gegen die Seite der isolirten positiven Electrode sich ausbreitende dunkele Stelle, die um so länger war, je weiter die Ableitungsstelle gegen die abgeleitete Electrode hin vorgeschoben wurde.

Die äussere Erscheinung der Entladungen bei Isolation beider oder Ableitung einer Electrode stimmt im Allgemeinen mit den Folgerungen überein, die aus der ungleichen Ladung der Electroden und der ungleichen Ausbreitung der Entladung

aus beiden Electroden abzuleiten sind. Für den Uebergang der Electricitäten in Entladungsröhren tritt hierzu noch die Wirkung der auf den Glaswänden angehäuften freien Electricitäten, wie dies u. A. die folgenden Versuche zeigen:

In einem cylindrischen Rohr von etwa 10 Mm. innerem Durchmesser und 30 Ctm. Länge, an dessen Enden sich die etwa 3 bis 4 Mm. im Durchmesser haltenden kugelförmigen Electroden befinden, kann die Wechselwirkung der Ladungen der letztern ziemlich vernachlässigt werden.

Bei Isolation der Electroden breitet sich die zuerst aus der negativen Electrode ausströmende Electricität bei sehr schwachen Drucken auf der Glaswand bis zu der positiven Electrode hin aus, wie sich durch electroscopische Versuche nachweisen lässt. Die nach Herstellung dieser Vertheilung von letzterer Electrode ausgehende Entladung erfüllt sofort das Rohr in seinem ganzen Querschnitt, indem sie sich sogleich bis zur entgegengesetzt geladenen Röhrenwand ausdehnt. In der Nähe der negativen Electrode contrahirt sich die Entladung zu derselben hin und ist von der die Electrode auf einen etwa 2 Mm. weiten Raum umgebenden Lichthülle durch einen kleinen, der Electrode concentrischen dunklen Raum getrennt.

Bei stärkerem Gasdruck, bei dem die von der positiven Electrode auf die Glaswand bei jeder Entladung übergehenden Electricitätsmengen bedeutender sind, erstreckt sich die negative Ladung der Glaswand nur bis etwa 6—8 Ctm. von der positiven Electrode; die positive Entladung bleibt in Folge dessen nahe derselben mit etwas grösserer Helligkeit ziemlich eng contrahirt in der Mitte des Rohres und breitet sich erst allmählich gegen die Wand durch den ganzen Querschnitt aus. Bei Ableitung der negativen Electrode, bei welcher sich die ganze Röhrenwand mit abnehmender Stärke von der positiven Electrode an positiv ladet, durchzieht entsprechend die positive Entladung als heller Lichtstreifen eine grössere Länge der Axe des Rohres, und nur schwach breitet sich daneben, sich erweiternd gegen die negative Electrode hin, die Entladung zur Röhrenwand aus. Bei Ableitung der positiven Electrode ist die Erscheinung dagegen nicht sehr von der bei Isolation beider Electroden verschieden; nur geht die Entladung an der positiven Electrode etwas schneller zur Röhrenwand.

In den Entladungsapparaten mit Capillarröhren zwischen

den die Electroden umgebenden Glashüllen gestalten sich die Vorgänge ganz analog, nur dass in Folge der Form des Apparates die Verhältnisse noch complicirter werden und die Vertheilung der Electricität im Einzelnen sehr schwer zu verfolgen ist.

Schliesslich wurden einige Versuche über den Einfluss der Unterbrechung der Stromesbahn durch eine kleine Luftstrecke auf die Entladungen angestellt, um dadurch einigen Aufschluss über die Natur des dunklen Raumes an der negativen Electrode zu gewinnen. Es diente hierzu ein mit verdünnter Luft von 0,5 bis 1 Mm. Druck gefülltes, 30 Mm. weites und 30 Ctm. langes, cylindrisches Entladungsrohr, an dessen beiden Enden zwei Platindrähte von der Seite her, mit ihrer Axe senkrecht gegen die Axe des Rohres, eingeschmolzen waren.

Bei directer und isolirter Verbindung beider Electroden mit den Zuleitern der Electrisirmaschine waren beide Electroden mit hellem blauem Glimmlicht bedeckt; von der positiven an ging eine sich etwas contrahirende Entladung (*a*) (Fig. 4) aus, die in einiger Entfernung von der Electrode eine dunkle Stelle (*b*) zeigte und dann durch das ganze Rohr, sich schwach verjüngend (*c*), bis in die Nähe der negativen Electrode hindurchging, von der sie durch den dunklen Raum (*d*) getrennt war.

Bei Ableitung der positiven Electrode wird die dunklere Stelle (*b*) schmaler, indem die Entladung (*a*) etwas weiter sich ausdehnt; bei Ableitung der negativen Electrode wird der dunkle Raum (*d*) breiter und der Theil (*c*) der Entladung zieht sich spindelartig zu demselben zusammen.

Es wurde sodann in dem Zuleitungsdraht zu der einen oder anderen Electrode in der Luft eine kleine Unterbrechungsstelle von etwa $^1/_2$ Mm. Länge eingeschaltet.

Befand sich die Unterbrechungsstelle an der negativen Electrode, so trat der dunkle Raum (*d*) an der negativen Electrode viel schärfer und breiter hervor; ebenso zeigte sich dicht an der positiven Electrode eine schmale dunkle Stelle (*b*), von der aus die röthlich leuchtende Entladung (*c*) erst sich etwas verjüngend, dann sich wieder ausbreitend bis (*d*) das Rohr durchzog.

Wurde die positive Electrode abgeleitet (Fig. 5), so verschwand

(*b*) fast ganz, sonst blieb die Erscheinung ziemlich ungeändert. Wurde die Unterbrechungsstelle vergrössert, so wurde der dunkle Raum (*d*) breiter; bei sehr grosser Ausdehnung derselben zog sich ein heller Streifen von der untersten Spitze der Electrode zur übrigen leuchtenden Entladung. Wurde der Zufluss zur negativen Electrode durch eine Wasserschicht verzögert, so nahm die Ausdehnung des dunklen Raumes (*d*) mehr und mehr ab.

Bei Ableitung der negativen Electricität der Electrisirmaschine vor der Unterbrechungsstelle wurde die dunkle Stelle (*b*) an der positiven Electrode schmaler; die folgende Entladung (*c*) spitzte sich gegen die Mitte des Rohres, wo etwa früher die Contraction stattfand, unter Zunahme ihrer Helligkeit zu; ging aber schon vor ihrer Spitze in eine dunklere, das Rohr erfüllende und durch den sehr scharf und breit gezeichneten dunklen Raum *d* von der negativen Electrode getrennte Lichtsäule über.

Befand sich die Unterbrechungsstelle an der positiven Electrode, so erschien die positive Electrode mit hellerem Glimmlicht bedeckt, als die negative; von ersterer ging sofort eine graue Lichtsäule aus, welche das ganze Rohr erfüllte, vor der negativen Electrode sich etwas verjüngte und daselbst an einer gegen letztere sich conoidisch zuspitzenden Stelle heller wurde; dann aber sich bis zur negativen Electrode erstreckte, ohne von derselben durch einen dunklen Raum getrennt zu sein.

Bei Ableitung der negativen Electrode (Fig. 6) änderte sich die Erscheinung wenig, nur war die helle Stelle etwas gegen dieselbe vorgeschoben und die Entladung breiter. Bei Ableitung der positiven Electricität der Maschine erschien noch eine etwas dunklere Stelle an der positiven Electrode. Auch hier war der dunkle Raum an der negativen Electrode kaum zu erkennen. Bei einer sehr kleinen Unterbrechungsstelle und etwas stärkerem Drucke ging hierbei die Entladung nur zwischen den Enden der Electroden in einen Bogen über und änderte sich kaum durch Einschaltung einer Wassersäule.

Die Ladung der Wände des Rohres mit freier Electricität ergiebt sich aus folgender Uebersicht:

Electrode	Ohne Unterbrechung	Unterbrechung an der + Electrode	Unterbrechung an der — Electrode
isolirt	ganzes Rohr —	ganzes Rohr — abnehmend von der — Elect.	ganzes Rohr + abnehmend von der + Elect.
+ abgel.	abnehmend —	abnehmend stark —	an d. — Elect. schwach —, sonst fast unelect.
— abgel.	abnehmend —	an d. + Elect. schwach +, sonst fast unelect.	abnehmend stark +

In Betreff des Durchganges der Electricität durch die Gase ist eine doppelte Ansicht aufgestellt worden. Einmal wurde angenommen, und diese Ansicht wurde in der ersten Abhandlung über diesen Gegenstand als die wahrscheinlichere hingestellt, dass die an den Electroden befindlichen Gasmassen bei eintretender Entladung die Electricitäten mit sich fortführten und sich die Entladung unter directer fortschreitender Bewegung der Gastheilchen von der einen Electrode zur anderen fortpflanzt.

Entgegen dieser Ansicht behaupten verschiedene Physiker, und unter ihnen namentlich auch A. de la Rive[1]), »dass zwar in Gasen von einer gewissen Dichtigkeit die Entladung diruptiv sei, also das Gas, wie jeder isolirende feste oder flüssige Körper, die wesentlich passive Rolle eines Hindernisses der Wiedervereinigung der beiden Electricitäten spielt, welches die Entladung so zu sagen mechanisch überwindet. Dagegen soll ein Gas von einer bestimmten Verdünnung die Electricität ohne mechanischen Widerstand ausfliessen lassen und nur einen Leitungswiderstand darbieten, der die Fortpflanzung der Electricität durch eine so schnelle Aufeinanderfolge von Molecularbewegungen stattfinden lässt, dass sie fast continuirlich erscheint. Dann hat man einen wirklichen galvanischen Strom, auf den der Magnet wie auf einen festen Leiter wirkt, und der die electrolytische Zersetzung des Gases bewirkt, wenn es zusammengesetzt ist, wie in einem flüssigen Electrolyt. In diesem Fall soll der Widerstand der Länge der Gasschicht proportional sein. Es ist also nicht mehr eine Entladung, sondern ein wahrer elektrischer Strom.«

Als Beweis für diese Ansicht wird besonders angeführt, dass bei Anwendung von Inductionsströmen neben der diruptiven Entladung, dem »trait de feu«, welcher in sehr verdünnten Gasen verschwindet, die »Aureole« nebenhergeht, und beide

1) *A. de la Rive.* Archives de Genève. Nouv. Liv. T. XLIV p. 305. 1872*.

nach den Versuchen von Perrot[1]) von einander getrennt werden können.

Wenn aber ein sehr verdünntes Gas wie ein metallischer Leiter oder ein Electrolyt leitete, müsste schon bei der geringsten Spannungsdifferenz an den Electroden ein der letzteren proportionaler Strom durch das Gas hindurchgehen, und es könnten sich daselbst nicht die Electricitäten, wie die Erfahrung ergiebt, vor Eintritt der Entladung jedesmal in einer grösseren, endlichen Dichtigkeit anhäufen.

Um letztere Erscheinung mit der Annahme einer metallischen oder electrolytischen Leitung der Gase vereinen zu können, müsste man die Hypothese machen, dass noch an den Electroden selbst ein gewisser Uebergangswiderstand vorhanden wäre, der, ähnlich wie ein Nichtleiter, den Austritt der Electricität aus den Electroden zu dem leitenden Gase verhinderte und dessen Durchbrechung eine endliche Spannung erforderte.

Der Uebergangswiderstand selbst könnte nur in der auf der Oberfläche der Electroden condensirten, sehr dichten Gasschicht, die etwa noch durch den äusseren Druck belastet ist, seinen Ursprung haben. — Die Versuche über die galvanische Polarisation durch Gase bei abnehmendem Druck[1]) zeigen aber, dass die Dichtigkeit einer auf Metallen condensirten Gasschicht sehr wenig von dem Druck beeinflusst wird, während im Gegentheil die Experimente über die electrische Entladung ergeben, dass die zur Einleitung einer Entladung erforderliche Electricitätsmenge, also auch der supponirte Uebergangswiderstand mit wachsendem Drucke steigt. Auch sollte bei Erhitzung der Electroden bis etwa zur Temperatur des schmelzenden Glases sich diese Gasschicht doch wohl ändern; jene Electricitätsmenge bleibt aber bei unverändertem Druck dabei merklich constant. Ferner würde aus diesen letzteren Experimenten folgen, dass der Uebergangswiderstand an der positiven Electrode grösser wäre, als an der negativen, während doch gar nicht abzusehen ist, weshalb die Durchbrechung der condensirten Gasschicht an der positiven Electrode eine grössere Kraft erfordern sollte, als an der negativen. Zur Erklärung dieses verschiedenen Verhaltens der Entladung an beiden Electroden müsste man also noch neben

1) *Perrot*, vgl. Galvanismus (2) Bd. II. § 499.
2) Vgl. Galvanismus (2) Bd. I. § 499.

der Annahme des Uebergangswiderstandes eine besondere zweite Hypothese machen, etwa wie in der ersten Abhandlung, dass die Metalle die positive Electricität stärker anziehen, als die negative, und so bei Ladung mit gleichen Electricitätsmengen die negative Electrode eher die zum Beginn einer Entladung erforderliche Spannung auf ihrer Oberfläche erhält, als die positive.

Nach der Durchbrechung des Uebergangswiderstandes müsste die zwischen den Electroden befindliche Gasschicht die Electricität metallisch leiten.

Wir finden aber, dass bei gleichen Electroden und gleichen Umgebungen derselben bei verschiedenen Drucken die zu einer Entladung erforderliche Electricitätsmenge zunächst von der Länge des zwischen die Electroden eingefügten Entladungsraumes z. B. in Capillarröhren, unabhängig ist, wenn die Länge der letzteren so gross ist, dass die Influenzwirkung der Electroden aufeinander und der ferner von denselben in den Capillarröhren angehäuften freien Electricitäten zu vernachlässigen ist. In diesem Fall muss auch bei verschieden langen Capillarröhren die Vertheilung der Electricität auf der geladenen Electrode vor der Entladung die gleiche sein, also auch die bei der letzteren geleistete Arbeit, und ebenso der zu überwindende Uebergangswiderstand ebenfalls gleich sein. Bezeichnen wir die potentielle Energie, die der electrischen Ladung unmittelbar vor der Entladung entspricht, mit v, die Arbeit, welche bei der Ueberwindung des Uebergangswiderstandes geleistet wird, mit a, die in dem »metallisch leitenden« Gase auf die Längeneinheit in Form von Wärmeerzeugung geleistete Arbeit mit b, die Länge des Raumes zwischen den Electroden mit l (wobei die weiteren Räume in der Nähe der Electroden einer gewissen Länge des Capillarrohres zwischen ihnen gleichwerthig gesetzt werden können), so muss dem entsprechend

$$v = a + bl \text{ oder } b = \frac{v - a}{l}$$

sein. Es müsste also die auf der Längeneinheit des Capillarrohres geleistete Arbeit oder erzeugte Wärme umgekehrt proportional der Länge des Rohres sein. Die Versuche beweisen aber im Gegentheil, dass jene Wärmemenge von der Länge des Rohres innerhalb gewisser Grenzen nahezu unabhängig ist.

Einem ähnlichen Widerspruch begegnen wir bei der Messung der Erwärmung verschieden weiter Capillarröhren durch

die unter sonst gleichen Bedingungen hindurchgehenden Entladungen.

Wir müssen, wenn das Gas wie ein metallischer Leiter erwärmt wird, annehmen, dass die ganze, durch die Entladung im Gase erzeugte Wärme auf die Capillarröhre übergeht. Es müsste demnach die Temperaturerhöhung der Röhre von vierfachem Querschnitt nur das Viertel von der von einfachem Querschnitt sein, wenn das Gas in beiden Röhren gleich gut metallisch leitete. Die Temperaturerhöhungen sind aber in beiden Röhren nahezu die gleichen. — Macht man die Leitungsfähigkeit des Gases von seiner Temperaturerhöhung selbst abhängig, so müsste, da das Gas nach jeder einzelnen Entladung wiederum völlig dunkel, also kalt wird, zuerst erklärt werden, in welcher Weise das Gas vor der Erwärmung bis zu den Temperaturen, bei denen es metallisch zu leiten beginnt, die Electricität fortführt, und wie es dabei erwärmt wird. Dann müssten diese Temperaturerhöhungen in den verschieden weiten Röhren bei jedem Druck gerade so gross sein, dass zu der vorher in denselben erzeugten Wärme in dem nunmehr metallisch leitenden Gase durch den Entladungsstrom noch so viel Wärme hierzu erzeugt würde, dass die gesammten Wärmemengen in beiden Röhren einander gleich würden, eine jedenfalls ebenso künstliche, wie unwahrscheinliche Annahme.

Auch die Erscheinung der Aureole und des »trait de feu« ist kein Beweis für die metallische Leitung der Gase, da erstere ebenfalls durch einzelne Entladungen im glühenden Gase, letztere durch Metallentladungen gebildet wird, die bei starken Drucken zu ersteren hinzutreten (vgl. die erste Abhandlung).

Vielmehr gestatten die vorliegenden Versuche wohl, mit ziemlicher Sicherheit anzunehmen, dass die Fortführung der Electricität in den Gasen nicht in einem derartigen doppelten Process vor sich geht, sondern wesentlich in gleicher Weise vom Beginn der Entladungen an bis zu ihrem Schlusse verläuft.

Der Vorgang bei der Entladung dürfte nach meiner Ansicht, in Anschluss an die Ausführungen in der ersten Abhandlung, etwa in folgender Art aufzufassen sein. Zunächst können wir nicht annehmen, dass der Uebergang der Electricität in Gasen nur durch den Aether stattfindet, denn sonst müsste in einem möglichst vollkommenen Vacuum ebenfalls ein solcher eintreten, was nicht der Fall ist. Die Gasmolecüle selbst müssen sich also bei der electrischen Fortführung betheiligen.

Ueberschreitet dann die Ladung der Electroden an einer Stelle eine bestimmte Grenze und werden die der Electrode zunächst liegenden, zwischen derselben und den ferneren Gastheilen hin und her geschleuderten Gasmolecüle genügend stark gleichnamig geladen, so wird die ganze electrisirte Gasmasse daselbst abgehoben, ähnlich dem Vorgang beim Sieden einer Flüssigkeit. Da selbst bei ziemlich starker Erhitzung der Electroden die Entladungszahl bei gleicher Electricitätszufuhr sich nicht ändert, wenn der Druck dabei constant bleibt (vgl. S. 26), so dürfte die Ueberwindung der Anziehung der auf den Electroden condensirten Gasschicht, die dabei sicherlich geändert wird, eine geringere Rolle spielen.

Die an der Electrode electrisirte Gasmenge bewegt sich dann in der Richtung der schnellsten Abnahme der Spannung mit einer Geschwindigkeit von den Electroden fort, die der unmittelbar vorher die Gastheile auf die Electrode festdrückenden Kraft direct proportional ist.

Hiebei findet der ursprüngliche Antrieb nur an den Electroden selbst statt. Stehen also zwei derselben in einem freien Gasraume einander gegenüber, so ist derselbe nur von der auf den einzelnen Stellen beider Electroden vorhandenen Spannung abhängig. — Sind die Electroden in Entladungsröhren eingeschlossen, so ist derselbe und entsprechend die für eine Entladung erforderliche Electricitätsmenge eben deshalb unabhängig von der Weite und Länge des die Räume um die Electroden verbindenden Rohres, so weit dabei die Wechselwirkung der Electricitäten auf beiden Electroden und die Verschiedenheit der Wirkung der in den Röhren vertheilten freien Electricitäten auf die Electroden selbst vernachlässigt werden kann. — Auch von der Erhitzung des Gases im Capillarrohr ist entsprechend die zu einer Entladung erforderliche Spannung unabhängig, wenn nicht durch die Erwärmung das Glas zersetzt und metallisch leitend wird, somit also gewissermaassen zwischen die Electroden des Rohres eine neue Electrode eingeführt wird.

Die bei verschiedenen Gasen zum Beginn der Entladung erforderliche Spannung kann unter sonst gleichen Umständen auch von der Natur des Gases selbst, von der Ladungsfähigkeit seiner einzelnen Molecüle u. s. f. bedingt sein.

Die Gasmolecüle fliegen bei der reinen Gasentladung nicht von der einen Electrode bis zur anderen, wie dies auch nach

der neueren Gastheorie nicht zu erwarten wäre. Hiergegen spricht das Verweilen des glühenden Natriumdampfes in einem von den Entladungen durchströmten, erhitzten Capillarrohre an der Erwärmungsstelle, sei es an den Electroden, sei es im Capillarrohre selbst, von der er sich im gegentheiligen Fall durch das ganze Rohr bei jeder Entladung in einer geringeren oder grösseren Menge ausbreiten müsste. Auch wenn bei stärkeren Drucken und grösseren Ladungen Metallentladungen zu den Gasentladungen zwischen zwei, sei es in einem freien Gasraume, sei es in einem Entladungsrohr befindlichen Electroden, hinzutreten, so bilden sich, wie in der ersten Abhandlung erwähnt wurde, an den Electroden kleine, bei höheren Drucken sich nur allmählich weiter ausbreitende Büschel von glühenden, durch das Spectroscop erkennbaren Metalltheilchen, die erst bei relativ hohen Drucken die gegenüberliegende Electrode erreichen.

Hiernach dürfte der Uebergang der Electricität zwischen den Gastheilchen, zunächst im freien Raum, sich in ganz ähnlicher Weise gestalten, wie in einer Reihe nebeneinander aufgehängter elastischer Kugeln. Treffen die von der Electrode fliehenden, geladenen Gasmolecüle A auf fernere B, so vertheilen sie deren Electricität, ziehen sie an und gleichen einen Theil ihrer Electricität mit der ungleichnamigen von B aus, so dass beide Molecüle gleichnamig geladen erscheinen. Die hieraus hervorgehende Abstossung treibt A der ursprünglichen Bewegungsrichtung entgegen zurück, B vorwärts. A nimmt entweder von neu entgegenkommenden Molecülen oder von der Electrode wiederum Electricität an und bewegt sich wieder vorwärts, während B, angetrieben durch die electrische Abstossung und die von A ihm mitgetheilte Bewegung einen Theil seiner Electricität an ein drittes Theilchen C abgiebt und zurückprallend wieder mit A zusammentrifft u. s. f. Die von beiden Electroden ausgehenden derartigen Bewegungen treffen an einer Stelle zusammen, wo die Ausgleichung der entgegengesetzten Electricitäten der sich nunmehr anziehenden letzten Molecüle eintritt. Hiebei kann die Geschwindigkeit der einzelnen Gasmolecüle so gross sein, dass sie sich bis zum Erglühen des Gases steigert. Indess wird die bei der Vereinigung der entgegengesetzten Electricitäten zweier aufeinander folgender Molecüle geleistete Arbeit bei der Scheidung der Electricitäten in jedem Molecüle selbst compensirt.

Sind die Electroden in einem Entladungsrohr von Glas so weit von einander entfernt, dass ihre gegenseitige Influenzwirkung zu vernachlässigen ist, so complicirt sich die Erscheinung, indem sich auch die Wände des Rohres von den Electroden aus laden können. Obgleich bei den oben beschriebenen Apparaten das Capillarrohr in allen Fällen in seiner ganzen Länge von der sogenannten »positiven Entladung« (s. w. u.) durchzogen ist, ist doch nur bei Ableitung der negativen Electrode das ganze Rohr, wenn auch in abnehmender Stärke von der positiven Electrode an positiv geladen, während es bei isolirten Electroden nur theilweise positiv, bei Ableitung der positiven Electrode aber auf der ganzen Länge mit abnehmender Intensität von der negativen Electrode an negativ geladen ist. Diese freie Electricität bindet, wie bekannt, die entgegengesetzte auf der äusseren Oberfläche der Glaswand, während sich die gleichnamige mehr oder weniger zerstreut. Die auf der Innenwand der Glasröhre vertheilte Electricität kann auf die Spannung an den Electroden von Einfluss sein, wie wir schon S. 14 erwähnt haben. Sie hat ferner auf die Beschleunigung und die Richtung der Bewegung der Gasmolecüle einen Einfluss, wie z. B. sehr deutlich aus den S. 26 erwähnten Versuchen mit der weiteren Glasröhre hervorgeht. Indess scheint der Hauptantrieb, wie im freien Raum, doch von den Electroden selbst auszugehen, da z. B. bei Ableitung der positiven Electrode in einem doppelt so langen Rohr zwar der Electricitätsabfall von der negativen Electrode an nur halb so gross ist, als in einem Rohr von einfacher Länge, und doch die Wärmeerzeugung auf der Längeneinheit beider Röhren nahezu die gleiche ist.

Die durch die electrische Vertheilung vermittelte Fortpflanzung der Bewegung von Gasmolecül zu Gasmolecül in der Richtung der Entladung dürfte auch in den Entladungsröhren, wenn zunächst die Wärmeabgabe an die Wände vernachlässigt wird, ganz ähnlich, wie nach den Gesetzen des elastischen Stosses stattfinden. Tritt dabei die Entladung aus einem engeren in ein weiteres Rohr ein, in dessen Querschnitt die Anzahl der Gasmolecüle die $n$fache ist, so bleibt dennoch die gesammte lebendige Kraft in jedem Querschnitt dieselbe, da in gleichen Zeiten in beiden Röhren ein bewegtes Molecül gleich viele relativ ruhende trifft, obgleich bei dem schiefen Auftreffen der zuerst electrisch bewegten Gastheile auf andere sich die Bewegung theils in radialer,

theils in axialer Richtung über den ganzen Querschnitt verbreitet.

Zu dieser einfachen Uebertragung der Bewegung tritt eine partielle Abgabe derselben an die Wände der Röhren, wodurch die lebendige Kraft der Gasmolecüle, also auch die Temperatur des Gases sich von den der Ausgangsstelle der Entladung zunächst liegenden Theilen der Röhren bis zu den entfernteren vermindert. Da aber die seitliche Ausbreitung der lebendigen Kraft in Folge der excentrischen Stösse der Molecüle aufeinander im engen und weiten Rohr, sei es durch mehr oder weniger concentrische Molecularschichten, bis zu der Peripherie in gleichem Maasse vor sich geht, so muss auch die Abgabe der Bewegung an die Wände, die der Zahl der dieselben treffenden Molecüle und dem Quadrat ihrer Geschwindigkeit proportional ist, mithin die Wärmeabgabe an dieselben im weiten und engen Rohr die gleiche sein.

Da diese Abgabe der Wärme bei den meisten Versuchen eine nur geringe ist, so erweisen sich die von der Ausgangsstelle der Entladung entfernteren Stellen kürzerer Röhren nur wenig kälter, als die ihr zunächst liegenden Stellen, obgleich bei längeren Röhren diese Abkühlung an der geringeren Helligkeit der Entladung daselbst sehr deutlich zu erkennen ist. Dass hiebei der Uebergang von den hell leuchtenden Stellen des Rohres zu den dunkleren ziemlich schnell erfolgt, dürfte darin liegen, dass die Helligkeit des Erglühens der verschiedenen Körper, so z. B. auch galvanisch glühender Drähte mit steigender Temperatur sehr schnell zunimmt.

Die eben mitgetheilten Ansichten stimmen mit unseren jetzigen Annahmen über die Constitution der Körper und die Electricitätsleitung in ihnen im Wesentlichen überein.

Es sei mir erlaubt, hierauf ein wenig näher einzugehen, da mir einige, in der neueren Zeit aufgestellte, darauf bezügliche Hypothesen nicht ganz mit der Erfahrung übereinzustimmen scheinen.

In den festen Körpern schwingen die Molecüle um bestimmte mittlere Gleichgewichtslagen, die sich nicht wesentlich ändern, wenn im Strome Electricität von einem Molecül zum anderen

übergeht. Nach der einen Ansicht soll dieser Uebergang durch einzelne diruptive Entladungen stattfinden. Man müsste dann annehmen, dass etwa die Körpermolecüle mit Hüllen von Electricitätstheilchen vereint sind, die an den Oscillationsbewegungen der Körpermolecüle mehr oder weniger theilnehmen, und dass von der einen Hülle zur anderen Electricitätstheilchen übergehen, oder auch eine Mittheilung electrischer Schwingungen vom einen Molecül zum andern stattfindet. Das Wesen des Leitungswiderstandes sucht *Herwig*[1]) hiebei darin, dass im Allgemeinen die Bewegungsrichtung der Körpertheilchen mit ihren Hüllen in zwei aufeinander folgenden Querschnitten eines Leiters sehr verschieden ist. Beim Uebergang der electrischen Theilchen von einem Molecül zum anderen müssten sie also ihre Bewegungsrichtung ändern, und die Arbeit, welche hiebei geleistet werden sollte, entspräche dem Widerstand, der um so grösser wäre, je grösser die Energie der Bewegung der Körpertheilchen oder je höher die Temperatur ist.

Indess findet hier in der That keine eigentliche Aenderung der Bewegungsrichtung, sondern nur eine Zusammensetzung zweier verschieden gerichteter Bewegungen statt. Zerlegt man die sämmtlichen Bewegungen in drei aufeinander senkrechte Componenten, so addirt sich beim Uebergang einer dieser Componenten von einem Molecül zum andern einfach ihre lebendige Kraft zu der der darauf senkrechten Componenten, wie bei der Addition zweier aufeinander senkrechter Lichtschwingungen. Dagegen kann eventuell eine Aenderung der lebendigen Kraft beim Zusammentreffen der gleichgerichteten Componenten stattfinden. Indess auch diese Aenderung wird im Mittel compensirt, da im constanten Strom ebensoviel Electricität in ein Molecül eintritt, wie austritt.

Wollen wir daher einen Uebergang der Electricität oder auch der electrischen Schwingungsbewegung von einem Molecül zum anderen annehmen, so muss im constanten Strom der durch die constant wirkende electromotorische Kraft fortdauernd erfolgende Bewegungsantrieb durch eine Art Reibung der Electricitätstheilchen an den Körpermolecülen compensirt werden, durch welche der erstere völlig verbraucht wird. Dieser Reibungs-

---

1) *Herwig. Pogg.* Ann. Bd. XLIII. S. 411. 1874.

widerstand entspricht bei gleicher electromotorischer Kraft dem galvanischen Leitungswiderstand. Auf die Körpertheile wird dadurch die lebendige Kraft der Electricitätsbewegung übertragen, die lebendige Kraft ihrer Wärmeschwingungen wächst proportional dem Widerstand, den sie dem Strom entgegensetzen. [1])

Bei der leichteren Beweglichkeit der Körpermolecüle bei höheren Temperaturen, so wie nach der Schmelzung, wo sie die ihnen durch die Molecularkräfte gebotenen relativen Lagen mit geringerer Kraft bewahren, würde die Abgabe der Bewegung der Electricitäten an die einzelnen Körpermolecüle leichter erfolgen, also der Widerstand wachsen. Bei den geschmolzenen und flüssigen metallischen Leitern könnte indess schon ein Theil der Electricitätsleitung durch Mitführung der Electricität mit den in weiteren Bahnen aus ihren mittleren Gleichgewichtslagen hinausgehenden Molecülen erfolgen, die sie dann an die folgenden Molecülen abgeben u. s. f.

Die Electrolyte leiten aller Wahrscheinlichkeit nach, indem die mit ihren Jonen verbundenen Electricitäten mit ersteren vereint fortgeführt werden. Indem die Jonen jedes Molecüls sich bei ihrer Bewegung aneinander, an dem Lösungsmittel u. s. f. reiben, verlieren sie ihre electrolytische Fortbewegung in der Richtung des Stromes, und ihre lebendige Kraft setzt sich in Wärmebewegung um. Jene Reibungswiderstände entsprechen also dem Leitungswiderstand. [2]) Bei der Complicirtheit derselben, namentlich bei den in einem Lösungsmittel gelösten Electrolyten, ist eine einfache Beziehung des Widerstandes der Electrolyte zu den sonstigen mechanischen Constanten derselben nicht zu erwarten. Deshalb führt auch z. B. die Vergleichung der Widerstände der wässerigen Lösungen der Chloride mit ihren specifischen Volumen nicht zu einem einfachen Gesetze. Die unter Annahme der umgekehrten Proportionalität zwischen beiden Werthen berechneten Leitungsfähigkeiten weichen z. B. nach *F. Kohlrausch* beinahe 10 % ihrer Grösse voneinander ab. [3])

---

1) Vgl. hierüber Galvanismus (2) Thl. II § 1168.

2) Vgl. Galvanismus (2) Thl. I § 435 u. flgd.

3) *F. Kohlrausch* und *Grotrian. Pogg.* Ann. Bd. CLIV S. 237. 1875. Nach der eben erwähnten Abhandlung (S. 238) hätte ich in der mechanischen Zähigkeit der Lösung den Grund der Krümmung und des Maximums der Widerstandscurve gesucht. Zur Feststellung meiner Ansichten er-

Die Molecüle der Gase werden dann, wie erwähnt, von den Electroden aus bei einer bestimmten Ladung derselben in Richtungen fortbewegt, welche jeweilen der grössten Abnahme des Potentials entsprechen; sie stossen dabei auf andere Molecüle, denen sie ihre Electricität, oder wenn dieselbe in Oscillationen des jedes Molecül umgebenden Aethers besteht, die entsprechende Schwingungsbewegung mittheilen u. s. f. Der Vorgang wäre also ganz ähnlich dem der Electrolyse, nur dass die lebendige Kraft der Gasmolecüle nicht, wie die der Jonen, so wie sie durch die an jeder Stelle wirkende electromotorische Kraft erzeugt ist, durch die Reibung an dem benachbarten Medium sich vollständig in Wärme umsetzt, sondern sich von den Electroden aus durch den ganzen Entladungsraum fortpflanzt und dann ein aliquoter kleinerer Theil derselben an allen Stellen ziemlich gleichmässig an die Wände in Form von Wärme übertragen wird.

Neben den allgemeinen Verhältnissen der Entladung sind noch eine Reihe von einzelnen Punkten zu erklären, so namentlich die ungleiche Ausbreitung der positiven und negativen Entladung; der Ort, an welchem die in den bewegten Gasmassen enthaltene lebendige Kraft sich endlich in Form von Wärme zeigt; der dunkle Raum an der negativen Electrode, so wie die Schichtung des Lichtes der Entladung.

Die ungleiche Ausbreitung der positiven und negativen Entladung ist schon in der ersten Abhandlung über diesen Gegenstand auf die grössere Anfangsgeschwindigkeit

---

laube ich mir noch einmal hervorzuheben, dass ich ausdrücklich betont habe, dass die zur Ueberwindung der Reibungswiderstände bei der Electrolyse verwendete Kraft zwar zu der zur Ueberwindung der Zähigkeit nöthigen Kraft in naher Beziehung steht, ihr aber doch nicht völlig gleich ist (*Pogg.* Ann. Bd. XCIX p. 232. 1858) und später wiederholt habe, dass die Vergleichung beider nur unvollkommene Resultate liefern kann; dass die Proportionalität beider nur als eine sehr entfernte Annäherung an die Wahrheit, als eine Vergleichung einander ähnlicher, aber nicht unmittelbar zusammenhängender Erscheinungen gelten kann (Galvanismus (2) Bd. I § 437). Der Schluss von *Kohlrausch* »dass ausser der mechanischen Zähigkeit noch andere Eigenschaften der Lösung hier in Frage kommen« (l. c. S. 239) dürfte also wohl schon in obigen Aussprüchen liegen.

zurückgeführt worden, welche die positive Entladung in Folge der zu ihrem Entstehen erforderlichen, durch das Experiment nachweisbaren grösseren Ladung gegenüber der negativen Entladung erhält.

Zur Erklärung dieses Verhaltens war daselbst (S. 383) die Hypothese von der ungleich starken Anziehung der beiden Electricitäten durch die Electroden aufgestellt worden, die, so lange wir noch genöthigt sind, unsere bisherigen Vorstellungen von dem Wesen der Electricität beizubehalten, sich wenigstens auch an die Annahmen anschliesst, die wir uns über die electromotorische Wirkung zweier Metalle aufeinander gebildet haben.

Da in jener Abhandlung auf die von anderen Physikern gegebenen Erklärungen dieser und der damit nahe verwandten Erscheinungen des Ventileies (Abhandl. I. S. 376) nicht näher eingegangen war, so erlaube ich mir, dieselben noch einmal hier kurz zu berühren.

Bei Gelegenheit seiner sehr interessanten Versuche über die Lichtenbergischen Figuren stellt Herr *von Bezold*[1]) die Hypothese auf, dass bei ihrer Darstellung in der positiven Entladung eine Bewegung gegen den Zuleiter hin, in der negativen eine Bewegung gegen die Peripherie hin stattfände. — Bei den Gasentladungen scheint indess ein analoges Verhältniss nicht einzutreten. Wenn bei gesteigertem Druck an der positiven Electrode büschelförmige Metallentladungen zu den Gasentladungen hinzu kommen, so müssen jedenfalls die glühenden Metalltheile von der Electrode ausgehen und sich von derselben entfernen. Eben so beobachtet man in Geisslerschen Röhren eine allmähliche Ueberführung des Metalls der negativen Electrode zur umgebenden Glashülle. Beide Phänomene deuten aber auf eine Fortbewegung der an der Entladung theilnehmenden Molecüle von den Electroden fort und sind durch eine Art Aufsaugung, z. B. an der positiven Electrode, nicht wohl erklärlich.

Nach *P. Riess*[2]) wäre der Unterschied der positiven und negativen Lichterscheinung unserm Verständniss bedeutend näher gerückt, wenn man annimmt, dass der Luftstrom, welcher das Glimmen der Electrode stets begleitet und an der mit Feuchtigkeit beladenen Electrode vorbeigeht, etwa bei der Reibung an

1) *von Bezold*, vgl. Galvanismus (2) Bd. II § 986.
2) *P. Riess*, Reibungselectricität, Bd. II § 754.

der trocknen Luft, letztere negativ electrisch macht. Nach der Analogie des Lullin'schen Versuchs und der electrischen Staubfiguren würde nachher die positive Electricität in dem negativen Raum sich weiter ausbreiten können. — Abgesehen davon, dass sich die Verschiedenheiten der Gasentladung an beiden Electroden auch in einem äusserst sorgfältig getrockneten Raume zeigen, würde danach entgegen dem Versuchsresultat offenbar die positive Electrode zur Entladung einer kleineren Spannung bedürfen, als die negative, da die negative Electricität der Luft schon auf die positive Electricität der Electrode einen Antrieb ausübte. Ob sich dann bei gleichem Antrieb die positive Entladung in der negativen Luft, in der sie doch partiell neutralisirt wird, weiter ausbreiten würde, als die negative Entladung, wäre auch noch specieller zu untersuchen.

An einem anderen Orte sucht *P. Riess* [1]) die Wirkung des Ventileies davon abzuleiten, dass die die Electroden umgebende Luft durch die der explosiven Entladung stets vorhergehende Glimmentladung mit der Electricität der Electrode geladen wird, und diese Luft von der explosiven Entladung nachher durchbrochen werden muss. Es würde also eine der ersten Entladung entgegengesetzte Entladung leichter zwischen den Electroden übergehen, als eine gleichgerichtete. Da nun in dünner Luft an grösseren Flächen die Glimmentladung leichter auftritt, wenn sie negativ sind, so soll bei abwechselnder Ladung der grossen Electrode des Ventileis dieselbe leichter glimmen, wenn sie negativ ist und deshalb dem Strom den Durchgang leichter gestatten, für den sie als positive Electrode dient. — Es wird also die letztere Entladungserscheinung auf einen vorhergegangenen Gegenstrom und eine dadurch bedingte secundäre Ladung der Luft zurückgeführt. Da nun aber der Uebergang der Electricität zwischen einer grossen und kleinen Electrode im luftverdünnten Raum ganz denselben Bedingungen folgt, selbst wenn gar kein solcher Gegenstrom vorher zwischen den Electroden übergegangen ist, so dürfte obige Voraussetzung nicht unbedingt nöthig sein. Auch müsste eben erklärt werden, weshalb eine grosse negative Electrode in verdünnter Luft leichter glimmt, als eine positive. Die in der ersten und der vorliegenden Abhandlung mitgetheilten

1) *P. Riess*, Berliner Monatsber., 6. August 1868, *Pogg.* Ann. Bd. CXXXVI. S. 44. vgl. Galvanismus (2) Bd. II § 944.

Versuche dürften hievon, sowie von dem Verhalten des Ventileies auch ohne jene Voraussetzung secundärer Vorgänge direct Rechenschaft geben. — Ist durch die zu unseren Versuchen benutzten Entladungsröhren der Strom der electrischen Entladungen längere Zeit in einer bestimmten Richtung hindurchgegangen und wird sodann plötzlich umgekehrt, so finden freilich die nächsten Entladungen etwas schneller statt, als die folgenden, da noch die Glaswände mit der der ersten Stromesrichtung entsprechenden Ladung versehen sind und letztere auf die bei Umkehrung des Stromes den Electroden zugeführten entgegengesetzten Electricitäten beschleunigend wirken. Bald aber stellt sich die normale Ladung der Glaswände her, und die Aufeinanderfolge der Entladungen ist durchaus regelmässig.

Es entsteht ferner die Frage, an welcher Stelle die mit verschiedener Geschwindigkeit von beiden Electroden ausgehenden electrischen Bewegungen der Gasmolecüle zusammentreffen.

Von den auf S. 29 mitgetheilten Beobachtungen sind namentlich hiefür diejenigen characteristisch, bei denen die eine Electrode abgeleitet, der anderen durch eine Unterbrechungsstelle in der Luft die Electricität der Electrisirmaschine zugeführt wird. In diesem Fall muss die Entladung ohne vorherige Vertheilung statischer Electricität auf der Glaswand beim Uebergang eines Funkens an der Unterbrechungsstelle sofort unter Zufuhr einer grösseren Electricitätsmenge beginnen. Dem entsprechend bemerkt man hiebei keine deutliche Ladung der Röhrenwände.

Beim Fortschreiten der von der geladenen Electrode ausgehenden Entladung im Rohr wird dann auch die Electricität der abgeleiteten Electrode vertheilt und auch von dieser beginnt die Entladung, indess erst einige Zeit nach der ersten. Beide Entladungen, die, wenn auch die Bewegung sich durch Mittheilung von Molecül zu Molecül fortpflanzt, doch ganz den Eindruck von Luftströmen machen, treffen somit auf der Seite des Rohres zusammen, die der abgeleiteten Electrode zugekehrt ist. Indem sie sich dabei anziehen, verjüngen sie sich, und indem die von der positiven Electrode ausgehende Entladung mit

grösserer Geschwindigkeit beginnt, als die negative, dringt sie mehr oder weniger mit einer gegen die letztere convexen Oberfläche in dieselbe ein. Da an der Stelle des Zusammentreffens die entgegengesetzt electrischen Molecüle sehr beschleunigt werden, erscheint die Entladung daselbst heller.

Da der dunkle Raum an der negativen Electrode auch auftritt, wenn derselben durch eine Unterbrechungsstelle die Electricität zugeführt und die positive Electrode abgeleitet wird, so kann er nicht die Stelle des Zusammentreffens der positiven und negativen Entladung und des Ausgleichs der an ihren vorderen Seiten auftretenden freien Electricitäten sein, die vielmehr heisser und heller sein müsste, wie oben erwähnt. Da aber der dunkle Raum nach den directen Versuchen von *de la Rive* kälter erscheint, als die übrige Entladungsstrecke, und in demselben eine deutliche Electricitätsströmung, freilich durch das immerhin etwas precäre Mittel derivirter Ströme (wobei neue Electroden in die Stromesbahn eingeführt werden) nicht nachzuweisen ist, so muss der electrische Vorgang in demselben andrer Art sein, als in der übrigen Entladung. — Sein Auftreten muss mit der verschiedenen Grösse der Ladung der Electroden zusammenhängen, die für den Beginn einer Entladung erforderlich ist, da er unter sonst ganz gleichen Verhältnissen nur bei Ableitung der positiven Electrode und Einfügung der Unterbrechungsstelle vor der negativen Electrode, nicht aber bei der umgekehrten Anordnung, in einiger Ausdehnung erscheint. Nach den S. 30 mitgetheilten Versuchen nimmt die Ausdehnung des dunklen Raumes zu, wenn jene Unterbrechungsstelle vergrössert wird, sie nimmt ab, wenn zwischen dieselbe und die negative Electrode eine die Zufuhr der Electricität verzögernde Wasserschicht geschaltet wird; seine Ausdehnung wächst also mit der Menge der der Electrode in einer gegebenen Zeit zugeleiteten Electricität, wobei, abgesehen von sehr grossen Electricitätsmengen, die negative Electrode an allen Stellen glimmt. — An der positiven Electrode bewirken dieselben Einflüsse nur eine grössere oder geringere Ausbreitung der Entladung auf der Electrode. Dieselbe wird um so kleiner, je geringer die Electricitätszufuhr ist.

Entsprechend der S. 35 u. flgd. aufgestellten Ansicht könnte man sich etwa denken, dass zunächst an der negativen Electrode, die isolirt mit der Electricitätsquelle verbunden sei, nicht nur in

den sie berührenden, sondern auch etwas entfernteren Gasmolecülen eine mit abnehmender Entfernung abnehmend intensive Vertheilung der Electricitäten eintritt. Liegt der Electrode eine Glaswand gegenüber, die event. ausserhalb abgeleitet ist, so erstreckt sich diese directe Vertheilung von der Electrode aus noch weiter. Bei immer stärkerer Ladung ziehen sich die Gastheile demnach näher zur Electrode, soweit es die sonstigen elastischen Verhältnisse der Gase gestatten. Vor ihnen entsteht vorübergehend ein verdünnterer Raum. Werden dann bei Beginn der Entladung die die Electrode berührenden, negativ geladenen Gastheile fortgetrieben, so theilen sie den folgenden vertheilten Molecülen ihre Ladung mit; dann begeben sie sich selbst oder nach einander andere, mit vertheilter Electricität geladene Gastheile zur Electrode, an der sie die ungleichnamige Electricität ausgleichen und sich negativ laden. In Folge dessen wird sowohl die Electrode stark erhitzt, als auch den Theilchen eine grosse Geschwindigkeit ertheilt. Wo diese Mittheilung der Electricitäten, sei es zwischen der Electrode und den Theilchen, sei es zwischen den letztern, stattfindet, dürfte das blaue Glimmlicht erscheinen, welches sich event. bis zur gegenüberstehenden Glaswand verbreitet. Mit seinem Auftreten ist demnach die Erhitzung der Electrode unmittelbar verknüpft. Diese Entladungsart wird so lange andauern, als noch die Ladung der Electrode genügend stark ist, um den Theilchen eine den Druckverhältnissen entsprechende Geschwindigkeit zu ertheilen.

Fliehen die aufeinander folgenden, negativ geladenen electrischen Theilchen von der Umgebung der Electrode und durcheilen den vor ihnen befindlichen verdünnten Raum, so finden daselbst keine oder wenige Zusammenstösse mit anderen Molecülen statt, im Gegentheil nehmen die Theilchen in Folge ihrer gegenseitigen electrischen Abstossung einen grösseren Raum ein; die Temperatur und Helligkeit desselben erscheint demnach geringer, als wo sie an der Electrode zusammengedrängt sind. So kann der dunkle, oder nur durch mattes nebliges Licht erleuchtete Raum entstehen. Erst wenn die negativen Molecüle auf unelectrische stossen, deren Electricität sie vertheilen, die sie anziehen und dann nach dem Zusammenstoss laden, findet ein dichteres Zusammentreten der aufeinander folgenden Molecüle statt, die Wärme und Lichterscheinung wird lebhafter und pflanzt sich nun, wie oben erwähnt, von Theilchen zu Theilchen

fort. — Möglicher Weise kann auch noch zu wiederholten Malen nach dem ersten Zusammentreffen eine grosse Anzahl gleichartig geladener Molecüle, wie nach dem Verlassen der negativen Electrode, eine Strecke ohne Zusammenstösse zurücklegen und dann erst auf die folgenden unelectrischen Molecüle ihre Ladung übertragen. So können abwechselnd hellere und dunklere Stellen entstehen, die die Schichtung des Lichtes ausmachen würden.

An der positiven Electrode beginnt die Entladung bei einer viel höheren Ladung, als an der negativen. Bei gleicher Electricitätszufuhr wird sie also in viel kürzerer Zeit verlaufen; weniger, aber stärker geladene Gasmolecüle werden mit grösserer Geschwindigkeit von ihr fortgeführt. Der dunkle Raum verschwindet daher. Nur in besonderen Fällen ist er von geringerer Ausdehnung, z. B. bei isolirter Verbindung der Electroden mit der Maschine und Einfügung einer Unterbrechungsstelle an der negativen Electrode, wobei indess eine Rückentladung der von der positiven Electrode aus geladenen Röhre durch letztere Electrode eintreten kann, ehe der Funken die Unterbrechungsstelle an der negativen Electrode durchbricht.

Ich verkenne nicht, dass es zur Prüfung dieser Vorstellungen noch mannichfacher Versuche bedarf. Indess fassen sie doch die Phänomene wesentlich unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammen, der auf keinen anderen Voraussetzungen beruht, als unsere bisherigen Annahmen über das Wesen der Electricität. Bei der grossen Schwierigkeit und Complicirtheit der Erscheinungen dürfte dies vorläufig nicht ganz ohne Nutzen sein. Ich hoffe, hiezu noch weitere Beiträge liefern zu können.

Es dürfte wohl angezeigt sein, zu untersuchen, ob und in wie weit vielleicht sich durch die oben erwähnten Versuche und die daraus abgeleiteten Verschiedenheiten des Verhaltens der Entladung an der positiven und negativen Electrode diesseits und jenseits des dunklen Raumes, welche wir, ohne dabei den Ort des Zusammentreffens in letzteren direct zu verlegen, der Einfachheit halber positive und negative Entladung nennen wollen, die so sehr interessanten und eigenthümlichen Einzelheiten der äusseren Erscheinungen derselben erklären lassen,

wie sie bei verschiedener Gestalt der Electroden u. s. f. namentlich von *Hittorf*[1]) mit so grosser Sorgfalt beobachtet worden sind. Wir müssen uns dabei selbstverständlich auf einige der einfacheren Phänomene beschränken.

Werden z. B. statt der kugelförmigen Electroden in kugelförmigen Glashüllen cylindrische (Draht) Electroden in cylindrischen Hüllen angewendet, so ist bei Ladung derselben die electrische Spannung an ihren vorderen freien Enden am grössten; auch ist daselbst die Abstossung der rings um die Electrode an den Glaswänden angehäuften Electricität, welche sich mit abnehmender Dichtigkeit vor den Enden der Electroden ausbreitet, relativ am kleinsten. Die Entladung geht also zunächst bei etwas höherem Druck von diesen vorderen Enden aus. Wird die Luft stärker verdünnt, so ist die zum Beginn der Entladung erforderliche Spannung, ebenso die Ladung der umgebenden Glaswand und auch der Unterschied der an den verschiedenen Stellen der Electroden für die Entladung nöthigen Spannungen kleiner, namentlich an der negativen Electrode, die ohnehin einer geringeren Ladung bedarf. Dann genügt die von der Electrisirmaschine oder dem Inductorium (s. w. u.) zugeführte Electricität, um zunächst an der negativen Electrode auch an den weiter vom Ende abgelegenen Stellen die Entladung einzuleiten. An der positiven Electrode beginnen die Entladungen erst bei stärkeren Ladungen; demnach sind auch die Unterschiede der letzteren an den einzelnen Stellen der Electrode grösser, die Entladung geht fast ausschliesslich von dem vorderen Ende der positiven Electrode aus.

Sind die Glashüllen um die negative cylindrische Electrode einer Entladungsröhre enger, so bedarf es in Folge der Abstossung Seitens der Electricität auf der Glaswand einer grösseren Ladung zur Entladung auf den Seitenflächen der Electrode, als bei weiteren Glashüllen. Die Entladung beschränkt sich dann also mehr und mehr auf das Ende der Electrode und kann sich eben in Folge der Abstossung durch die negativ geladenen Glaswände weit bis zur positiven Electrode ausbreiten.

Werden ferner zwei Röhren mit einer kleinen und einer grossen negativen Electrode hintereinander in den Schliessungskreis eingeschaltet, so fängt eine Entladung an, wenn die Spannung zuerst

1) *Hittorf*, vgl. Galvanismus (2) Bd. II, § 954 u. flgde.

auf den negativen Electroden eine bestimmte Grösse erreicht hat. Diese wird sie auf der grösseren Electrode erst bei einer stärkeren Ladung erhalten, als auf der kleineren. Beginnt also die Entladung auf ersterer, so wird auf letzterer die ihr zuströmende Electricitätsmenge relativ grösser, als erforderlich; es wird die durch die beginnende Entladung fortgetriebene Luft noch weiter beschleunigt; das Glimmlicht verbreitet sich weiter, als von der grösseren negativen Electrode aus.

Sind in einem cylindrischen Rohr zwei bis auf die Vorderfläche mit einer Glashülle bedeckte, drahtförmige Electroden in axialer Lage befestigt, die eine (*I*) am Ende, die andere (*II*) knieförmig von der Seite aus in dem mittleren Theil des Rohres, so dass sie ihre freie Fläche von der ersteren Electrode abwendet, und sind die Electroden so weit von einander entfernt, dass ihre influirende Wechselwirkung nur klein ist, so wird, wenn Electrode *II* negativ ist, die Glaswand rings um dieselbe, namentlich bei geringeren Drucken, bei der zur Entladung erforderlichen kleinen Spannung nur schwach und ziemlich gleichmässig geladen; die Rückwirkung dieser Ladung auf die Ladung der Electrode selbst ist relativ nur klein, und das Glimmlicht nimmt dabei rings um die Electrode einen grösseren Raum ein. In Folge dessen kann sich auch die Entladung in der Richtung der schnellsten Abnahme des Potentials, d. h. in der Richtung von der Electrode *I* abgewendet ausbreiten. Ist aber Electrode *II* positiv, so ladet sich die Glaswand an der der freien Fläche zugekehrten Seite der Röhre relativ stark: die negative Entladung von Electrode *I* aus verbreitet sich bis in die Nähe der Electrode *II*, und so wird in Folge der Abstossung durch die erstere und die Anziehung durch die zweite der von Electrode *II* ausgehende Entladungsstrahl gegen Electrode *I* hin umgebogen. Zugleich kann sich im letzteren Fall das von Electrode *I* ausgehende Glimmlicht über die positive Electrode hinaus ausbreiten, indem die mit grösserer Geschwindigkeit nach der Richtung der resultirenden Kräfte von einer kleinen Stelle ausgesendete und auf einen engen Raum beschränkte positive Entladung nicht sogleich alle, in dem Glimmlicht nach allen Stellen entladene negative Electricität neutralisiren kann.

Analog möchte sich der schöne Versuch von *Hittorf* erklären, bei welchem in einer kugelförmigen Glashülle einer drahtförmigen negativen Electrode eine ebensolche positive Electrode, deren Längsrichtung auf der der ersteren senkrecht steht,

gegenüber gestellt wird. Da bei genügender Verdünnung die negative Entladung, wenn die Influenzwirkung Seitens der positiven Electrode nicht zu gross ist, von einem grossen Theil der Oberfläche der negativen Electrode, und zwar nach unseren Annahmen ein wenig früher sich ausbreitet, ehe die positive Entladung an der Spitze der positiven Electrode beginnt, so muss letztere, um ihre Electricität mit der der negativen Entladung zu neutralisiren, sich nicht zur negativen Electrode biegen, sondern um die letztere herum in das Bereich des negativ electrisirten glimmenden Gases abgelenkt werden.

Aehnlich verhält es sich bei parallel gestellten Electroden, bei denen ebenfalls die Entladung von der positiven Electrode nach den Stellen hingeht, an denen die Anziehung der positiven Electricität durch die mittelst der negativen Entladung in dem Entladungsraum verbreitete negative Electricität im Maximum ist.

Bei Anwendung eines Inductoriums als Electricitätsquelle gestalten sich die Erscheinungen complicirter, als bei Anwendung der Electrisirmaschine. Die gegen die Enden der Inductionsrolle durch die Inductionswirkung getriebenen Electricitätsmengen häufen sich nicht nur an ersteren an, sondern auch mehr oder weniger im Innern der Inductionsrolle selbst. Sind also jene Enden mit den Electroden, z. B. einer Entladungsröhre, verbunden und hat die Electricität darauf die zur Einleitung einer Entladung erforderliche Spannung erreicht, so wird durch die erste Entladung die Gasschicht an den Electroden abgehoben und verdünnt, da von den Seiten das Gas im Verhältniss zur Electricitätsbewegung nur langsam zuströmt. So vermag sich an der Stelle, wo die Entladung begonnen, nun auch noch die aus dem Innern der Inductionsrolle den Electroden zuströmende Electricität zum Theil auszugleichen, selbst wenn sie die Electroden nicht mehr bis zur ersten Dichtigkeit zu laden vermag. Auf diese Weise kann die Entladung des Inductoriums eine kürzere oder längere Zeit andauern. Je nach der Schnelligkeit, mit der die electrische Dichtigkeit auf den Electroden abnimmt, ist die durch den Entladungsapparat hindurchgehende Electricitätsmenge kleiner oder grösser, indem auch durch das Zuströmen der

seitlichen dichteren Luft allmählich die Entladung gehemmt wird. Ist die electrische Dichtigkeit auf eine bestimmte Grösse gesunken, so hört die Entladung auf und der Rest der Electricitäten gleicht sich rückwärts durch die Inductionsrolle selbst aus. Die Beschaffenheit der letzteren, die Einschaltung von Widerständen zwischen ihre Enden und den Entladungsapparat, welche bei mässiger Grösse, wenn auch nicht die gesammte, den Electroden desselben zugeführte Electricitätsmenge vermindern, wohl aber die Zeitdauer ihrer Anhäufung vergrössern kann; die Vergrösserung der Oberfläche der Zuleitungen z. B. durch Verbindung mit Condensatorplatten u. s. f. kann also die durch den Entladungsapparat selbst hindurchgehende Electricitätsmenge wesentlich beeinflussen.

Schaltet man in den Schliessungskreis des Entladungsapparates oder in eine Zweigleitung zu demselben ein Galvanometer ein, so misst der Ausschlag desselben direct oder indirect die durch den Entladungsapparat hindurchgegangene, also die seinen Electroden zugeströmte, weniger der zum Inductorium zurückgeströmten Electricitätsmenge. Verbindet man die Electroden direct und beobachtet wieder den Galvanometerausschlag oder ersetzt den Entladungsapparat durch einen Rheostatendraht, bis der Ausschlag der frühere ist, so findet das Zurückströmen (abgesehen von dem Auftreten alternirender Entladungen) nicht statt. Während im ersten Versuch die electrostatischen Verhältnisse, welche der Entladung vorhergehen, auf die durch letztere fortgeführte Electricitätsmenge einen Einfluss haben, ist letzterer Versuch nur von der Fortführung der bewegten Electricitäten selbst bedingt. Beide Versuche sind demnach unter ganz verschiedenen Bedingungen angestellt. Durch die Vergleichung ihrer Resultate lässt sich also der Leitungswiderstand des Entladungsapparates nicht bestimmen. [1]) Ebenso wenig kann dieser Zweck erreicht werden, wenn man z. B. von zwei Punkten der Zuleitung zum Entladungsapparat den Strom zum Galvanometer abzweigt und durch Veränderung des Abstandes der Ableitungspunkte unter den verschiedenen Verhältnissen den Ausschlag des Galvanometers stets auf die gleiche Grösse bringt.[2])

Wir werden hienach zu untersuchen haben, in welchen

1) *Morren*, vgl. Galvanismus (2) Bd. II § 951.

2) *A. de la Rive*, vgl. Galvanismus (2) Bd. II § 952, 953.

Beziehungen die bisher über den Widerstand der einzelnen Theile der Entladung erzielten Resultate mit den oben festgestellten Bedingungen der Entladungen stehen, und wenden uns dabei namentlich wiederum den schönen Beobachtungen von *Hittorf*[1]) zu, von denen wir die einfachsten herauswählen.

a) Widerstand der positiven Entladung. Werden an einer Glaskugel, welche die negative Electrode enthält, nacheinander zwei verschieden lange Glasröhren angeblasen, an deren Enden sich zwei gleiche Drähte als positive Electroden befinden, und leitet man die Inductionsströme erst durch das lange Rohr, dann in gleicher Weise durch das kürzere Rohr, so erscheint im letzteren Falle die Stromintensität grösser, da in Folge der grösseren Wechselwirkung der einander näheren Electroden eine kleinere Electricitätsmenge zur Erzeugung der zur Entladung erforderlichen Spannung genügt. Die Entladung beginnt früher und dauert länger an. Verzögert man aber durch Einschaltung, z. B. eines Capillarrohres mit Zinkvitriollösung, den Zufluss der Electricität im letzteren Falle, so hört die Entladung wiederum früher auf und man kann dieselbe Stromintensität erzielen, wie bei Anwendung der Electrode im langen Rohr. Indess entspricht aus den oben angeführten Gründen der Widerstand der Lösung im Capillarrohr nicht direct der Differenz der Widerstände der positiven Entladungsräume in beiden Fällen.

Bei zunehmender Verdünnung des Gases entladet sich bei diesem Versuch das Inductorium durch den Gasraum bis zum Zurückbleiben kleinerer Spannungen, als bei stärkeren Drucken; die zwischen den entfernteren und den näheren Electroden übergehenden Electricitätsmengen werden mehr und mehr einander gleich; die Verzögerung des Zuströmens der Electricität bei den einander näher stehenden Electroden braucht geringer zu sein, um eine völlige Gleichheit derselben herzustellen. Die Erscheinung ist also äusserlich dieselbe, wie wenn der Widerstand der positiven Entladung abnähme. Ebenso werden bei grösseren Stromintensitäten, also bei grösserer electromotorischer Kraft des inducirten Stromes, etwa bei Anwendung stärkerer inducirender Ströme u. s. f., auch bei schnellerer Unterbrechung der letzteren, die den Electroden von Anfang an zuströmenden Electricitäts-

1) *Hittorf*, vgl. Galvanismus (2) Bd. II § 958.

mengen grösser, die nach der Entladung zum Inductorium zurückströmenden Electricitäten sind im Verhältniss zur gesammten, durch die Induction gelieferten Menge kleiner, und der Widerstand der positiven Entladung erscheint bei der Messung, wie bei den so eben erwähnten Versuchen, geringer zu sein.

b) Verhältniss der Widerstände an beiden Electroden. Verzweigt man nach *Hittorf* den Strom zwischen zwei gleich weiten Röhren, in denen die einander gleichen Electroden sehr verschiedene Abstände von einander besitzen, so nähert sich das Verhältniss der Intensitäten in beiden Zweigen mit wachsender Verdünnung bald der Einheit. Da hiebei die Länge der positiven Entladung verschieden ist, schliesst *Hittorf*, dass der Widerstand der ersteren gegen den Widerstand in der Umgebung der negativen Electrode klein ist. Nach den im Anfang dieser Abhandlung mitgetheilten Versuchen wird indess, da bei grösseren Verdünnungen die zum Beginn der Entladungen erforderlichen Ladungen der Electroden klein werden, hiebei die Wechselwirkung der Electricitäten der Electroden aufeinander immer mehr abnehmen und somit die Entladung mehr und mehr nur noch von der Umgebung der Electroden selbst abhängen. Dann entladen sich in den verschieden langen Röhren nahezu gleiche Electricitätsmengen.

c) Widerstand an der negativen Electrode. Wollte man indess annehmen, dass der vermeintliche Widerstand der positiven Entladung gegen den der negativen unter gewissen Bedingungen klein ist, so könnte man durch Messung des Widerstandes von Entladungsapparaten mit verschiedenen negativen Electroden den supponirten Widerstand des Glimmlichtes bestimmen.

4) Einfluss der Grösse der Electroden. Werden zwei gleiche Röhren mit gleich langen positiven, aber ungleich langen, gleich dicken negativen Drahtelectroden nebeneinander in den Schliessungskreis des Inductoriums eingefügt, so ist, wenn beide bei grösserer Luftverdünnung ganz mit Glimmlicht bedeckt sind, nach *Hittorf* (l. c.) die Intensität in beiden Zweigen, abgesehen von der Wirkung der positiven Electrode u. s. f., nahezu proportional den Längen der negativen Electroden. In der That, liefert der Inductionsstrom eine so grosse Electricitätsmenge, dass die freien Stellen beider Electroden vollständig die, überall wesentlich gleiche, zu einer Entladung erforderliche

Spannung erhalten, sich also bei der Entladung unter wesentlich gleichen Bedingungen befinden, so müssen die von allen ihren Stellen entladenen Electricitätsmengen caet. par. ihren Oberflächen proportional sein (vgl. S. 16). Das Endresultat ist also ganz dasselbe, wie wenn man annähme, die Widerstände der Entladungsröhren wären den Oberflächen ihrer negativen Electroden nahezu umgekehrt proportional (abgesehen von den von *Hittorf* angegebenen Nebenumständen, dem Einfluss der positiven Electrode und der grösseren Abkühlung des Gases an einer sehr kleinen negativen Electrode, während hiebei nach unseren Erklärungen das fortgetriebene Gas schneller ersetzt wird, also der Durchgang der der ersten Entladung folgenden Electricitätsmengen früher aufhört und der Widerstand relativ zu gross erscheint).

Dass sich dasselbe Verhalten nicht ergiebt, wenn die Entladungsröhren einzeln in den Inductionskreis eingeschaltet und die Stromintensität gemessen wird, dürfte darin liegen, dass bei gleicher Electricitätszufuhr die kürzere Electrode eher die zu einer Entladung erforderliche Spannung erhält, als die längere, somit auch die Entladung eher beginnt. Demnach sind die Electricitätsmengen, welche die eine oder andere Röhre durchfliessen, nicht mehr so bedeutend von einander verschieden, als vorher. Werden die Stromintensitäten durch Einfügung von Röhren voll Zinkvitriol an Stelle der Entladungsröhren auf die gleiche Grösse gebracht, so sind wiederum die Bedingungen ganz andere, wie bei Einschaltung der Entladungsröhren, und eine directe Vergleichung der Widerstände kann event. andere Werthe ergeben, als die oben erwähnten Versuche.

2) Einfluss der umgebenden Räume. Sind die die negativen Electroden umgebenden Räume nicht einander ähnlich, so sind an den einzelnen Stellen der ersteren verschiedene Spannungen erforderlich, um die Entladung einzuleiten. Bei verschieden dicken aber gleich langen cylindrischen Electroden z. B., welche in gleich weite Glashüllen eingeschlossen sind, bedarf die dickere hiezu einer grösseren Ladung, da einmal die abstossende Rückwirkung der gleichnamigen Entladung der Glashülle auf die Electricität der Oberfläche der Electrode grösser ist und die Electrode selbst wegen ihrer grösseren Oberfläche einer grösseren Electricitätsmenge zur Ladung auf eine gleiche Spannung an allen Stellen bedarf. Bei einfacher Verbindung mit der *Holtz*'schen Maschine würde also, wenn man die Poten-

tiale an allen Stellen jeder Electrode als gleich annehmen kann, die *n*fache dickere Electrode bei jeder Entladung mehr als die *n*fache Electricitätsmenge aufnehmen und entladen. Sind aber die die beiden ungleichen negativen Electroden enthaltenden Röhren nebeneinander in die Schliessung des Inductoriums eingefügt, so sind die Verhältnisse viel complicirter und nicht so leicht zu übersehen, als in dem oben beschriebenen Fall. In Folge der Grössen der Oberflächen würde sich der Strom im Verhältniss derselben theilen; in Folge der zur Entladung erforderlichen grösseren Dichtigkeit der Electricität auf der dickeren Electrode würde die Entladung an der *n*mal dickeren Electrode später beginnen und eher aufhören, also durch letztere eine kleinere als die *n*fache Electricitätsmenge entladen werden, wenn überhaupt nicht vorher alle Electricität durch die dünnere Electrode abfliesst und wir voraussetzen, dass die Electricität den Electroden vom Inductorium aus mit so grosser Geschwindigkeit zugeführt wird, dass ein Rückströmen der der dickeren Electrode zugeführten Electricität zu der dünneren während der Entladung nicht eintritt. Indess kann wiederum in Folge der grösseren Ladung auf der dickeren Electrode das Gas stärker von der Electrode fortgetrieben werden, wodurch der ersten Entladung eine grössere Electricitätsmenge folgen würde, vorausgesetzt, dass hinlänglich Gas vorhanden ist, um dieselbe fortzuführen.

3) Einfluss des Druckes. Noch complicirter gestalten sich in Folge der letzteren Bedingungen die Entladungen in zwei parallel gestellten, gleichen Entladungsröhren, in denen dasselbe Gas auf verschiedenen Druck gebracht ist. Nach unseren Versuchen würde die Röhre mit dem dichteren Gase (*I*) einer grösseren Ladung zum Beginn der Entladung bedürfen, also in Folge dessen die Entladung darin später beginnen und eher aufhören, daher eine geringere Elasticitätsmenge hindurchgehen, als durch die Röhre (*II*) mit dem dünnen Gase, vorausgesetzt, dass beiden Röhren nebeneinander die Electricität vom Inductorium ganz gleichmässig zuströmte. Da aber im Rohre (*I*) die Entladung mit einer grösseren Anfangsgeschwindigkeit beginnt, könnte umgekehrt in Folge der grösseren Luftverdünnung an der Electrode mehr Electricität der zuerst entladenen folgen, als im Rohre *II*. In wieweit diese verschiedenen Bedingungen sich gegenseitig compensiren, ist ohne Weiteres nicht zu über-

sehen. — Ist ferner die Spannung der Electricität zu gering, um das dichtere Gas zu durchbrechen, so kann alle Electricität von den Electroden des Rohres *I* zu denen der Röhre *II*, event. zum Inductorium zurückströmen, also gar keine Entladung durch das dichtere Gas eintreten. — Ist dagegen das Gas in Röhre *II* so stark verdünnt, dass es zur Fortführung der Electricität nicht mehr genügt, so kann wohl auch die Entladung allein durch die Röhre *I* mit dem dichteren Gase hindurchgehen.

Wird ein Entladungsapparat mit einer constanten Säule verbunden, so können verschiedene Verhältnisse eintreten. Ist die electromotorische Kraft an den Polen der Säule zu gering, um den damit verbundenen Electroden des Apparates die zu dem Beginn einer Entladung erforderliche Spannung zu ertheilen, so isolirt derselbe. Ist die electromotorische Kraft gleich oder grösser, als jener Bedingung genügt, so erfolgen Entladungen, die je nach der Menge der an den Polen aufgehäuften Electricitäten und der Schnelligkeit der Zufuhr der Electricitäten von der Säule aus kürzere oder längere Zeit andauern können. Der weitere Verlauf hängt dann von Leitungsfähigkeit der Substanzen ab, aus denen die Säule besteht. Ist dieselbe nur gering, fällt also bei der Entladung die Spannung an den Electroden so weit ab, dass die Säule inzwischen die zur Fortdauer der Entladung nöthige Spannung nicht dauernd liefern kann; bedarf es mithin nach jeder Entladung längere Zeit, um die Spannung an den Polen wieder herzustellen, so erfolgen einzelne intermittirende Entladungen. Ist die Leitungsfähigkeit der Säule relativ gross, und wird die Spannung so schnell wieder erneuert, dass in der Zeit nach der ersten Entladung bis zur neuen Ladung sich noch nicht der frühere Zustand des durch die Entladung an den Electroden verdünnten Gases wieder hergestellt hat, so schliesst sich der ersten Entladung unmittelbar die zweite u. s. f. zu einem continuirlichen Strom an, eventuell unter Theilnahme des Stoffs der Electroden. Von den gewöhnlichen galvanischen Strömen unterscheidet sich dieser Strom aber wiederum dadurch, dass er wesentlich von dem Antrieb abhängt, den die den Electroden

zunächst liegenden Theile des Gases durch die zugeführten Electricitäten erfahren. Die Ausgleichung der letzteren erfolgt wie bei Anwendung der Electrisirmaschine, unter Mitführung der bewegten Gastheile von den Electroden an. Dann ist, wie bei den am Anfang dieser Arbeit erwähnten Versuchen der »Widerstand der Entladung«, oder die in der Zeiteinheit entladene Electricitätsmenge wesentlich von dem Abstand der Electroden unabhängig, abgesehen von den Nebenumständen, der geringeren Wechselwirkung der Electricität der Electroden bei grösseren Abständen u. s. f. Dieses Resultat hat *Herwig*[1]) für den Durchgang der Electricität durch Quecksilberdampf zwischen Quecksilberelectroden im Wesentlichen bestätigt. Auch der galvanische Lichtbogen zwischen Kohlen- oder Metallelectroden dürfte ein Beispiel dieser Entladungsart bieten. Auch bei ihm ist durch den rotirenden Spiegel keine Discontinuität wahrzunehmen; auch hier geschieht die Fortführung der Electricität unter gleichzeitiger Fortführung der mit ihr geladenen Theilchen der Electroden, die dabei wesentlich in Gasform übergeben, wie sich aus dem Spectrum des Lichtbogens ersehen lässt. Ganz analog, wie bei den übrigen Gasentladungen, ist daher der supponirte Widerstand des Lichtbogens von seiner Länge nur zum kleineren Theile abhängig. Es nimmt ferner mit der Quantität der in der Zeiteinheit durch ihn hindurchgegangenen Electricität ab,[2]) da dadurch die Electroden stärker erhitzt werden und somit eine relativ stärkere Vergasung derselben und Fortführung der Electricität vermittelt wird.

Auch der Bildung des Lichtbogens muss eine relativ starke Spannung der Electricität an den Electroden, sei es durch Annäherung derselben oder durch einen hindurchgeleiteten electrischen Schlag vorangehen, damit die Fortführung der Stoffe von den Electroden eingeleitet wird, worauf dann die geringere Spannung der Säule genügt, den Electricitätsstrom dauernd zu erhalten.

Einen Widerstand im gewöhnlichen «galvanischen» Sinne dürfte indess diese Entladungsart nicht bieten. Die durch dieselbe fortgeführte Electricitätsmenge wird vielmehr von den verschiedensten Umständen abhängen; von dem Medium zwischen den Electroden, also auch von der Leichtigkeit, mit der Theile

1) *Herwig, Pogg.* Ann. Bd. CLIII. S. CLI. S. 350.

2) *Edlund*, vgl. Galvanismus (2) Bd. I § 716.

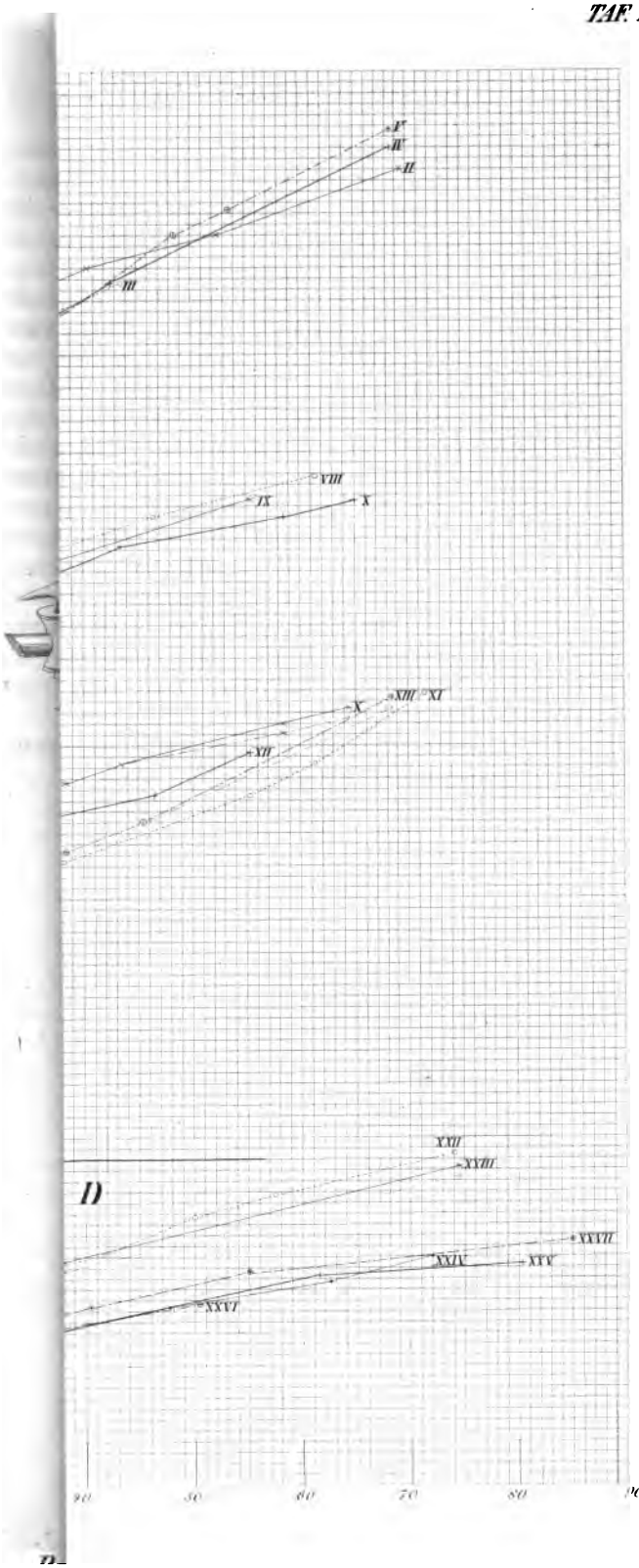
der Electroden in fester oder Gasform fortgeschleudert werden, von der Gestalt der Electroden, der Stromstärke, also auch der Menge und Temperatur der von den Electroden dem Zwischenraume zugeführten Theilchen u. s. f. Diese Bedingungen werden in vieler Beziehung die analogen, wenn auch complicirter sein, wie bei den Einzelentladungen der Electrisirmaschine.

Sehr leicht kann es hiebei geschehen, dass zwischen den Electroden durch die Verbindung mit den Polen einer constanten Säule zuerst discontinuirliche Gasentladungen, vielleicht unter geringer Theilnahme des Stoffes der Electroden stattfinden. Wenn aber dadurch die zwischen den Electroden liegende Schicht erhitzt, verdünnt, event. mit den Theilchen der Electroden erfüllt ist, so kann, wenn die Säule die Electricitäten in genügender Menge zuführt, in dem so geänderten Zwischenraum eine continuirliche (Lichtbogen-) Entladung statt der discontinuirlichen eintreten, wobei zugleich mit Aenderung der Entladungsart eine Aenderung der Erwärmung der Electroden eintritt. Eine solche Erscheinung ist von *Gassiot*[1]) bei Entladung einer 400-paarigen *Grove*'schen Säule zwischen Metall- oder Coakskugeln beobachtet worden.

Ich hoffe, demnächst einige weitere Mittheilungen über diese Gegenstände machen zu können.

---

1) *Gassiot* Galvanismus (2) II § 1044.


I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII
XIII
XIV
XV
XVI
XVII
XVIII
XIX
XX
XXI
XXII
XXIII
XXIV
XXV
XXVI
XXVII
D
90
80
70
60
50
40

F. Zöllner, *Ueber die physikalischen Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrodynamischen Erscheinungen.*

Bereits vor längerer Zeit (Sitzung v. 19. Dec. 1874) hatte ich mir erlaubt, der Kgl. Gesellschaft d. W. eine Reihe von Versuchen mitzutheilen, welche den Zweck hatten, im Anschluss an meine früheren Untersuchungen »über die durch strömendes Wasser erzeugten elektrischen Ströme«[1]) den Zusammenhang nachzuweisen, welcher zwischen dieser, zuerst von *Quincke* bei den Diaphragmenströmen entdeckten, Classe von Erscheinungen und gewissen strömenden Bewegungen der Elektricität bei der gleitenden Reibung zweier heterogenen festen Körper besteht. Meine hierauf bezüglichen Bemühungen führten mich auf eine weitere Reihe von theilweise sehr zeitraubenden Versuchen, welche mich nöthigten, meine Arbeit vorläufig abzuschliessen und die weitere Ausführung der im 2. Theile dieser Abhandlung angestellten theoretischen Betrachtungen einer späteren Arbeit vorzubehalten. Ich erlaube mir daher im ersten Theile der vorliegenden Abhandlung im Wesentlichen die Resultate einer Experimentaluntersuchung mitzutheilen, bei welcher ich bestrebt war, zunächst *empirisch* den inneren Zusammenhang nachzuweisen, welcher zwischen den von *Quincke* und mir beobachteten elektrischen Strömen mit einer gewissen Classe, meines Wissens bisher noch nicht beobachteter, elektrischer Ströme besteht, die sich gesetzmässig bei der gleitenden Reibung zweier heterogenen festen Körper entwickeln. Mit Berücksichtigung des gleichfalls empirisch gefundenen Reciprocitätsphänomenes der Fortschiebung materieller Theile durch den elektrischen Strom hat sich schliesslich als allgemeines Resultat der folgende Satz ergeben:

---

1) Berichte d. Kgl. Sächs. Gesellschaft d. W. Sitzung v. 12. Dec. 1874.

Bei der gleitenden Reibung zweier Körper entwickeln sich an der Berührungsfläche elektromotorische Kräfte von solcher Beschaffenheit, dass dieselben unter geeigneten Bedingungen einen elektrischen Strom erzeugen, welcher bestrebt ist, die beiden Körper in entgegengesetzter Richtung ihrer relativen Bewegung zu verschieben.

Die Analogie, welche dieser Satz bezüglich der elektrodynamischen Wechselwirkung eines geschlossenen Stromkreises auf einen bewegten Leiter darbietet, bei deren relativer Bewegung bekanntlich durch Induction gleichfalls elektromotorische Kräfte von solcher Beschaffenheit entwickelt werden, dass der durch sie erzeugte elektrische Strom bestrebt ist, eine relative Bewegung der Leiter im entgegengesetzten Sinne hervorzurufen, führte mich auf eine ganze Reihe solcher, zum Theil überraschender, Analogien. Dieselben ergaben bei genauerer Untersuchung nicht nur *qualitative* Beziehungen dieser scheinbar so heterogenen Gebiete von Erscheinungen, sondern gestatteten auch *quantitative* Beziehungen abzuleiten, welche durch die Erfahrung bestätigt werden. Ueberträgt man diese Betrachtungen auf die Molecularverhältnisse der Körper, so ergiebt sich, abgesehen von dem bereits erwähnten, noch ein einfacher Zusammenhang zwischen dem elektrischen Leitungsvermögen und der Reibungsconstante der Körper. Da ein solcher Zusammenhang auch längst durch Versuche über Capillaritätsphänomene empirisch nachgewiesen ist und gleichzeitig in neuester Zeit durch Untersuchungen von *Kohlrausch* und *Grotrian* noch in mannigfachen anderen Verhältnissen zu Tage tritt, so hielt ich mich für berechtigt, im zweiten Theile der vorliegenden Experimentaluntersuchung einige theoretische Consequenzen dieser elektrodynamischen Theorie der Molecularkräfte vorläufig anzudeuten und mit bekannten Thatsachen der Erfahrung zu vergleichen.

Erster Theil.

1.

Die Bedingungen, unter denen zwei verschiedenartige Körper durch gegenseitige Reibung elektrisch werden, sind vielfach

zum Gegenstande eingehender, zum Theil sehr umfangreicher Untersuchungen gemacht worden.[1]) Im Wesentlichen handelte es sich jedoch hierbei nur um Ermittelung derjenigen Verhältnisse, von denen die *Quantität* und *Qualität* der erregten Elektricität an der Oberfläche der beiden Körper abhängt. Dagegen sind die Vorgänge, durch welche sich das gestörte elektrische Gleichgewicht im Innern oder an der Oberfläche der geriebenen Körper wieder herstellt, d. h. also die *strömenden Bewegungen* der Elektricität, so weit mir bekannt, bei der gleitenden Reibung noch nicht genauer erforscht worden.[2])

Als Resultat der hierauf bezüglichen und sogleich näher zu beschreibenden Versuche hat sich allgemein folgende Thatsache ergeben:

Werden zwei verschiedene Körper, von denen der eine ein Isolator (Dielectricum) der andere ein sogenannter Halbleiter (Reibzeug) ist, mittelst gleitender Reibung gegeneinander verschoben, so entstehen in dem Halbleiter elektrische Ströme, deren Richtung von der Natur und Bewegung des Isolators in folgender Weise abhängt:

Wird der geriebene Isolator positiv elektrisch, so entstehen an der Berührungsfläche oder im Innern des Reibzeuges elektrische Ströme, welche parallel aber entgegengesetzt der relativen Bewegung des Isolators sind; wird dagegen letzterer negativ elektrisch, so sind die erwähnten Ströme parallel und gleichgerichtet der relativen Bewegung des Isolators.

Das Schema auf Taf. I, Fig. 1 und 2 mag das Gesagte erläutern. Als geriebenen Isolator denke man sich im ersten Falle z. B. eine ebene Glasfläche, im zweiten z. B. eine Harzfläche; als Reibzeug in beiden Fällen z. B. ein Stück weichen Leders.

---

1) Vgl. *Peclet*, Annales de Chimie et Physique T. 57. p. 337 ff.
Riess, Die Lehre von der Reibungselektricität Bd. II. pag. 362 ff.

2) In wie weit die neuerdings bei der rollenden Reibung von *Joulin* beobachteten Erscheinungen mit den hier von mir beschriebenen ursächlich zusammenhängen, hoffe ich in einer späteren Abhandlung zu zeigen. Vgl. Recherches sur l'électricité produite dans les actions mécaniques par *L. M. Joulin*. Annales de Chim. et Phys. Mai 1874. T. II (5. Ser.) p. 5 — p. 76.

Werden nun die Isolatoren in der durch die grossen Pfeile angedeuteten Richtung relativ zum Reibzeug bewegt, so entstehen in letzterem elektrische Ströme, deren Richtung durch die kleinen Pfeile und die Vorzeichen der an den Enden des Reibzeuges auftretenden freien Elektricität angedeutet ist.

Am einfachsten lässt sich diese Thatsache durch folgende Versuche nachweisen. Fig. I Taf. 3 stellt eine cylindrische Glaswalze einer gewöhnlichen Elektrisirmaschine dar, bei welcher das Reibzeug und die Conductoren entfernt sind. Dieselbe ist mittelst einer Curbel um eine horizontale Axe drehbar und an ihrer Oberfläche zur einen Hälfte durch Lack mit einer Harzschicht überzogen, ein Unterschied, der auf der Zeichnung angedeutet ist, indem die lackirte Seite schattirt ist. Als Reibzeug benutzte ich weiches Schaafleder, welches auf ein rechteckiges Stück (40 Mm. lang, 25 Mm. breit) Gummi elasticum (wie dasselbe im Handel zum Ausreiben von Bleistiftstrichen vorkommt) aufgespannt wurde. Fig. 4 Taf. I zeigt ein solches Reibzeug in natürlicher Grösse. g ist das Gummistück, $a\,b$ das Leder; letzteres ist nur an den Seiten a und b durch Siegellack mit dem Gummi verbunden, so dass schmale Staniolstreifen s und s' zwischen Leder und Gummioberfläche eingeschoben, und zur Ableitung der elektrischen Ströme mittelst Klemmschrauben benutzt werden können, wie dies in Fig. 4 angedeutet ist.

Die Befestigung der Reibzeuge geschah mit seidenen Schnüren oder Bändern ($b\,b$ Fig. 3), welche mit Hülfe der isolirten Glasständer B und C und der an diesen angebrachten Schrauben $p\ p'$ straff gespannt werden konnten. Hierdurch wurde das Reibzeug g auf die Oberfläche der Walze gedrückt. Als Spiegel-Galvanometer G stellte mir mein verehrter Collège *Hankel* im hiesigen physikalischen Institute mit dankenswerther Bereitwilligkeit dasselbe Instrument zur Verfügung, dessen sich derselbe bei seinen Untersuchungen über Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen im Jahre 1859 bedient hatte. [1])

Dasselbe besitzt mit Anwendung der astatischen Combination die Empfindlichkeit physiologischer Galvanometer.

---

1) Abhandlungen d. math phys. Classe d. Königl. Sächs. Ges. d. W. Bd. IV. p. 255—304. In der Zeichnung ist an Stelle dieses Galvanometers das früher von mir zur Beobachtung der Flüssigkeitsströme benutzte abgebildet.

Der Abstand der Scale vom Galvanometer betrug 3.65 Meter. Die Verbindung der beiden Enden des Reibzeuges mit dem Galvanometer *G* ist aus der Zeichnung ersichtlich.

Berührt nun das Reibzeug den nicht lackirten Theil der Oberfläche der Glaswalze (wie in Fig. 3), und wird letztere, wie die Figur durch den Pfeil andeutet, von links nach rechts gedreht, so durchfliesst die Drahtleitungen ein elektrischer Strom in der durch die Pfeile bezeichneten Richtung. Wird der Sinn der Drehung umgekehrt, so kehrt sich auch die Richtung des Stromes um.

In einem bestimmten Falle stieg z. B. die Ablenkung des Galvanometers um 10 Scalentheile; beim Wechsel der Drehung verwandelte sich diese Ablenkung in die entgegengesetzte von nahezu gleicher Grösse.

Wurde nun dasselbe Reibzeug auf die andere mit Lack überzogene Hälfte der Glaswalze geschoben, so war der Process derselbe, nur mit dem Unterschiede, dass denselben Drehungsrichtungen der Walze Ströme von entgegengesetzter Richtung, wie im vorigen Falle, entsprachen. — In einem bestimmten Falle stieg z. B. die Ablenkung des Galvanometers auf 18 Scalentheile, welche sich beim Wechsel der Drehung in nahezu den gleichen Betrag von entgegengesetztem Sinne verwandelte.

Die Intensität dieser Ströme scheint im Wesentlichen von denselben Bedingungen abzuhängen, an welche die Stärke der elektrischen Erregung bei der Reibung der Körper geknüpft ist.

Wird z. B. der Lederüberzug des oben beschriebenen Reibzeuges, wenn es die Glasoberfläche berührt, mit Amalgam für Elektrisirmaschinen präparirt, so steigt die Stärke dieser Ströme ganz ausserordentlich; man sieht dann nicht selten das Bild der ganzen, 0.75 Meter langen Scala durch wenige Umdrehungen der Walze, je nach der Richtung der Drehung, nach der einen oder anderen Seite aus dem Gesichtsfelde wandern. Es mag hier eine Versuchsreihe mitgetheilt werden, bei welcher die Ablesungen des Galvanometers nach 10maliger Umdrehung der Walze stattfanden. Die Ablenkungen waren hierbei also noch nicht stationär, sondern würden sich bei weiter fortgesetzter Umdrehung der Walze noch beträchtlich vergrössert haben.

Versuchsreihe 1.

1874. Dec. 4.

Abstand der Scala 3.65 Meter.

Reibzeug: Amalgamirtes Leder. Oberfläche: Glas.

Zahl der Umdrehungen: 10.

Ablenkung des Galvanometers von der Ruhelage:

Drehung rechts:	Drehung links:
— 67	+ 48
— 70	+ 64
— 69	+ 59
— 75	+ 59
— 78	+ 64
Mittel: — 69,9	Mittel: + 56,6

2.

Dass mit Anwendung einer Elektrisirmaschine elektrische Ströme und hierdurch Ablenkungen eines geeigneten Multiplicators erzeugt werden können, ist eine längst bekannte Thatsache. Aber die Richtung der hierbei auftretenden Ströme hängt wesentlich nur davon ab, welcher der beiden Drähte des Multiplicators mit dem Reibzeuge und welcher mit dem Conductor der Elektrisirmaschine verbunden wird. Die Drehungsrichtung der Walze oder Scheibe ist hierbei selbstverständlich ohne Einfluss auf die Richtung der entwickelten Ströme. Letztere verdanken vielmehr lediglich der Ausgleichung der an den Oberflächen des Reibzeuges und des Isolators geschiedenen Elektricitäten ihren Ursprung. Bei den oben beschriebenen Versuchen jedoch entstehen die beobachteten Ströme durch eine Ausgleichung von Elektricitätsmengen, welche sich an den beiden Enden des Reibzeuges ansammeln, und mit der Umkehr der Drehungsrichtung der Walze oder Scheibe ihr Vorzeichen ändern. [1])

1) Ich erlaube mir bei dieser Gelegenheit auf die höchst merkwürdigen Beobachtungen von *Poggendorff* an der *Holtz*'schen Maschine aufmerksam zu machen, bei denen sich unter ganz anderen Verhältnissen gleichfalls ein Einfluss der Drehungsrichtung auf die Richtung eines durch statische Elektricitätserregung erzeugten Stromes herausstellt. In der Sitzung der Königl. Akademie d. W. zu Berlin

Es ist für eine angenäherte Vergleichung der Elektricitätsmengen, welche sich bei den Strömen der ersten Gattung und denen der zweiten ausgleichen, nicht ohne Interesse, unter möglichst gleichen Umständen die relative Stärke dieser beiden Ströme zu vergleichen. Man erhält hierdurch gleichzeitig näherungsweise eine Vorstellung von den im Reibzeug ungenutzt sich ausgleichenden Elektricitätsmengen und den in den Conductoren als freie Elektricität auftretenden Quantitäten.

Zur Ermittelung des erwähnten Verhältnisses stellte ich folgende Versuche an:

Fig. 2, Taf. II zeigt den oberen Theil der Glaswalze, mit dem durch ein seidenes Band *b b* darüber befestigten Reibzeuge. Die kleinen Klemmschrauben *r* und *r'* stehen in der oben beschriebenen Weise mit den beiden Enden des Reibzeuges in Verbindung; *c c'* sind zwei Klemmschrauben, welche mit zwei dünnen, aus Kupferblech verfertigten Aufsaugern der Elektricität in Verbindung stehen; dieselben sind mit spitzen Zähnen versehen, welche, ohne das Reibzeug zu berühren, in der geringen Entfernung von 1—2 Mm. von seinen Enden leicht auf der Glaswalze aufliegen. Da die Oberfläche des Glases durch Reibung mit amalgamirtem Leder positiv elektrisch wird, so werden diese beiden Kupferbleche positive Elektricität aufsaugen und zwar, wie leicht ersichtlich, dasjenige Blech am Meisten, welches sich an derjenigen Seite befindet, wo während der Drehung die Glasoberfläche gerade das Reibzeug verlässt, d. h. also, bei der bezeichneten Drehungsrichtung, das Kupferblech *k'*. Verbindet man nun die beiden Klemmschrauben *r* und *r'* metallisch mit einander, (Fig. 1) so gleichen sich die an den beiden Enden des Reib-

---

vom 18. Januar 1875 theilte *Poggendorff* »Fernere Thatsachen zur Begründung einer endgültigen Theorie der Elektromaschine zweiter Art« mit. Am Schlusse dieser Abhandlung p. 70 wird wörtlich Folgendes bemerkt:

> »Ich glaube übrigens die Bedeutung der hier beschriebenen Erscheinungen nicht zu überschätzen, wenn ich ihnen einige Wichtigkeit beilege, schon deshalb, weil meines Wissens, bei der sogenannten statischen Elektricität noch niemals ein Vorgang beobachtet worden ist, bei welchem in der Weise wie hier die Richtung eine Rolle gespielt hätte.«

Ich glaube, dass die oben von mir beschriebenen Erscheinungen solche Vorgänge sind, die vielleicht bei einer dereinst vollendeten Theorie nicht nur äusserlich eine gewisse Analogie darbieten, sondern auch ursächlich auf ein gemeinsames Princip zurückführbar sein dürften

zeuges entstehenden entgegengesetzten Elektricitätsmengen durch diese Verbindung aus. Ausserdem aber wird das isolirte Reibzeug eine gewisse Quantität freier negativer Elektricität an seiner Oberfläche besitzen; verbindet man dasselbe, wie in der Zeichnung (Fig. 1) angedeutet, mit dem einen Drahte des Multiplicators, und das Kupferblech k' mit dem anderen Drahte, so fliesst durch die Windungen des Multiplicators ein elektrischer Strom in der durch Pfeile angedeuteten Richtung. Wird die Drehungsrichtung der Glaswalze umgekehrt, so muss die Verbindung des Multiplicators mit dem anderen Kupferblech hergestellt werden. Dieser Wechsel der Verbindungen ist bei den folgenden Versuchen, als selbstverständlich, nicht besonders hervorgehoben.

Es ist klar, dass hierdurch nicht die Richtung des Stromes geändert wird, wenn, wie bei den folgenden Versuchen, der mit dem Reibzeug verbundene Zuleitungsdraht stets in derselben Verbindung bleibt. Die Stärke der auf diese Weise entwickelten Ströme wird im Allgemeinen proportional den Elektricitätsmengen sein, welche durch eine bestimmte Zahl von Umdrehungen der Walze erzeugt werden. Man kann daher die hierbei sich ausgleichenden Elektricitätsmengen näherungsweise sehr leicht mit den bei den früheren Versuchen an den beiden Enden des Reibzeuges auftretenden Elektricitätsmengen vergleichen, wenn man die metallische Verbindung zwischen r und r' aufhebt, und jede dieser beiden Klemmschrauben, wie früher, mit einem der beiden Zuleitungsdrähte des Galvanometers verbindet. (Fig. 2) Natürlich wechselt dann wieder die Richtung des Stromes mit der Umdrehungsrichtung der Walze.

Bei der folgenden Versuchsreihe (Fig. 1) wurde die Walze, wie früher, 10mal möglichst gleichförmig herumbewegt, und hierauf die Ablenkung des Galvanometers abgelesen. Dann wurde der vorher mit c' verbundene Draht mit c verbunden und wiederum nach 10 entgegengesetzten Umdrehungen die Ablenkung beobachtet. Nach diesen beiden Beobachtungen, bei denen die Drähte des Galvanometers (bei metallischer Verbindung der beiden Enden des Reibzeuges) den zwischen Reibzeug und Conductor entwickelten Strom leiteten, wurde die Verbindung Fig. 2 hergestellt. Nach je 10 Umdrehungen der Walze nach rechts und links wurde wieder die Ablenkung des Galvanometers notirt. In der folgenden Uebersicht ist die Art der Verbindung (Fig. 1 Taf. II) (Reibzeug mit Conductor) als »Verbindung I«,

die zweite (Fig. 2) (Enden des Reibzeuges) als »Verbindung II« bezeichnet. Als genähertes Maass für die bei einem der angedeuteten Doppelversuche entwickelte und ausgeglichene Elektricitätsmenge habe ich die absolute Summe der bei beiden Drehungen der Walze (rechts und links) beobachteten Ablenkungen angesetzt. Diese Summen sind für die Verbindung I unter S_I und für Verbindung II unter S_{II} aufgeführt.

Das Verhältniss $\frac{S_I}{S_{II}}$ giebt dann näherungsweise eine Vorstellung von dem Verhältniss der zwischen Reibzeug und Conductor und der im Reibzeug selber sich ausgleichenden Elektricitätsmengen. Die Gleichgewichtslage des Multiplicators war bei allen folgenden Versuchen 700. Es sind nur die Ablenkungen von dieser Lage angegeben.

Versuchsreihe 2.

1874. Dec. 5.

Abstand der Scala: 3,65 M. Zahl der Umdrehungen: 10.

Verbindung I.				Verbindung II.				
No. d. Vers.	Drehung rechts	Drehung links	S_I	No. d. Vers.	Drehung rechts	Drehung links	S_{II}	$\frac{S_I}{S_{II}}$
1	+ 87	+ 112	199	2	− 44	+ 46	90	2,21
3	+ 104	+ 102	206	4	− 71	+ 42	113	1,82
5	+ 121	+ 126	247	6	− 69	+ 51	120	2,06
7	+ 87	+ 119	206	8	− 57	+ 43	100	2,06
9	+ 88	+ 124	212	10	− 70	+ 64	134	1,62
11	+ 99	+ 115	214	12	− 69	+ 59	128	1,67
13	+ 96	+ 122	218	14	− 75	+ 59	134	1,63
15	+ 112	+ 119	231	16	− 78	+ 61	139	1,66
			216,6 ± 3,7				119,4 ± 4,1	1,84

Aus diesen Versuchen ergiebt sich das bemerkenswerthe Resultat, dass die Quantität von Elektricität, welche sich durch einen elektrischen Strom im Reibzeug selber ausgleicht, und daher als Nutzeffect für die Elektrisirmaschine verloren geht, bei den von mir benutzten Apparaten eine sehr beträchtliche war. Denn die zwischen Reibzeug und Conductor übergehende Elektricitätsmenge war nur ungefähr 1.84mal grösser als diejenige Elektricitätsmenge, welche zwischen den Enden

des Reibzeugs allein überging. Oder mit andern Worten, es betrug diese im Reibzeug ohne Nutzeffect sich ausgleichende Elektricitätsmenge ungefähr 55 Procent von derjenigen, welche bei einer metallischen Verbindung zwischen Reibzeug und Conductor einen Strom zu erzeugen im Stande ist.

Wenn es sich daher bei einer Reibungselektrisirmaschine darum handelt, eine möglichst grosse Quantität der überhaupt disponiblen Elektricitätsmenge zur Erzeugung von Strömen zu benutzen, so liegt der Gedanke nahe, die am positiven Ende des Reibzeuges sich ansammelnde Elektricität mit der positiven des Conductors zu vereinigen. Es konnte dies im vorliegenden Falle leicht durch Verbindung der beiden Klemmschrauben r' und c' (Fig. 3), oder bei entgegengesetzter Drehung der Walze durch Verbindung von r und c bewerkstelligt werden. Verbindet man in dieser Weise den Conductor und das mit ihm gleichnamige Ende r' des Reibzeugs mit dem einen, das andere Ende r des Reibzeugs mit dem andern Draht des Multiplicators, so wird die Grösse der hierdurch erzeugten Ablenkung ein angenähertes Maass für die sich ausgleichenden Elektricitätsmengen geben.

Ich habe diese Modification der Versuche (Fig. 3, Taf. II) ausgeführt und erlaube mir in Folgendem die Resultate mitzutheilen. Die Bedingungen waren vollkommen dieselben, wie bei den bereits angeführten Versuchen. Sie wurden unmittelbar nach Beendigung der ersteren angestellt und gestatteten daher annähernd auch eine quantitative Vergleichung der beobachteten Werthe. Auch hier wurden die Ablesungen nach je 10 Umdrehungen der Walze nach rechts und nach links gemacht, wobei selbstverständlich jedesmal der entsprechende Wechsel der Drahtverbindungen stattfand.

Bei einer Drehung der Walze von rechts nach links, wie in Fig. 3 angedeutet, war r' mit c' verbunden und c ableitend mit dem Erdboden durch die Gasleitung in Verbindung gesetzt. Bei entgegengesetzter Drehung war r mit c verbunden und c' abgeleitet.

Unter S_{m} ist die Summe der absoluten Werthe der Ablenkungen aufgeführt.

Versuchsreihe 3.

1874. Dec. 5.

Abstand der Scala: 3,65 M. Zahl der Umdrehungen: 10.

No. d. Vers.	Drehung rechts	No. d. Vers.	Drehung links	$S_{'''}$
1	— 130	2	+ 96	226
3	— 94	4	+ 108	202
5	— 115	6	+ 117	232
7	— 85	8	+ 144	229
9	— 93	10	+ 142	235
11	— 83	12	+ 132	215
13	— 86	14	+ 126	212
15	— 91	16	+ 143	234
17	— 90	18	+ 140	230
19	— 116	20	+ 139	255
			Mittel:	227,0 ± 3,1.

Vergleicht man die Mittelwerthe der Ablenkungen, welche den drei verschiedenen Verbindungen entsprechen, so erhält man:

$S_{,} = 216{,}6 \pm 3.7$ (Reibzeug und Conductor.)

$S_{''} = 119{,}4 \pm 4.1$ (Ende des Reibzeuges ohne Conductoren.)

$S_{'''} = 227{,}0 \pm 3.1$ (Ende des Reibzeuges mit Conductor.)

Man kann die dritte Verbindung ($S_{'''}$) als eine partielle Combination der beiden ersten Verbindungen auffassen. Denn es kommt zu der positiven Elektricitätsmenge, welche sich bei Verbindung $S_{''}$ an der einen Seite (r') des Reibzeugs entwickelt, noch dasjenige Quantum positiver Elektricität, welches der an dieser Seite befindliche Conductor (c') von der Glasoberfläche aufsaugt. Setzt man nun die bei Verbindung I sich ausgleichenden positiven und negativen Elektricitätsmengen, ihrem absoluten Werthe nach, als gleich voraus, d. h. nimmt man an, dass das Reibzeug (rr') dem mit ihm verbundenen Galvanometerdraht in gleicher Zeit dasselbe Quantum von negativer Elektricität zuführt, wie der Conductor (c') dem andern Draht von positiver Elektricität, so würde bei der Verbindung III die Gesammtmenge der sich ausgleichenden Elektricität gleich derjenigen bei der Verbindung II vermehrt um die Hälfte der bei Verbindung I sich ausgleichenden Elektricitätsmengen sein. Es müsste also unter der gemachten Voraussetzung die folgende Beziehung bestehen:

$$S_{'''} = S_{''} + \tfrac{1}{2} S_{,}.$$

Setzt man in dieser Gleichung für $S_,$ und $S_{,,}$ die oben gefundenen Werthe, so erhält man

$$S_{,,,} = 119.4 + \tfrac{1}{2}\,(216.6) = 227.7$$

Aus den obigen Versuchen hatte sich nun direct ergeben:

$$S_{,,,} = 227.0$$

so dass also der oben aufgestellten Gleichung fast genau durch die Beobachtungen genügt wird.

Selbstverständlich soll auf diese numerischen Beziehungen kein besonderes Gewicht gelegt werden. Indessen dürften sie ausreichend sein, um wenigstens die Vergleichbarkeit der zuletzt erhaltenen Resultate mit den ersten beiden Versuchsreihen zu beweisen, und zu zeigen, dass es sich bei den vorstehend beschriebenen „*Reibungsströmen*" um die Ausgleichung von Elektricitätsmengen handelt, welche keineswegs unbedeutend, sondern vollkommen von der Ordnung derjenigen sind, welche überhaupt nur durch Reibung an der Oberfläche zweier heterogenen Körper entwickelt werden können.

Berücksichtigt man ausserdem, dass sich im Reibzeuge (Fig. 4, Taf. I) trotz der isolirenden Eigenschaft des mit Leder überspannten Gummistückes g, doch immer noch ein Theil der an beiden Enden entwickelten Elektricität im amalgamirten Leder selber ausgleichen wird, so muss die Quantität der in den Reibungsströmen fliessenden Elektricität im Verhältniss zur statisch entwickelten Elektricität sogar noch beträchtlich grösser als bei den oben beschriebenen Versuchen sein.

3.

Fig. 4, Taf. II stellt eine Modification der erwähnten Experimente dar. Fünf Reibzeuge der beschriebenen Art und von möglichst gleicher Beschaffenheit sind durch ein isolirendes Seidenband $b\ b$ über der Glaswalze befestigt. Die gleichnamigen Pole sind unter sich metallisch durch Drähte verbunden, welche ihrerseits wie früher mit dem Multiplicator in Verbindung stehen. Jedes der einzelnen Reibzeug-Elemente war zur Untersuchung der von ihm allein entwickelten Ströme, zunächst gesondert mit dem Multiplicator verbunden. Es zeigte sich, dass 10 Umdrehungen der Walze nahezu übereinstimmend bei jedem Ele-

ment eine Ablenkung von circa 50 Scalentheilen in dem einen oder andern Sinne, je nach der Richtung der Drehung, erzeugte. Wurden nun alle 5 Elemente in der durch die Zeichnung veranschaulichten Weise mit einander verbunden, so genügten statt 10 schon 2 Umdrehungen der Walze, um nahezu dieselbe Ablenkung von 50 Scalentheilen zu erzeugen. Es geht hieraus hervor, dass unter den angegebenen Verhältnissen die Quantität der durch *eine* Umdrehung der Walze erzeugten Elektricität, welche sich in Form von Reibungsströmen ausgleicht, proportional der Anzahl der Reibzeug-Elemente gewachsen ist.

Innerhalb welcher Grenzen diese Proportionalität gültig ist, und in welcher Weise die Grösse der Reibungsfläche der einzelnen Elemente hierbei wirkt, habe ich nicht untersucht.

Es dürfte indessen auf Grund der mitgetheilten Resultate eine derartige Untersuchung, (welche ich mir erlaube der Aufmerksamkeit anderer, mehr als ich selbst nach dieser Richtung hin beschäftigten Physiker zu empfehlen,) nicht ohne Interesse für die Construction einer Elektrisirmaschine sein, bei welcher grosse Quantitäten von Elektricität mit einer geringen Spannung zur Erzeugung elektrischer Reibungsströme benutzt werden sollen, obschon ich bezweifle, dass hierdurch jemals die durch die *Holtz*'sche Elektrisirmaschine erzeugten Effecte erreicht werden können. Uebrigens bemerke ich, dass sich zwischen den Poldrähten sowohl der fünf combinirten Elemente als auch des einzelnen Elementes im Finstern ein continuirlicher Funkenstrom, unter günstigen Umständen bis zu 2 Millimetern Länge, entwickelte, dessen Gestalt in bekannter Weise jedesmal einen Stromwechsel anzeigte, sobald ein Wechsel in der Drehungsrichtung der Walze stattfand.

Alle diese Versuche gelingen vollkommen in gleicher Weise, wenn man anstatt der Walze die Scheibe einer Elektrisirmaschine anwendet. Der Krümmungs-Halbmesser der geriebenen Flächen scheint also ohne wesentlichen Einfluss auf das Zustandekommen der erwähnten Ströme zu sein.

Ich gehe nun zur Beschreibung einiger Versuche über, welche bei mannigfach modificirten Verhältnissen unter Anderem

die Allgemeinheit beweisen sollen, mit welcher, bei Erfüllung der wesentlichen Bedingungen, die Reibungsströme in der Natur auftreten.

Erster Versuch.

Als Reibzeug wurde ein dünner Lederstreif von 25 Mm. Breite und von solcher Länge angewandt, dass seine Enden, wie in Fig. 5, Taf. II angedeutet, unterhalb der Walze vereinigt werden konnten. Die innere, mit der Walze in Berührung kommende Seite des Leders war überall, ihrer ganzen Ausdehnung nach, amalgamirt. Durch Seidenbänder bb' wurde das Leder in passender Weise gegen die Glasoberfläche gedrückt und bei Drehung der Walze in seiner Lage fixirt. Setzt man nun die beiden Zuleitungsdrähte p und p' des Multiplicators an irgend einer Stelle, durch einfaches Anlegen mit Hülfe eines isolirenden Halters, auf die Oberfläche des Lederstreifens, so beobachtet man während der Drehung der Walze stets einen Strom, dessen Richtung mit einem Wechsel der Drehungsrichtung der Walze sich umkehrt.

Der Abstand der beiden Elektroden p und p' beeinflusst die Stärke des Stromes innerhalb gewisser Grenzen nur sehr wenig.

Ich habe oft bei einer Entfernung derselben von nur 1 Millimeter den gleichen Strom durch Ablenkung erhalten, wie unter sonst unveränderten Bedingungen, bei einem Abstande $(p—p_1)$ von 30—80 Millimeter.

Die Richtung des Stromes entspricht jedesmal einem Abflusse der Elektricität von denjenigen beiden Stellen s und s', an welchen während der Drehung die Oberfläche der Walze sich vom Lederstreifen trennt (s') und wieder vereint (s).

Die an der Trennungsstelle (Austrittsstelle) angesammelte Elektricität stimmt in ihrem Vorzeichen mit derjenigen des geriebenen Isolators, die an der Vereinigungsstelle (Eintrittsstelle) angesammelte Elektricität mit derjenigen des Reibzeugs überein.

Zweiter Versuch.

Um zu zeigen, dass in der That die oben erwähnten beiden Stellen als diejenigen zu betrachten sind, an denen sich Elektri-

citätsmengen von entgegengesetztem Vorzeichen ansammeln, welche sich theils im Reibzeuge theils im Leitungsdrahte des Multiplicators in Form eines Stromes ausgleichen, habe ich noch folgenden Versuch (Fig. 6) angestellt. Der Lederstreifen ist wie beim vorigen Versuche als Reibzeug mit der Walze in Verbindung gesetzt. Die beiden Elektroden p und p' befinden sich in einem Abstande von circa 50 Mm.; ungefähr in der Mitte zwischen beiden bei m (Fig. 6 Taf. II) ist ein Seidenfaden zwischen Walze und Lederstreifen eingeschoben, vermittelst dessen man an der bezeichneten Stelle den Letztern während der Drehung emporheben kann, wie dies in der Zeichnung angedeutet ist. Sobald dies geschieht, kehrt sich der Strom, welcher vorher dem obigen Gesetze entsprechend gerichtet war, plötzlich um. Es erklärt sich dies leicht, wenn man berücksichtigt, dass durch das erwähnte Emporheben des Lederstreifens bei e eine negative *Eintrittsstelle*, bei a eine positive *Austrittsstelle* erzeugt wird, welche ihre Elektricitäten theils in dem emporgehobenen Theile des Leders, theils durch den Leitungsdraht des Galvanometers ausgleichen.

Modification der Versuchsbedingungen.

Ich habe schon oben erwähnt, dass die angeführten Versuche einen entgegengesetzten Character bezüglich der Richtung der Ströme annehmen, sobald an Stelle der Glasoberfläche eine Harzfläche angewandt wird. In letzterem Falle wurde an Stelle des amalgamirten Lederstreifens ein gewöhnlicher Streifen von Leder benutzt, wodurch natürlich die Intensität der beobachteten Ströme eine beträchtlich geringere wurde.

Erste Modification.

Wurde dieser Lederstreif stark mit Fett eingerieben oder mit destillirtem Wasser angefeuchtet, oder wurde hierbei der Streifen durch andere Stoffe, z. B. Leinwand, Hanf u. s. w. ersetzt, so dass sich zwischen diesem Streifen und der rotirenden Glaswalze eine dünne Fett- oder Wasserschicht befand, so blieb bei allen diesen Modificationen der wesentliche Character der beschriebenen Phänomene unverändert derselbe, d. h. **es entwickelten sich in den angewandten mit Fett oder Wasser befeuchteten Streifen elektrische Ströme, deren Richtung sich gleichzeitig mit der Rotationsrichtung der Walze umkehrte.**

Zweite Modification.

Ein besonderes Interesse hatte für mich die Frage, was geschehen würde, wenn sich der als Reibzeug dienende Lederstreifen in Form eines geschlossenen Ringes überall eng und gleichmässig an die Oberfläche der Glaswalze anschliesst. In diesem Falle würden offenbar die bei den bisherigen Versuchen vorhandenen und wirksamen Aus- und Eintrittsstellen ganz fortfallen. Um indessen einen solchen Versuch vollkommen einwurfsfrei anstellen zu können, würde vor Allem eine vollkommen regelmässig geschliffene Glasoberfläche bei der Walze, und eine ebenso homogene Oberfläche bei dem Reibzeuge erforderlich sein.

Wäre bei der Walze diese Bedingung auch zu erfüllen, so würde dies doch beim Reibzeuge schwerlich in dem Maasse der Fall sein, dass man behaupten könnte, es seien an dieser oder jener Stelle nicht kleine Ungleichheiten vorhanden, welche, durch entsprechende Lücken von einander getrennt, gleichsam zur Bildung partieller Reibzeuge mit Ein- und Austrittsstellen beitragen könnten.

Da somit selbst mit grosser Sorgfalt ausgeführte Versuche schwerlich die hier erwähnten Ungleichheiten vollkommen hätten beseitigen können, so habe ich mich damit begnügt, diese Versuche mit denjenigen Mitteln anzustellen, welche mir zu den oben beschriebenen Versuchen gedient hatten.

Der Lederstreifen wurde genau von solcher Länge geschnitten, dass, wenn derselbe die Walze fest umschloss, die beiden Schnittflächen sich gerade berührten. Durch ein an dieser Stelle von aussen mit Siegellack aufgeklebtes Stück Leder wurde die Verbindung hergestellt. Um den so geschlossenen Lederring bei der Drehung der Walze in seiner Lage zu fixiren, wurde derselbe mehrmals mit einem etwas schmaleren, starken Gummibande umwunden, dessen Enden in ähnlicher Weise wie früher die Seidenbänder, an festen Stützen auf dem Gestell der Walze befestigt wurden. Die passend geformten Elektroden des Multiplicators wurden einfach zwischen Gummiband und Lederstreifen gesteckt und hierdurch verschiedene Stellen von verschiedener Länge in den Kreis des Multiplicatordrahtes eingeschaltet.

Hierbei ergab sich, dass auf dem ganzen Umkreise des Lederstreifens jederzeit galvanische

Ströme durch Drehung der Walze erregt wurden, die bei jedem Rotationswechsel der Walze ihre Richtung wechselten. Die Intensität und Richtung dieser Ströme war jedoch nicht an allen Stellen des Umfanges dieselbe.

Die hierdurch nothwendig erzeugten Indifferenzpuncte liessen sich durch eine passende Orts- und Abstandsänderung der Ableitungsstellen ermitteln.

Ich bemerke jedoch nochmals, dass diese Versuche aus den oben erwähnten Gründen keine entscheidende Antwort auf die gestellte Frage zu geben im Stande sind. Wenn man dagegen berücksichtigt, dass ein rotirender Isolator, der allseitig von seinem Reibzeuge umschlossen ist, nothwendig diejenige Elektricität im Sinne seiner Rotation mit sich fortführen muss, welche an seiner Oberfläche haftet, so würde diese so bewegte Elektricität nothwendig einen elektrischen Strom repräsentiren, dem ein äquivalenter Gegenstrom im Reibzeuge entsprechen müsste, wenn man die Bedingung stellt, dass das ganze System nach Aussen keine elektrodynamische oder magnetische Wirkungen ausüben soll. Stellt man jedoch diese Bedingung nicht, so würde sich ein allseitig von einem amalgamirten Reibzeug umschlossener rotirender Glascylinder, wie ein Solenoid verhalten, in dessen Windungen ein mit der Rotationsrichtung übereinstimmender elektrischer Strom kreist.

Ich glaube, dass sich durch eine weitere experimentelle Untersuchung über die Existenz solcher elektrodynamischen Fernewirkungen ein Ausgangspunct für eine allgemeine Theorie der hier behandelten Erscheinungen gewinnen liesse, aus welcher gleichzeitig die Nothwendigkeit des Auftretens der beobachteten Reibungsströme aus allgemeinen, elektrodynamischen Principien gefolgert werden könnte. Indessen verzichte ich vorläufig hierauf und gehe, der mir im 1. Theile dieser Abhandlung gestellten Aufgabe gemäss, zur Mittheilung weiterer Versuche über.

Dritte Modification.

Eine cylindrische Glasstange *AB* (Taf. II. Fig. 7) von 950 Mm. Länge und 16 Mm. Dicke wurde parallel ihrer Axe in dem röhrenförmigen Reibzeuge *R* aus amalgamirtem Leder verschoben, welches allseitig die Glasstange dicht umschloss und eine Länge von 112 Mm. besass.

Die Enden des isolirt befestigten Reibzeuges waren äusserlich mit schmalen Ringen aus dünnem Kupferblech umgeben, an denen die Klemmschrauben *a* und *b* die Verbindung mit dem Multiplicator herstellten. Sobald der Glasstab mit genügender Geschwindigkeit verschoben wurde, entstanden elektrische Ströme, deren Richtung, dem gefundenen Gesetze entsprechend, mit der Bewegungsrichtung des Glasstabes sich umkehrte.[1])

Vierte Modification.

An Stelle des röhrenförmigen Reibzeuges *R* wurde eine Glasröhre *G* (Fig. 8 Taf. II) von gleicher Länge angewandt, deren ausgebogene Ränder auf der innern und äusseren Seite mit einer Stanniolbekleidung einige Millimeter breit eingefasst waren, um eine leitende Verbindung mit der beweglichen Oberfläche des Reibzeuges herzustellen. Letzteres wurde in Form eines Glasstabes *AB* angewandt, der an seiner Oberfläche gleichmässig mit einem Lederstreifen umwunden war, so dass sich die spiralförmigen Windungen des letzteren dicht aneinander legten, und einen möglichst zusammenhängenden und passend befestigten Ueberzug von amalgamirtem Leder bildeten. Wurde nun der Glasstab an einem seiner isolirten Enden in der Röhre verschoben, so entstanden wiederum elektrische Ströme, welche ihre Richtung mit der Richtung der Verschiebung wechselten. Dem erwähnten Gesetze entsprechend, war gegenwärtig die Austrittsstelle (*b*) negativ, die Eintrittsstelle (*a*) positiv elektrisch.

Fünfte Modification.

Wurde bei diesem Versuche eine Glasröhre angewandt, deren innere Oberfläche mit einer dünnen Schellackschicht über-

1) Als ich zu diesem Versuche mit Benutzung desselben Reibzeuges, einen Stab aus Hartgummi (Ebonit) anwandte, also aus einem Stoffe, welcher bekanntlich durch Reibung mit anderen Körpern sehr stark negativ elektrisch wird, ergab sich eine scheinbare Ausnahme von diesem Gesetze, insofern die Richtung der beobachteten Ströme die gleiche wie beim Glasstabe war. Als ich jedoch, hierüber verwundert, die Elektricität des Ebonitstabes am Elektroskop untersuchte, fand ich dieselbe stark positiv, also übereinstimmend mit der Glasstange, wodurch sich natürlich auch die gleiche Stromrichtung erklärte. Bereits *Poggendorff* u. A. haben auf diese Anomalien aufmerksam gemacht, wenn jener Körper mit Amalgam gerieben wird, ein Umstand, den Herr Prof. *Poggendorff* die Güte hatte, mir mündlich mitzutheilen.

zogen war (Fig. 9), so kehrten sich die Richtungen der Ströme um. Folgende Versuchsreihe mag diesen Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit erläutern. Hierbei soll die Verschiebungsrichtung des mit Leder überzogenen Glasstabes mit »rechts« oder »links« bezeichnet werden.

Bewegter Körper: Leder.

Oberfläche: Schellack.		Oberfläche: Glas:	
rechts	links	rechts	links
— 2,8	+ 3,8	+ 3,5	— 3,4
— 2,4	+ 5,1	+ 6,1	— 3,9
— 3,2	+ 4,0	+ 5,0	— 4,0
— 2,0	+ 3,6	+ 6,1	— 5,0
— 4,0	+ 2,9	+ 5,6	— 5,5

Es ist sehr leicht auch elektroskopisch die an den beiden Enden des Reibzeuges R (Fig. 7) oder der Glasröhre G (Fig. 8) auftretenden entgegengesetzten Elektricitätsmengen nachzuweisen. Man muss nur darauf achten, dass die metallische Verbindung mit dem Elektroskope noch während der Verschiebung des Reibzeuges gelöst werde, indem im entgegengesetzten Falle eine Ausgleichung dieser Spannungsdifferenz durch die leitende Oberfläche des Leders stattfindet. Ich bediente mich zu diesen Versuchen eines gewöhnlichen Goldblattelektrometers und erhielt, dem erwähnten Gesetze entsprechend, jederzeit constante und sehr beträchtliche Divergenzen des Elektroskopes.

4.

In meiner Abhandlung „über die durch strömendes Wasser erzeugten elektrischen Ströme“[1]) habe ich Versuche mitgetheilt, bei welchen elektrische Ströme durch destillirtes Wasser erzeugt werden, wenn dasselbe durch Glasröhren strömt, deren kreisförmige Durchmesser im Maximum 0,95 Mm. betrugen. Fig. 10 (Taf. II) veranschaulicht schematisch die Anordnung der Versuche; $a\ b$ stellt die enge Glasröhre dar, deren Enden in weiteren Röhrenstücken A und B münden. An letzteren befinden

1) Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. W. 1872. Dec. 12. (*Pogg.* Ann. Bd. 148. p. 640.)

sich die seitlichen Ansätze a' b' mit eingeschmolzenen Platindrähten, welche als Elektroden mit einem empfindlichen Galvanometer in Verbindung standen. Wurde nun destillirtes Wasser unter einem Druck von 480 bis 480 Mm. Quecksilber in der durch den Pfeil angedeuteten Röhre von links nach rechts durch diese Röhren getrieben, so entstand ein galvanischer Strom, dessen Richtung, in der durch die Zeichnung erläuterten Weise, gesetzmässig mit der Richtung des Wasserstromes im Zusammenhang stand. So ergaben sich z. B. unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen folgende Ablenkungen, wenn das Wasser nach rechts unter einem Drucke von 320 Mm., nach links unter einem Drucke von 480 Mm. getrieben wurde.

Bewegter Körper: destill. Wasser.

Oberfläche: Glas.

rechts	links
— 3,6	+ 5,5
— 3,7	+ 5,3
— 4,0	+ 5,5

Man erhält also Ablenkungen, welche sowohl ihrer Grösse als Richtung nach mit denjenigen übereinstimmen, welche oben durch Reibung von Leder gegen die mit Schellack überzogenen Wandungen einer Glasröhre erhalten wurden. Der Gedanke liegt also nahe, in beiden Versuchen dieselbe Ursache der beobachteten Ströme vorauszusetzen, wenn man berechtigt wäre, das destillirte Wasser, welches in dem zuletzt erwähnten Falle die Stelle des Reibzeuges vertritt, als positiv elektrisch, die Oberfläche der Glasröhre als negativ elektrisch vorauszusetzen.

Nach den Untersuchungen von *Faraday*, [1]) *Péclet* [2]) und *Quincke* [3]) ist diese Voraussetzung in der That eine vollkommen berechtigte, indem Letzterer a. a. O. wörtlich Folgendes bemerkt:

> »Nimmt man an, wie das wohl wahrscheinlich ist, dass Reibungs- und Contactelektricität identisch sind, so ist einmal durch Versuche von *Faraday* bewiesen, dass

1) Experim. research. II. 2107.
2) Ann. d. chim. et de phys. (3) T. II. p. 289.
3) *Pogg.* Ann. Bd. 113. p. 592 ff.

das Wasser der positivste aller Körper ist, also durch Reibung mit allen anderen Substanzen positiv wird.«

»Ueber die Erregung von Elektricität durch Contact von Metallen und leitenden Substanzen mit destillirtem Wasser hat *Péclet* Versuche angestellt, und gefunden, dass alle Substanzen durch dasselbe negativ elektrisch erregt werden, mit Ausnahme von Braunstein, der positiv elektrisch werden soll.«

Quincke hat gleichfalls diese Ausnahme des Braunsteins durch besondere Versuche mit Hülfe eines Säulenelektroskops mit nasser Säule nach *Hankel*'s Construction bestätigt gefunden.

Es tritt also bei den Flüssigkeitsströmen an Stelle des bewegten Reibzeuges die bewegte Flüssigkeit und an Stelle des geriebenen Isolators die enge Glasröhre oder das poröse Diaphragma.

Die *Quincke*'schen Diaphragmenströme sind offenbar nichts anderes, als eine complicirtere Modification der von mir beobachteten Flüssigkeitsströme; an Stelle der engen Glasröhre treten in *Quincke*'s Versuchen die zahlreichen Canäle des porösen Diaphragma's.

Auch die bei den Reibungsströmen an der Ein- und Austrittsstelle des bewegten Reibzeuges leicht nachweisbare freie Elektricität war *Quincke* ebenfalls im Stande, an den Elektroden seiner Diaphragmenapparate nachzuweisen. Derselbe bemerkt hierüber wörtlich Folgendes: [1])

»Bei der grossen elektromotorischen Kraft der verschiedenen Apparate lässt sich nun auch mit Leichtigkeit freie Elektricität nachweisen, entweder an einem Säulenelektroskope oder an einem gewöhnlichen Goldblattelektroskope mit Hülfe des Condensators. Die Thalelektrode des Diaphragmaapparates zeigte immer freie positive, die Bergelektrode freie negative Elektricität. Ich habe diese freie negative Elektricität bei destillirtem Wasser und Diaphragmen aus Schwefel, Quarz, Schellack, Seide und Asbest mit Sicherheit nachweisen können.«

Ganz dieselben Erscheinungen lassen sich bei den Reibungsströmen beobachten, wenn, wie in der durch Fig. 9, Taf. II,

1) *Pogg.* Ann. Bd. 110 p. 57.

dargestellten Modification die Oberfläche des röhrenförmigen Isolators Schellack durch Contact und Reibung negativ, der bewegte Halbleiter (Leder) als Reibzeug positiv elektrisch wird.

Dass bei den Reibungsströmen im Innern oder an der Oberfläche des Reibzeuges sich ein Theil der freien Elektricitäten ausgleicht, welche an den erwähnten Ein- und Austrittsstellen auftritt, habe ich durch die früher angegebenen Versuche gezeigt, bei denen der Isolator sich bewegt, das Reibzeug aber in Form eines längeren Lederstreifens, in Ruhe bleibt. Es konnte auf allen Stellen dieses Streifens ein Strom nachgewiesen werden, welcher von der positiven Stelle zur negativen fliesst. Man kann daher die zwischen diesen beiden Stellen liegende Strecke des Reibzeuges als eine Nebenschliessung desjenigen Stromes betrachten, welcher von diesen Stellen durch den Draht des Multiplicators geht. Wird der Widerstand in dieser Nebenschliessung vermindert oder im Vergleich zu demjenigen im Multiplicator verschwindend gemacht, so muss die Ablenkung in letzterem vermindert oder auf 0 reducirt werden. Daher beobachtet man keine Reibungsströme, wenn an Stelle des Reibzeuges Metalle oder metallisch belegte Oberflächen angewandt werden. Der Ausgleich findet hierbei in dem Reibzeug selber statt und verschwindet für den Draht des Multiplicators.

Ganz analog diesen Verhältnissen bei den Reibungsströmen findet *Quincke* bei den Diaphragmenströmen, dass ihre Intensität sehr beträchtlich abnimmt, wenn dem destillirten Wasser Alkalien, Salze und Säuren beigemengt wurden,[1]) wodurch bekanntlich der Widerstand des destillirten Wassers sehr beträchtlich vermindert wird. Dass hierdurch die Bestimmung der elektromotorischen Kraft dieser Ströme aus Ablenkungen des eingeschalteten Multiplicators zum Theil illusorisch wird, deutet *Quincke* selber in folgendem Satze seiner zweiten Abhandlung (*Pogg.* Ann. Bd. 110 p. 58) an:

> »Im Allgemeinen lässt sich nur sagen, dass Zusatz von Alkohol zum destillirten Wasser die elektromotorische Kraft erhöht, Zusatz von Säuren oder Salzlösungen die-

1) *Quincke* bemerkt (*Pogg.* Ann. Bd. 107. p. 5): „Durch Zusatz von Säuren oder Salzlösungen zum destillirten Wasser wurde der elektrische Strom in seiner Richtung nicht geändert, wohl aber bedeutend geschwächt, so dass er zuletzt gar nicht mehr bemerkbar war."

selbe schwächt. Dabei dürfte es schwer zu entscheiden sein, ob dabei die erhaltenen Werthe durch die geringere oder grössere Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit für Elektricität bedingt werden, indem im ersteren Falle ein kleinerer, im letzteren ein grösserer Theil des elektrischen Stromes sich im Diaphragma selbst durch Nebenschliessung ausgleichen wird, worauf ich schon im Anfange dieses Aufsatzes aufmerksam gemacht habe.«

Mit Berücksichtigung dieser Nebenschliessung welche durch die bewegte Flüssigkeit selber gebildet wird, erklärt sich nun auch leicht, weshalb diese Ströme bei Diaphragmen mit sehr weiten Poren oder Röhren von sehr weitem Caliber schwieriger oder gar nicht zu beobachten sind. In diesen Fällen wird der Widerstand in der Nebenschliessung proportional der Vergrösserung des Querschnittes vermindert. Setzt man z. B. bei den von mir beschriebenen Flüssigkeitsströmen, unter sonst gleichen Umständen, die Quantität der erzeugten Elektricitätsmenge proportional der Contactfläche zwischen Flüssigkeit und Röhrenwandung, so wächst in diesen Fällen die Contactfläche proportional dem Durchmesser, — der Widerstand des cylindrischen Flüssigkeitsfadens aber umgekehrt proportional dem Quadrate des Durchmessers der Capillarröhren. Es wächst also mit zunehmendem Caliber der Röhre die sich durch Nebenschliessung ausgleichende Elektricitätsmenge in einem dem Röhrendurchmesser proportionalen Verhältnisse schneller als die durch Vergrösserung der Contactfläche erzeugte Elektricitätsmenge. Folglich muss durch stetige Vergrösserung des Röhrenquerschnittes das durch den Multiplicator fliessende Quantum von Elektricität abnehmen und schliesslich die davon abhängige Ablenkung des Galvanometers unter die Grenze der Wahrnehmung sinken. Dem entspricht die von *Quincke* gemachte Beobachtung, dass ein Wasserstrom ohne Diaphragma durch eine weite Glasröhre von 25 Mm. Durchmesser geleitet, keine wahrnehmbare Ablenkung am Multiplicator hervorrief. [1])

1) *Quincke*, *Pogg.* Ann. 117, p. 13. »Wurden die Röhren des Apparates ohne Diaphragma aneinander gekittet und nun ein Wasserstrom hindurchgeleitet, so war keine Ablenkung am Multiplicator zu bemerken. Man sieht also, dass das Diaphragma zur Erzeugung des elektrischen Stromes nothwendig ist.«

5.

Wenn aus den bisher mitgetheilten Versuchen mit grösster Wahrscheinlichkeit geschlossen werden darf, dass sowohl den *Quincke*'schen Diaphragmenströmen und ihren Modificationen als auch den vorstehend beschriebenen Reibungsströmen die gleiche physische Ursache zu Grunde liege, so entsteht jetzt naturgemäss die Frage, ob auch das Reciprocitätsphänomen der Diaphragmenströme, nämlich die Fortführung materieller Theilchen durch den elektrischen Strom, durch ein Analogon bei den Reibungsströmen vertreten sei.

Nach den oben entwickelten Anschauungen besteht der einzige Unterschied zwischen Diaphragmen- und Reibungsströmen nur darin, dass bei ersteren das Reibzeug durch einen tropfbar-flüssigen, bei den Reibungsströmen dagegen durch einen festen Körper gebildet wird. Die Beobachtung lehrt nun, dass der Process, dem die erste Gattung von Strömen ihren Ursprung verdankt, auch umgekehrt werden kann. Während nämlich bei Erzeugung der Diaphragmenströme mechanische Arbeit in elektrische Bewegung verwandelt wird, findet in der erwähnten Fortführung der Flüssigkeiten durch den galvanischen Strom eine Verwandlung von elektrischer Bewegung in mechanische Arbeit statt. Soll daher auch für die Reibungsströme eine ähnliche Umkehr des Processes möglich sein, so müsste man zeigen können, dass ein Reibzeug z. B. ein amalgamirtes Stück Leder, welches mit seiner amalgamirten Fläche auf einer Glasscheibe ruht, sich fortschiebt, sobald ein elektrischer Strom von hinreichender Spannung durch dasselbe geleitet wird. Die Richtung dieser Fortschiebung müsste durch dieselben Bedingungen bestimmt sein, wie die Fortführung einer Flüssigkeit durch den galvanischen Strom, welche nach den Untersuchungen *Quincke*'s stets im Sinne derjenigen elektrischen Strömung erfolgt, welche gleiches Vorzeichen mit der durch Contact in der bewegten Flüssigkeit erzeugten Elektricität besitzt. Da nun amalgamirtes Leder durch Contact mit Glas negativ elektrisch wird, so müsste die vorausgesetzte Bewegung des Leders im Sinne der negativen Elektricitätsströmung erfolgen.

Wollte man den angedeuteten Versuch direct in der beschriebenen Gestalt ausführen, so würden sich demselben, wie

man sieht, bedeutende Schwierigkeiten in den Weg stellen. Denn die Reibung zweier festen Körper ist im Vergleich zu derjenigen bei der Verschiebung zweier Flüssigkeitsschichten eine so bedeutende, dass schwerlich die zur Ueberwindung derselben erforderliche Arbeit durch die hier anwendbaren elektrischen Ströme geliefert werden könnte. Anders verhält sich jedoch die Sache, wenn man an Stelle des amalgamirten Lederstückes eine Quecksilbermasse von gleicher Contactfläche anwendet. Wird alsdann bei vollkommen horizontaler Stellung der Glasplatte in geeigneter Weise ein elektrischer Strom durch diese Quecksilbermasse geleitet, so müsste sich dieselbe im Sinne der negativen Elektricitätsströmung verschieben, da auch Quecksilber in Berührung mit Glas negativ elektrisch wird.

Dieser Versuch ist nun in der That mit bestem Erfolge in einer nur unbedeutend modificirten Gestalt bereits vor nahe 10 Jahren von Prof. *Poggendorff* ausgeführt und beschrieben worden. In seiner Abhandlung »über eine neue elektrische Bewegungserscheinung« (Monatsberichte der Königl. Akad. d. W. z. Berlin, Juni 1867)[1]) theilt *Poggendorff* eine Beobachtung über die Bewegung einer Quecksilbermasse mit, welche in einer sorgfältig evacuirten und horizontal an den Poldrähten einer *Holtz*'schen Maschine aufgehängten Glasröhre eingeschlossen ist. Nach genauer Angabe der hierbei zu beobachtenden Vorsichtsmassregeln heisst es dann wörtlich: »So wie der Strom durch die Röhre ging, gerieth auch das Quecksilber in Bewegung, und wanderte mit beträchtlicher Geschwindigkeit vom negativen Pol zum positiven. In welcher Richtung ich auch den Strom erregen mochte: immer blieb dies Resultat unverändert; niemals sah ich eine Ausnahme davon.«

Bezüglich der Masse des auf diese Weise elektrisch bewegten Quecksilbers wird Folgendes bemerkt:

»Das in Rede stehende Bewegungsphänomen ist keineswegs auf kleine Quecksilbermengen beschränkt; im Gegentheil: kleine Mengen bewegen sich nicht, vermuthlich wegen überwiegender Adhäsion zur Röhrenwand.«

»Bei der angewandten Röhre betrug die in Bewegung gesetzte Quecksilbermasse ungefähr 1 Unze.

1) Vgl. auch *Poggendorff*'s Ann. Bd. 131, p. 655.

Ich zweifle aber gar nicht, dass sie in einer grösseren Röhre ebenso gut auch 1 Pfund und mehr hätte betragen können, da nach meiner Ansicht die bewegende Kraft zum Theil im Quecksilber selber liegt.«

Ueber die Länge des bewegten Quecksilberfadens wird bemerkt:

»Dieser Faden hatte bei den erwähnten Versuchen eine Länge von 4 Par. Zoll. Der horizontale Theil der Röhre war 1 Par. Fuss lang; folglich hatte der Faden eine Strecke von 8 Zoll zu durchwandern; durchschnittlich gebrauchte er dazu 2 bis 3 Secunden, je nach der Stärke des erregten Stromes.«

Bereits *Poggendorff* spricht die Ansicht aus, dass das von ihm beobachtete Phänomen wahrscheinlich den gleichen Grund wie die von *Quincke* untersuchte Fortführung von Flüssigkeiten oder in denselben suspendirten Theilchen habe; die hierauf bezüglichen Worte sind folgende (S. 642 a. a. O.):

»Ich halte es jedoch für wahrscheinlich, dass das von mir beobachtete Phänomen in der Hauptsache einen gleichen Grund hat wie die von letzterem Physiker untersuchten, und nehme daher auch keinen Anstand, die von diesem aufgestellte Theorie wenigstens vorläufig zu adoptiren.«

»Dieser Theorie gemäss erfolgt vor der Bewegung der eingeschlossenen Substanz eine Elektrisirung derselben durch den Contact mit ihrer Umgebung, und auf die so elektrisirte Substanz wirkt dann der Strom fortführend nach dem positiven oder negativen Pol, je nachdem die vorausgegangene Elektrisirung eine negative oder positive war.«

»Das Quecksilber wird nun durch Berührung mit Glas negativ und war es wirklich in der S. 337 erwähnten Röhre, welche eine so ausgezeichnete Wirkung gab. Seine Fortführung zum positiven Pol hätte darnach also nichts Räthselhaftes.«

Diese Erklärung des Phänomens von *Poggendorff* entspricht also, wie man sieht, vollkommen dem Gesichtspuncte, von welchem ich im Anfang dieses Artikels die Existenz einer derartigen Bewegungserscheinung zu begründen versuchte. — Es lässt sich nun aber der Beweis, dass diese Erscheinung in der That

nichts Anderes als ein Reciprocitätsphänomen der von mir beobachteten Reibungsströme ist, noch weiter führen. Wenn nämlich der sich bewegende Quecksilberfaden wirklich die Stelle des Reibzeugs in meinen Versuchen vertritt, so müssen die beiden Enden des Quecksilber-Fadens während der Bewegung freie elektrische Spannungen von entgegengesetztem Vorzeichen besitzen, und zwar muss, dem gefundenen Gesetze gemäss, dasjenige Ende, welches an der Austrittsstelle der Glaswandung liegt, — also das bei der Bewegung nachfolgende, — freie positive Elektricität, dagegen das an dem Ende an der Eintrittsstelle, welches vorangeht, freie negative Elektricität besitzen. Unter dieser Voraussetzung wäre also das positiv-elektrische (nachfolgende) Ende des Quecksilberfadens dem negativen Pole, das negative (vorausgehende) Ende dem positiven Pole der Elektrisirmaschine zugewandt.

Mit Berücksichtigung der hierdurch entstehenden elektrostatischen Anziehungen zwischen den Enden des Quecksilberfadens und den Polen der Maschine würden entgegengesetzte Kräfte an den Enden des Fadens wirken, welche, bei genügender Stärke, eine Streckung oder Dehnung desselben während seiner Bewegung bewirken könnten.

In der That ist diese Erscheinung von *Poggendorff* beobachtet worden, indem er S. 638 a. a. O. bemerkt:

> »So wie der Faden sich in Bewegung setzt, ändert er auch seine Gestalt. Er wird bedeutend länger. Bei meinen Versuchen betrug die Verlängerung wenigstens 1 Par. Zoll.«

Ebenso beweisen im Dunklen die Lichterscheinungen an den Enden des Quecksilberfadens, dass dieselben entgegengesetzt elektrisirt sind und zwar vollkommen dem obigen Gesetze entsprechend, das vorangehende Ende negativ, das nachfolgende positiv.

Die betreffenden Worte *Poggendorff*'s (S. 642 u. 643) lauten folgendermassen:

> »Schliesslich will ich noch erwähnen, dass der in Rede stehende Bewegungsprocess auch von einer artigen Lichterscheinung begleitet wird, die indess nur im Dunklen recht sichtbar ist.
>
> »Am negativen Ende der Röhre nämlich, soweit der Platindraht hineinreicht, erscheint am Glase ein schönes gel-

bes Fluorescenzlicht, und dasselbe sieht man auch am vorderen, dem positiven Pole zugewandten Ende der Quecksilbersäule, mit ihr durch die ganze Röhre wandernd, bis zum aufrecht gebogenen positiven Schenkel derselben, der, wenn er erreicht ist, ebenfalls lebhaft gelb erglänzt.«

Aus diesen Lichterscheinungen folgt also, einerseits, dass wirklich freie Elektricitäten von entgegengesetztem Vorzeichen an den beiden Enden des Quecksilberfadens vorhanden sind, andrerseits, dass ein Theil dieser Elektricität sich durch Ausströmung in dem luftverdünnten Raume ausgleicht. Ein andrer, und vermuthlich der grösste Theil, wird sich im Quecksilber selber ausgleichen, so dass letzteres während seiner Bewegung von einem elektrischen Strome durchflossen wird, der entgegengesetzt demjenigen Strome ist, welcher die Bewegung des Fadens hervorruft.

6.

Ich gehe nun zu einer genaueren Betrachtung der durch strömende Elektricität in Flüssigkeiten erzeugten Bewegungen und ihrer Reciprocitätsphänomene über, um zu zeigen, dass auch hier, während der Bewegung, ein elektrischer Strom die Flüssigkeitsfäden des Diaphragma's oder der Capillarröhre durchfliessen muss, der entgegengesetzt demjenigen Strome gerichtet ist, welcher die Flüssigkeitsströmung erzeugt.

Dass ein galvanischer Strom Flüssigkeiten in der Richtung des positiven Stromes mit sich fortführt, wenn diese Flüssigkeiten an einer Stelle durch eine poröse Scheidewand unterbrochen sind hat zuerst *Reuss* in Moskau im Jahre 1807 beobachtet.[1]) Alle späteren Beobachter des gleichen Phänomens, wie *Porret* (1816), *de la Rive*, *Becquerel*, *Daniell*, *Napier*, *Wiedemann*, *Graham*, *v. Quintus Icilius*, *Breda* und *Logemann* hielten die Anwendung poröser Diaphragmen für eine nothwendige Bedingung zur Hervorrufung der Erscheinung. *Quincke* dagegen zeigte zuerst, dass

1) Mémoires de la soc. impér. des naturalistes de Moscou T. II. p. 327—337. 1808.

dieses Phänomen ein viel allgemeineres sei, indem er nachwies, »dass die Fortführung von Flüssigkeiten durch strömende Elektricität dem galvanischen Strome der Hydroketten nicht allein zukommt, dass sie ohne Diaphragma nachgewiesen, und bei den verschiedensten Stoffen unabhängig vom Aggregatzustande, bald im Sinne des positiven, bald im Sinne des negativen Stromes stattfinden kann.«[1]) *Quincke* bewies ferner durch zahlreiche und sinnreich angeordnete Modificationen seiner Versuche, dass die ganze Erscheinung auf's Engste an die Elektricitätserregung beim Contacte heterogener Körper geknüpft ist, und zwar so, dass die Richtung der Fortführung des beweglichen Körpers stets im Sinne der Strömung derjenigen Elektricität stattfindet, welche ein gleiches Vorzeichen mit der durch Contact an der Oberfläche des beweglichen Körpers erregten Elektricität besitzt.

Wird also z. B. die Flüssigkeit durch Contact mit der Röhrenwand positiv elektrisch, so wird die Berührungsschicht im Sinne des positiven Stromes fortgeführt; wird diese Schicht durch Contact aber negativ elektrisch, so findet eine Fortführung im entgegengesetzten Sinne statt. Das gleiche Gesetz gilt für die Körper, welche, in der Flüssigkeit suspendirt, allseitig von dieser umschlossen sind. Je nachdem ihre Oberfläche durch Contact positiv oder negativ elektrisch wird, findet eine Fortführung im Sinne der positiven oder negativen elektrischen Strömung statt, welche die Flüssigkeit durchfliesst. Bezüglich der näheren Modalitäten der Erscheinung, die sich ebenso einfach als ungezwungen aus dieser Anschauung ableiten, muss auf die ausführliche Abhandlung *Quincke*'s a. a. O. verwiesen werden; derselbe beschliesst seine umfangreiche Arbeit mit folgenden Worten:

> »Mir ist keine Thatsache bekannt, die der Erklärung der Fortführung materieller Theilchen, wie ich sie in vorliegendem gegeben habe, widerspräche. Wie dem auch sei, jedenfalls folgt aus den beschriebenen Versuchen, dass die Bewegung materieller Theilchen unter dem Einflusse der strömenden Elektricität ihrer Grösse und Richtung nach nicht abhängt vom Aggregatzustande derselben, sondern von der Natur der Theilchen

1) *Pogg.* Ann. Bd. 118. p. 514 ff.

und der Natur der Stoffe, mit welchen dieselben in Berührung stehen.«[1])

Dass die hier erwähnte Classe von Erscheinungen, bei denen strömende Elektricität eine Verschiebung oder Strömung materieller Theile erzeugt, auf's Engste mit jener andern Classe von Erscheinungen verbunden ist, bei denen eine Verschiebung oder Strömung materieller Theile strömende Elektricität erzeugt, habe ich bereits vor 4 Jahren in meiner Abhandlung »über den Ursprung des Erdmagnetismus und die magnetischen Beziehungen der Weltkörper« ausgesprochen. Man könnte diese Anschauung so lange für eine experimentelle nicht hinreichend begründete ansehen, als man nur die erste Abtheilung der Untersuchungen *Quincke*'s »über eine neue Art elektrischer Ströme«[2]) berücksichtigt, indem hierbei die Richtung der elektrischen Strömung, trotz der grossen Verschiedenheit der angewandten Substanzen, stets dieselbe in Beziehung zur Richtung der Flüssigkeitsströmung blieb. Bereits oben habe ich darauf hingewiesen, dass hieraus zu schliessen wäre, es würde die angewandte Flüssigkeit (dest. Wasser) durch Contact mit allen den verschiedenen Substanzen der benutzten Diaphragmen, positiv-elektrisch, ein Schluss, der, wie gezeigt, mit anderweitigen Thatsachen der directen Beobachtungen im Einklange steht.

Dagegen hatte nun auch *Quincke* bei seinen zuletzt erwähnten Untersuchungen in einem Alkohol von bestimmter Concentration eine Flüssigkeit gefunden, »die umgekehrt wie Wasser in der Richtung der negativen Elektricitätsströmung durch ein Thondiaphragma fortgeführt wird.«[3])

Ist also meine oben ausgesprochene Vermuthung von der Gemeinsamkeit der diesen Erscheinungen zu Grunde liegenden Ursachen in der Natur begründet, so muss auch dieser Alkohol durch ein poröses Diaphragma strömend, einen elektrischen Strom in umgekehrter Richtung, d. h. im entgegengesetzten Sinne wie beim destillirten Wasser geben. Dies ist nun in der That der Fall, indem *Quincke* a. a. O. in einer Anmerkung von jenem Alkohol wörtlich Folgendes bemerkt (p. 559):

1) *Pogg.* Ann. Bd. 113. p. 598.
2) Erste Abhandl. *Pogg.* Ann. 107. p. 1 ff. (1859).
Zweite Abhandl. *Pogg.* Ann. 110. p. 38. ff. (1860).
3) *Pogg.* Ann. 113. p. 559.

»Der erwähnte Alkohol hat auch die merkwürdige Eigenschaft beim Durchpressen durch den Thoncylinder elektrische Diaphragma-Ströme in der umgekehrten Richtung der Flüssigkeitsströmung zu geben, während die bisher untersuchten Flüssigkeiten, worunter auch Wasser und Alkohol, immer elektrische Ströme im Sinne der Flüssigkeitsströmung erzeugten.«

Nach der oben angeführten Theorie *Quincke*'s über die Richtung der Fortführung materieller Theilchen durch den galvanischen Strom, müsste man annehmen, dass der erwähnte Alkohol durch Contact mit der Substanz des Diaphragma's die entgegengesetzte Elektricität von derjenigen annähme, welche destillirtes Wasser durch Contact mit demselben Stoffe annimmt — d. h. also, dass jener Alkohol durch Contact mit dem Diaphragma negativ elektrisch würde. Dann würde sich aber nothwendig aus meiner Annahme, dass die Ursache der Diaphragmenströme und ihrer Modificationen identisch sei mit der Ursache der beschriebenen Reibungsströme bei der gleitenden Reibung zweier festen Körper, die Folgerung ergeben, dass eine Aenderung des Vorzeichens der freien Elektricität an den beiden Enden des Diaphragma's oder der Capillarröhre statt findet. Folglich muss auch der Reibungsstrom, welcher bei Verschiebung des Reibzeuges (hier der erwähnte Alkohol) entsteht, seine Richtung umkehren, wie dies *Quincke* beobachtet hat. Der in Fig. 9 (Taf. II) dargestellte Fall eines Reibungsstromes würde also das Analogon desjenigen Falles eines Diaphragmenstromes sein, bei welchem destillirtes Wasser angewandt wird. Denn letzteres wird durch Contact mit der Substanz des Diaphragma's in ähnlicher Weise positiv elektrisch, wie im vorliegenden Fall das Leder durch Contact und Reibung mit der Schellack-Oberfläche der inneren Röhrenwandung. Demgemäss wird die Austrittsstelle *b* positiv elektrisch und giebt daher zur Entstehung eines elektrischen Stromes im Multiplicatordrahte Veranlassung, welcher im Sinne der Flüssigkeitsströmung durch das Diaphragma fliessen würde, wenn man letzteres als integrirenden Bestandtheil des durch den Multiplicatordraht geschlossenen Stromkreises voraussetzt.

Es ist aber nun auch eine andere Auffassungsweise zulässig, nach welcher im Diaphragma oder dem Canal der Capillar-

röhre $a\,b$ (Fig. 10) ein elektrischer Strom in entgegengesetzter Richtung fliesst, indem sich ein Theil der an den beiden Endflächen des Diaphragma's oder der Capillarröhre erzeugten freien Elektricitäten im Innern der strömenden Flüssigkeit ausgleicht. In diesem Falle wäre der Draht des Multiplicators nur als Nebenschliessung eines Stromes aufzufassen, welcher sich unter den angegebenen Bedingungen zwischen den Enden der Flüssigkeitsfäden des Diaphragma's oder der Capillarröhre entwickelt. Mit andern Worten, es wäre alsdann der im Multiplicatordraht fliessende Strom nur ein sogenannter Zweigstrom des in der Flüssigkeit erzeugten elektrischen Stromes.

Dass diese Auffassungsweise bei den beschriebenen Reibungsströmen in der That begründet ist, lässt sich leicht experimentell zeigen. Man braucht zu diesem Zwecke nur bei der früher in Fig. 5 Taf. II angegebenen Modification die beiden Enden p und p' des Multiplicatordrahtes an verschiedenen Stellen des geschlossenen Lederstreifens anzulegen. Auf dem oberen, auf der Walze liegenden, Theile des Streifens erhält man Ströme in dem früher erläuterten Sinne. Rückt man nun aber bei constantem Abstande der Elektroden p und p' auf den unteren Theil des Lederstreifens, der nicht mehr die Glaswalze berührt, so kehrt sich der Strom um. Man sieht hieraus, dass der Lederstreifen von keinem geschlossenen Strome durchflossen wird, sondern dass derselbe durch die wirksamen Ein- und Austrittsstellen in zwei Theile gespalten wird, in denen ein gesonderter Abfluss der an diesen Stellen angesammelten freien Elektricitäten stattfindet.

Es erklärt sich hierdurch auch der bereits oben erwähnte Umstand, dass die Stärke der beobachteten Ströme innerhalb sehr weiter Grenzen ganz unabhängig von der zwischen beiden Elektroden eingeschalteten Strecke des Lederstreifens ist. Bei dem ungeheuren Widerstande dieses Stoffes würde nur unter sehr künstlichen Annahmen diese Constanz zu erklären sein, wollte man das eingeschaltete Stück Leder als integrirenden und leitenden Bestandtheil des durch den Multiplicatordraht gebildeten Stromkreises betrachten.

Ebensowenig, wie man bei den elektrischen Strömen, welche mit Hülfe einer Elektrisirmaschine erzeugt werden können, indem man Reibzeug und Conductor mit den Enden eines

Multiplicators verbindet, die zwischen diesen beiden Theilen der Maschine gelegenen Körper, z. B. Luft, Glas, Leder u. s. w. als leitenden und integrirenden Bestandtheil der Multiplicatorwindungen betrachtet, ebensowenig darf dies bei den Reibungsströmen geschehen.

Sind nun die Diaphragmenströme und ihre Modificationen durch dieselbe Ursache wie die Reibungsströme bedingt, so müssen auch bei jenen Strömen die beiden Enden des Diaphragma's oder der eingeschalteten Capillarröhre, von demselben Gesichtspuncte betrachtet werden. Experimentell lässt sich über die Richtigkeit dieser Auffassung nur schwer entscheiden. Dagegen scheint mir von einem allgemeineren Gesichtspuncte aus die Frage zu Gunsten der von mir befürworteten Auffassung entschieden werden zu können.

Gesetzt, es sei der in Fig. 10. Taf. II dargestellte Apparat mit destillirtem Wasser gefüllt. Wird dasselbe durch die Capillarröhre $a\,b$ im Sinne des Pfeiles getrieben, so entsteht ein galvanischer Strom, dessen positive Strömung im Multiplicatordraht von b' nach a' fliesst.

Nach den soeben angestellten Betrachtungen lässt sich hierdurch aber noch nicht über die Richtung eines in dem Canal der Capillarröhre $a\,b$ fliessenden Stromes entscheiden. Denn dieser Strom kann fliessen

entweder

1) von der negativen Eintrittsstelle a nach der positiven Austrittsstelle b, d. i. in der Richtung der Flüssigkeitsströmung, wenn man den in $a\,b$ befindlichen Flüssigkeitsfaden als integrirenden und leitenden Theil des durch den Multiplicatordraht geschlossenen Stromkreises auffasst;

oder

2) von der positiven Austrittsstelle b nach der negativen Eintrittsstelle a, wenn man den Multiplicatordraht und die ausserhalb der Röhrenenden liegenden Wassermassen als eine Nebenschliessung, und daher den beobachteten Strom als einen Zweigstrom des in der Röhre $a\,b$ von b nach a, d. h. im entgegengesetzten Sinne der Wasserströmung fliessenden elektrischen Stromes auffasst.

Aus der ersten Anschauungsweise würde folgen, dass ein

galvanischer Strom, der eine destillirte Wassermasse durch eine poröse Thonwand oder eine dünne Röhre treibt, sich verstärken muss.

Denn die mechanische Verschiebung des Wassers allein erzeugt einen Strom in demselben Sinne, wie der jene Verschiebung bewirkende galvanische Strom.

Wenn daher durch die Bewegung des Wassers selber nicht etwa eine Veränderung in der spec. Leitungsfähigkeit des Wassers erzeugt wird, so müsste sich der durch die Verschiebung der Flüssigkeit hervorgerufene Diaphragmenstrom einfach zu dem primitiven Strome, welcher die Flüssigkeit durch das Diaphragma hindurch treibt, addiren, und folglich der ursprüngliche elektrische Strom um den Betrag des secundär durch ihn selber erregten Diaphragmenstromes vergrössert erscheinen.

Quincke, [1]) welcher seine Diaphragmenströme allgemein im Sinne der ersten Anschauungsweise, d. h. also nicht als Zweigströme auffasst, zieht denselben Schluss aus seinen Beobachtungen, indem er bemerkt:

> »Es würde aus diesen Erscheinungen folgen, wie ich schon an einem anderen Orte [2]) bemerkt habe, dass ein galvanischer Strom, der Flüssigkeit durch eine poröse Thonwand hindurchführt, sich verstärken muss.«

Bezüglich eines Versuches, durch welchen dieser Schluss experimentell geprüft werden sollte, bemerkt *Quincke* a. a. O. Folgendes:

> »Ich habe diesen Schluss bei Thon und destillirtem Wasser durch Versuche zu prüfen gesucht. Der Strom eines *Grove*'schen Elementes wurde durch einen Apparat von der angegebenen Form und den Spiegelmultiplicator geleitet; die Empfindlichkeit des letzteren wurde durch eine Nebenschliessung so regulirt, dass die Ablenkung etwa 400 Scalentheile betrug. Mittelst eines Korkes

---

1) *Pogg.* Ann. Bd. 110. p. 63.

2) Monatsber. d. Berl. Akad. 28. Oct. 1858. Der betreffende Passus in dem Referat von *Magnus* lautet (p. 516) wörtlich wie folgt: »Es würde aus der Richtung der vom Verfasser beobachteten Ströme also folgen, dass, wenn bei dem bekannten *Porret*'schen Phänomen, dessen Gesetze Herr *Wiedemann* studirt hat, Flüssigkeit von einem galvanischen Strom durch die poröse Scheidewand geführt wird, dieses Fortführen der Flüssigkeit wieder einen Strom erzeugt, der den ersten primären Strom verstärkt.«

oder eines Ventiles konnte das Durchströmen verhindert werden. Ich beobachtete dann eine Zunahme oder Abnahme der Stromintensität von 0.5 bis 1 Scalentheil, wenn die Flüssigkeitsströmung begann oder aufhörte, doch halte ich diese Versuche nicht für vollständig beweisend, da die Polarisation der Platinelektroden ein fortwährendes Schwanken der Stromintensität bedingt, welches durch zufällige Erschütterungen noch erhöht wird. Es möchte aus diesem Grunde unmöglich sein, diese Frage durch den Versuch mit Sicherheit zu entscheiden.«

Betrachtet man die hier von *Quincke* beobachteten geringfügigen Unterschiede als verschwindend, so muss man aus dem angeführten Versuche den Schluss ziehen, dass die Quantität der im Multiplicatordrahte fliessenden Elektricitätsmenge in beiden Fällen unverändert geblieben ist.[1])

Da nun aber in dem einen Falle der galvanische Strom die Flüssigkeit durch das Diaphragma trieb, also durch Ueberwindung der Reibung in den Canälen des Diaphragma's eine bestimmte mechanische Arbeit leistete, welche im andern Falle durch Verhinderung der Strömung wegfällt, so muss im ersten Falle eine der geleisteten Arbeit äquivalente Wärmemenge im Stromkreise verschwinden, wenn dem Principe von der Constanz der Energie genügt werden soll. Die in einem Stromkreise erzeugte Wärmemenge W ist nach dem *Joule*'schen Gesetze proportional dem Quadrate der Stromstärke J und dem Widerstande R, so dass

$$W = J^2 R.$$

Es folgt hieraus, dass bei constanter Stromstärke J die entwickelte Wärmemenge W nur durch eine Verminderung des Widerstandes R vermindert werden kann. Man müsste also unter den bisher gemachten Voraussetzungen aus dem obigen Versuche *Quincke*'s schliessen, dass während der Strömung der Flüssigkeit in den Canälen des Diaphragma's der Widerstand um eine Grösse vermindert würde, welche eine, der bei der Flüssigkeitsströmung geleisteten Arbeit äquivalente Verminderung der Wärmemenge W erzeugte.

---

1) *Quincke* selber hält daher »diese Versuche nicht für vollständig beweisend« und ist der Ansicht »es möchte aus diesem Grunde unmöglich sein, diese Frage durch den Versuch mit Sicherheit zu entscheiden.«

Dass strömendes Wasser einem galvanischen Strome einen geringeren Widerstand darbietet, wenn Letzteres parallel der Flüssigkeitsströmung fliesst, als im entgegengesetzten Falle, ist zwar vor Kurzem durch interessante Versuche von *Edlund* gezeigt worden. [1])

Vergleicht man jedoch die hierzu erforderlichen Stromgeschwindigkeiten des destillirten Wassers mit den zur Erzeugung von Diaphragmenströmen erforderlichen Geschwindigkeiten, so sind erstere ungefähr 100,000 Mal grösser als letztere.

Denn bei *Edlund* war bei allen Versuchen die Geschwindigkeit des destillirten Wassers zwischen 9 und 10,5 Meter in der Secunde. Dagegen bei *Quincke* im Maximum nicht grösser als 0.13 Mm. in der Secunde. [2]) Und trotz dieser grossen Geschwindigkeit erhielt *Edlund* bei seinen Versuchen nur Unterschiede von 2 bis 3 Scalentheilen des Galvanometers bei Anwendung einer Kette von zwei *Daniell*'schen Elementen.

Es geht hieraus hervor, dass die Annahme, der specifische Leistungswiderstand in dem Diaphragma vermindere sich durch die Flüssigkeits-Strömung, zur Erklärung der oben als nothwendig erkannten Wärmeproduction durchaus unzulänglich und deshalb unstatthaft ist.

Es bleibt demnach nur die Annahme übrig, dass bei vorhandener Flüssigkeitsströmung im Innern des Diaphragma's eine geringere Elektricitätsmenge durch den Querschnitt fliesst, als bei Verhinderung der Flüssigkeitsströmung, so dass also in der Gleichung $W = J^2R$ durch Verminderung von J an der betreffenden Stelle des Stromkreises ein Theil der producirten Wärmemenge W verschwindet um den zur Erzeugung der Flüssigkeitsströmung erforderlichen Arbeitsaufwand zu decken.

Eine Verminderung von J im Innern des Diaphragma's ist

---

1) *Edlund.* Experimenteller Beweis, dass der galvanische Leitungswiderstand von der Bewegung des Leiters abhängig ist. *Pogg.* Ann. Bd. 156. p. 251.

2) Ich habe dieser Angabe diejenigen Werthe zu Grunde gelegt, welche *Quincke* in seiner ersten Abhandlung (*Pogg.* Ann. Bd. 107, p. 25) für ein Diaphragma aus Thon von 25 Mm. Durchmesser und 1,640 Mm. Dicke bei einem Drucke von 1981 Mm. Quecksilber erhielt. Die während 1 Minute durch das Diaphragma geflossene Wassermenge betrug 3,260 Gramm, aus welchen Daten sich die oben angegebene Geschwindigkeit leicht berechnet.

aber nur durch das Auftreten neuer elektromotorischer Kräfte im Stromkreise möglich, welche bestrebt sind, die primäre elektrische Strömung zu hemmen, d. h. einen der letzteren entgegengesetzten Strom zu erzeugen.

Man gelangt demgemäss zu folgendem Resultate:

> Die Diaphragmenströme und ihre Modificationen verdanken ihren Ursprung dem Auftreten neuer elektromotorischer Kräfte von solcher Beschaffenheit, dass der durch diese Kräfte in der bewegten Flüssigkeit erzeugte elektrische Strom, so lange sie mit den Canälen des Diaphragma's oder der Capillarröhre in Berührung steht, stets entgegengesetzt einem elektrischen Strome fliesst, welcher die Flüssigkeit in demselben Sinne wie der mechanische Druck durch das Diaphragma treiben würde.

Folglich sind die von *Quincke* und mir beim Hindurchpressen von destillirtem Wasser durch poröse Diaphragmen und dünne Glasröhren im Galvanometerdrahte beobachteten elektrischen Ströme sogenannte Zweigströme, bei denen der Draht des Multiplicators eine Nebenschliessung des zwischen den Enden des Diaphragma's oder der Röhre fliessenden elektrischen Stromes bildet. —

Zweiter Theil.

7.

Betrachtet man durch die vorangegangenen Untersuchungen den inneren Zusammenhang zwischen den Diaphragmenströmen *Quincke*'s und den von mir beobachteten Reibungsströmen als erwiesen, so kann man mit Berücksichtigung der erwähnten Reciprocität dieser Ströme und der dabei stattfindenden relativen Verschiebung sich berührender Körperschichten, das gewonnene Resultat allgemeiner in folgendem Satze aussprechen:

> »Bei der gleitenden Reibung zweier hetero-

genen Körper werden elektrische Ströme erzeugt, welche bestrebt sind, die beiden Körper in entgegengesetzter Richtung ihrer relativen Bewegung zu verschieben.«

Die in diesem Satze ausgesprochene Wechselwirkung zweier Körper bezieht sich auf Entfernungen derselben, welche vom Standpuncte der atomistischen Theorie der Materie als Molecular-Entfernungen bezeichnet werden, und daher wegen ihrer Kleinheit unsichtbar sind.

Fragt man nun, ob es einen analogen Satz für die Wechselwirkung zweier Körper giebt, welche sich in grossen und daher sichtbaren Entfernungen gegen einander verschieben, so ist dies in der That bei Körpern der Fall, welche von elektrischen Strömen durchflossen werden, und hierdurch gegenseitig eine inducirende Wirkung ausüben.

Denken wir uns z. B. die beiden Körper in Gestalt zweier kreisförmiger kupferner Drahtringe gegeben, von denen der eine von einem constanten elektrischen Strom durchflossen wird, so lässt sich die durch elektrische Induction zwischen beiden Ringen erzeugte Wechselwirkung folgendermaassen aussprechen:

»Bei der relativen Verschiebung zweier, von elektrischen Strömen durchflossenen Leiter werden elektrische Ströme erzeugt, welche bestrebt sind, die beiden Leiter in entgegengesetzter Richtung ihrer relativen Bewegung zu verschieben.«

Diese Beziehung ist zuerst von *Lenz*, [1]) kurze Zeit nach *Faraday*'s Entdeckung der Volta-Induction mit folgenden Worten ausgesprochen worden:

»Wenn sich ein metallischer Leiter in der Nähe eines galvanischen Stromes bewegt, so wird in ihm ein elektrischer Strom von solcher Richtung erregt, dass durch die elektrodynamische Wirkung des erregenden auf den erregten Strom die dem Leiter desselben ertheilte Bewegung gerade entgegengesetzt der Bewegung wäre, welche den Inductionsstrom veranlasst hat, vorausgesetzt, dass der inducirte Leiter nur in der Richtung der

1) *Lenz*. *Poggendorff*'s Ann. Bd. 31.

ertheilten Bewegung und in der entgegengesetzten beweglich wäre.«

In dieser Form tritt die Analogie dieses Gesetzes noch deutlicher mit dem von mir für die Reibungsströme gefundenen Gesetze hervor. Man beachte nun, dass der experimentelle Beweis von der Existenz dieser letzteren Ströme wesentlich an die Bedingung geknüpft ist, dass die Ausgleichung der an den Enden des Reibzeuges auftretenden freien Elektricitätsmengen nicht vollständig im Reibzeug selber stattfinden darf, weil sonst der durch den Multiplicatordraht fliessende Zweigstrom verschwindend klein sein würde. Man kann daher diese Ströme nicht beobachten, wenn man an Stelle des schlecht leitenden Leders z. B. ein Stück Stanniol anwenden würde. Wenn aber das gefundene Gesetz ein tiefer in der Natur der Körper begründetes ist, so werden dessenungeachtet diese Ströme im Innern des metallischen Reibzeuges existiren, sei es, dass die Länge der Strombahn, wie früher, von einem Ende des Reibzeuges zum andern geht, sei es, dass sich dieselbe in kleine Partialströme auflöst, welche, ähnlich den in Fig. 4, Taf. II dargestellten Strömen, in jedem Elemente des metallischen Reibzeuges fliessen.

Die Summe dieser elementaren Partialströme würde hinsichtlich ihrer Wirkung dieselbe bleiben, wie in dem früheren Falle bei längerer Strombahn. Wenn daher allgemein bei der gleitenden Reibung zweier heterogener Körper ein Theil der dabei aufzuwendenden Arbeit zur Erzeugung elektrischer Ströme benutzt wird, die nur unter gewissen Bedingungen direct beobachtet werden können, so liegt der Gedanke nahe, dass möglicherweise die ganze Arbeit, welche bei der gleitenden Reibung geleistet werden muss, ihren Ursprung in der Erzeugung elektrischer Bewegungen im Innern der Körper hat.

Die erste Folgerung einer solchen Hypothese bestände darin, dass das Gesetz des mechanischen Widerstandes, welcher bei der gleitenden Reibung zweier sich berührender Flächen eines oder verschiedener Körper zu überwinden ist, übereinstimmt mit dem Gesetz des mechanischen Widerstandes, welcher durch Induction elektrischer Ströme erzeugt wird.

Dies ist nun in der That in aller Strenge der Fall, indem dieser Widerstand sowohl bei der Reibung als bei der Induction

proportional der relativen Geschwindigkeit der bewegten Körper sich ändert.

Diese Uebereinstimmung lässt sich, abgesehen von ihrer theoretischen Begründung, direct experimentell nachweisen, und zwar am genauesten durch Beobachtungen über das Gesetz, nach welchem die Amplituden von Schwingungen eines Körpers abnehmen, welcher unter dem Einflusse von Kräften schwingt, die einerseits durch elektrische Induction andrerseits durch gleitende Reibung hervorgerufen werden, welche der schwingende Körper vermöge seiner Bewegung selbst erzeugt.

Gauss[1]) zeigte, dass ein Körper, welcher unter dem Einflusse von Widerstandskräften schwingt, die in jedem Augenblicke der Geschwindigkeit der Bewegung proportional sind, Amplituden beschreibt, die in einer geometrischen Reihe abnehmen. Bezeichnet T die Schwingungsdauer, ε die Widerstandskraft, e die Basis des natürlichen Logarithmensystems und $\frac{A}{A_1}$ das Verhältniss zweier aufeinander folgenden Amplituden, so ist

$$\frac{A}{A_1} = e^{-\varepsilon . T}$$

woraus

$$\log_n A_1 - \log_n A = \varepsilon T.$$

Es sind folglich die Differenzen der Logarithmen zweier auf einander folgenden Schwingungsamplituden constant. Diese Differenz ist von *Gauss* als das logarithmische Decrement bezeichnet worden und man sieht, dass dasselbe bei constanter Schwingungsdauer T proportional der widerstehenden Kraft ε ist. Es wird folglich die Constanz des logarithmischen Decrements bei constanter Schwingungsdauer eines Körpers den Beweis liefern, dass diese Schwingungen unter dem Einfluss von Widerstandskräften stattfinden, welche das oben ausgesprochene Gesetz der Proportionalität zwischen Geschwindigkeit und Widerstand befolgen.

Wilhelm Weber[2]) hat nun bereits im Jahre 1846 mit Hülfe

1) *Gauss'* Werke, Bd. V. 383. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837. p. 74 ff.

2) Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft d. W. 1846. *S. Hirzel.* Ich erlaube mir bei dieser Gelegenheit zu bemerken, dass die sämmtlichen bis zum Jahre 1871 publicirten Abhandlungen *Weber's* in einem Bande vereinigt bei *S. Hirzel* in Leipzig erschienen sind.

seines Elektrodynamometers bewiesen, dass das Gesetz der durch Volta-Induction erzeugten Dämpfung mit dem obigen Gesetze vollkommen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler übereinstimmt.

Da ein Magnet nach *Ampère* und *Weber* als ein Aggregat gleichgerichteter, permanenter Molecularströme betrachtet werden kann, so ist dieses Gesetz auch für die Schwingungen gültig, welche ein magnetisirter Körper in einer Kupferhülse vollführt, und bekanntlich bedient man sich jetzt allgemein dieses, zuerst von *Gauss* a. a. O. angewandten, Mittels zur Dämpfung der Schwingungen in galvanometrischen Apparaten.

Für die gleitende Reibung in homogenen tropfbar- oder elastischflüssigen Körpern gilt nun ganz dasselbe Gesetz und es ist von *Stokes*[1]) und *O. E. Meyer*[2]) gezeigt worden, dass dasselbe mit Vortheil benutzt werden kann, um aus dem logarithmischen Decremente einer schwingenden, kreisförmigen Scheibe den Reibungscoefficienten derjenigen Flüssigkeit zu bestimmen, in welcher diese Schwingungen stattfinden.

Die obige Hypothese, es entspringe der bei der gleitenden Reibung zweier Körper auftretende Widerstand aus elektrischen Bewegungen im Innern der Körper, führt also zu Folgerungen, welche mit den Beobachtungen nicht nur qualitativ übereinstimmen, sondern auch das Gesetz jenes Widerstandes im Einklange mit den Erscheinungen darstellen.

Eine weitere Folgerung aus unserer Hypothese wird nun darin bestehen, dass auch alle anderen Wirkungen, welche bei der Reibung auftreten, gesetzmässig mit denjenigen Wirkungen übereinstimmen, welche elektrische Ströme in Körpern erzeugen können.

Bekanntlich ist die Wärmeentwickelung eine von der Reibung unzertrennliche Wirkung, so dass Graf *Rumford* und später *Joule* in seiner epochemachenden Arbeit »über das mechanische Aequivalent der Wärme, bestimmt durch die Wärmeentwickelung bei Reibung von Flüssigkeiten,«[3]) direct die durch Reibung entwickelte Wärme mit der

1) Cambridge Transactions. Bd. 9. Thl. 2. 1851.

2) *Crelle*'s Journal, Bd. 59 und *Pogg.* Ann. Bd. 113, (1861) und Bd. 125. p. 200.

3) Philos. Magazine (1847) Vol. XXX. p. 173. Ich erlaube mir hier darauf hinzuweisen, dass die sämmtlichen Abhandlungen *Joule*'s, welche für die Begründung des mechanischen Wärmeäquivalents eine fundamentale

dabei verbrauchten mechanischen Arbeit vergleichen und das Gesetz der Proportionalität feststellen konnte.

Es entwickelt nun aber auch jeder elektrische Strom in einem Leiter Wärme, welche nach dem Gesetz von *Joule* und *Lenz* proportional dem Quadrate der Stromstärke und dem Widerstande ist. Diese Eigenschaft müssen daher auch die in der oben angegebenen Weise erregten Inductionsströme besitzen, wenn ein Leiter in der Nähe eines von einem Strom durchflossenen Leiters bewegt wird.

Bei dieser Bewegung wird vermöge des oben erwähnten Widerstandes eine mechanische Arbeit geleistet, ähnlich wie bei der Reibung durch Ueberwindung des Reibungswiderstandes. Soll daher in beiden Fällen der auftretende Widerstand aus derselben Ursache, d. h. aus elektrischen Inductionsströmen, entspringen, so muss auch in beiden Fällen die zur Bewegung aufgewandte Arbeit proportional der erzeugten Wärme sein.

Auch diese Folgerung stimmt sowohl mit den Beobachtungen, als auch mit den aus dem Principe von der Erhaltung der Energie abgeleiteten Schlüssen überein. [1])

Fasst man daher die bisher erlangten Resultate zusammen, so kann man dieselben in folgendem Satze aussprechen:

> Betrachtet man die bei der gleitenden Reibung zweier Körper oder zweier Schichten desselben Körpers auftretenden Erscheinungen als Wirkungen elektrischer Inductionsprocesse im Innern der Körper, so stimmt sowohl die Beschaffenheit als auch das Gesetz dieser Wirkungen mit der Erfahrung überein.

Der Unterschied beider Gebiete von Erscheinungen würde durch diese Anschauung nur auf eine Verschiedenheit der räumlichen Verhältnisse zurückgeführt, unter denen dieselben beobachtet werden. Während in dem einen Falle die elektrischen Ströme inducirende Wirkungen in direct messbaren Abstän-

---

Bedeutung erlangt haben, in einer deutschen Uebersetzung von *J. W. Spengel* bei Vieweg in Braunschweig 1871 erschienen sind.

1) *Joule.* Ueber die erwärmenden Wirkungen der Magneto-Elektricität und über den mechanischen Werth der Wärme. Philos. Mag. Ser. III. vol. 23. p. 263 ff. 347 ff. 435 ff.

Edlund. Pogg. Ann. 123.

den hervorrufen, geschieht dies im anderen Falle bei den inducirenden Wirkungen zweier Körperschichten nur in Molecular-Abständen, welche direct unmessbar sind.

Es würden daher von diesem Gesichtspuncte aus alle Erscheinungen der elektrodynamischen Dämpfung und magnetelektrischen Licht- und Wärmeentwickelung[1]) als die Wirkungen einer Reibung *in distans* aufzufassen sein.

8.

Wenn die in Obigem nachgewiesenen Analogieen zwischen den Erscheinungen der gleitenden Reibung und den Erscheinungen der elektrodynamischen Induction dazu benutzt werden sollen, um aus dieser Gleichheit der Wirkungen auf eine Gleichheit ihrer Ursachen zu schliessen, so wird es zweckmässig sein zu untersuchen, in wie weit die hierzu erforderliche Hypothese von der Existenz permanenter elektrischer Molecularströme im Innern der Körper auch auf andern Gebieten von Erscheinungen bereits als nothwendig anerkannt und zu befriedigender Uebereinstimmung der daraus abgeleiteten Folgerungen mit der Erfahrung geführt hat.

In der That ist nun die Hypothese von der Existenz solcher permanent im Innern der Körper fliessenden Molecularströme bereits vor mehr als 50 Jahren zuerst von *Ampère* gemacht worden, um die Wechselwirkung zwischen beweglichen, von galvanischen Strömen durchflossenen, Leitern und permanenten Magneten zu erklären. Ein solcher Magnet enthält nach *Ampère* je nach seiner Stärke eine grössere oder geringere Zahl gleichgerichteter Molecularströme, von denen jeder einzelne sich wie ein kleiner Molecularmagnet verhält.

Man könnte nun gegen diese Hypothese vielleicht den Einwand erheben, dass sie die Existenz von elektrischen Strömen voraussetzt, welche ohne elektromotorische Kraft fortbestehen sollen, d. h. ohne die Existenz einer Kraft, welche die elektrischen Theilchen fortdauernd in der Richtung ihrer Strombewegung antreibt. Denn alle elektrischen Ströme, welche wir wirklich in der Natur beobachten und willkürlich hervorrufen, bedürfen

1) Wie z. B. in den Maschinen von *Siemens* und *Ladd*.

einer solchen elektromotorischen Kraft, weil sie in ihren Bahnen einen Widerstand zu überwinden haben, ähnlich wie ein Himmelskörper einer solchen fortdauernd ihn vorwärts treibenden Kraft bedürfte, wenn der Raum, in welchem er sich bewegt, ein widerstehendes Medium enthielte.

Es würde daher die Annahme von beharrlichen Molecularströmen im Innern der Körper identisch sein mit der Annahme, dass diejenigen Theilchen, aus deren Wechselwirkung alle elektrischen und magnetischen Erscheinungen entspringen, sich in widerstandslosen, d. h. leeren Räumen, ähnlich wie die Weltkörper im Himmelsraume, in geschlossenen Bahnen bewegen. Alsdann würde man nach den Principien der *Galilei-Newton*'schen Mechanik ebenso wenig einer stetig treibenden Kraft bedürfen, wie dies bei den Bewegungen der Himmelskörper erforderlich ist. Die Existenz einer Centralkraft und einer ursprünglich vorhandenen Bewegung des angezogenen Körpers genügt, um nach dem Gesetze der Trägheit unter Voraussetzung eines passenden Verhältnisses der erwähnten Grössen, eine ewige Bewegung in geschlossener Bahn zu erzeugen. Nur durch äussere Kräfte kann diese Bewegung geändert oder vernichtet werden. Wie man sieht, kommt also die Hypothese von beharrlichen elektrischen Strömen im Innern der Körper auf die Hypothese von der Existenz von leeren, d. h. widerstandslosen Räumen im Innern der Körper zurück. Diese Hypothese fällt aber wieder zusammen mit der Hypothese von der atomistischen Constitution der Materie, so dass, wenn man diese Hypothese den Erklärungen der Naturerscheinungen zu Grunde legt und die beiden Gattungen der elektrischen Theilchen gleichfalls als materielle, d. h. aus trägen Massen bestehende Theilchen betrachtet, welche relative Geschwindigkeiten besitzen und im Ruhezustande durch die aus den elektrischen Erscheinungen erkannten Centralkräfte auf einander wirken, — dass alsdann die Möglichkeit beharrlicher Bewegungen der elektrischen Theilchen im Innern der Körper keiner neuen Hypothese bedarf, sondern bereits in den Prämissen der atomistischen Theorie enthalten ist. Neuerdings hat aber auch *Wilhelm Weber*[1]) gezeigt, dass zwei ungleichartige

1) Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. Abhandlungen d. K. Sächs. Ges. d. W. Bd. X »Ueber Ampère'sche Molecularströme«, p. 45.

elektrische Theilchen vermöge der zwischen ihnen stattfindenden Wechselwirkung im widerstandslosen Raume wirklich eine solche geschlossene Bewegung um einander ausführen müssen, deren elektrodynamische Fernewirkung in jeder Beziehung den Wirkungen eines *Ampère*'schen Molecularstromes entspricht.

Dagegen ist die Continuitätstheorie der Materie, welche sämmtliche Erscheinungen der Elektricität und des Magnetismus auf Bewegungen eines continuirlichen Fluidums zurückführen will, bereits zur Erklärung der blossen Möglichkeit solcher beharrlichen Bewegungen im Innern der Körper, etwa in Form von Wirbelringen oder Wirbelfäden u. dgl. m., gezwungen, eine neue Hypothese über die Beschaffenheit jenes incompressiblen Fluidums einzuführen, nämlich die Annahme, dass in demselben absolut keine Reibung existirt. Während also die Atomistik nur eine mit dem Begriffe des Raumes zusammenfallende Eigenschaft desselben, nämlich seine absolute Widerstandslosigkeit voraussetzt, um beharrliche Bewegungen zu erklären, muss die Continuitätstheorie den durch die Erfahrung gegebenen Eigenschaften der Flüssigkeiten, hypothetisch eine allen physischen Flüssigkeiten zukommende Eigenschaft, nämlich die innere Reibung, absprechen. Denn durch Reibung wird ebenso wie durch Stoss und Druck lebendige Kraft im Innern der Flüssigkeiten übertragen. Wenn man daher bei einer Flüssigkeit von diesen beiden Eigenschaften, welche erfahrungsmässig alle Flüssigkeiten besitzen, nur die letztere annimmt, die erstere aber als nicht vorhanden voraussetzt, so ist diese Trennung zweier in der Natur stets verbundenen Eigenschaften eine neue, und wie mir scheint sogar eine sehr kühne Hypothese, welche die Continuitätstheorie der Materie ihrer ursprünglichen Annahme von der Existenz eines continuirlichen Fluidums als zweite Hypothese hinzufügen muss, um nur die Möglichkeit beharrlicher Bewegungen in geschlossenen Bahnen zu erklären. Die atomistische Hypothese braucht zu diesem Zwecke aber nur die Hypothese eines widerstandslosen Raumes und hat den grossen Vortheil, dass ihr gegenwärtig durch die hohe Vollendung der Astronomie auch empirisch die Möglichkeit von der Existenz eines solchen Raumes, innerhalb der Grenzen astronomischer Beobachtungsfehler, bewiesen ist.

Die neueren Vertreter der Continuitätstheorie führen unter

Anderem auch als Argument für dieselbe an, dass die Annahme einer *actio in distans*, welche die Atomistik zwischen den letzten Atomen der Körper ebenso wie die Astronomie zwischen den einzelnen Gestirnen voraussetzen muss, undenkbar sei, weil ein Körper dort nicht wirken kann, wo er nicht ist. »*Corpus ibi agere non potest, ubi non est*«, sagten die Scholastiker. So bemerkt z. B. *Cl. Maxwell* in einer Rede »*on action in distance*:«[1])

> »*it is asked, by the advocates of mediate action, whether, in those cases in which we cannot perceive the intermediate agency, it is not more philosophical to admit the existence of a medium, which we cannot at present perceive, than to assert, that a body can act at a place where it is not.*«

Es scheint mir dieses hierin ausgesprochene Bedenken zu verschwinden, wenn man zunächst versucht, eine andere Frage zu beantworten, welche jedenfalls der obigen vorausgehen muss, nämlich die Frage: »wo existirt ein Körper?« Offenbar »da wo er wirkt«, d. h. da, wo wir Wirkungen desselben an uns oder andern Körpern wahrnehmen.

In diesem Sinne existirt z. B. der Mond an der Erdoberfläche, wenn er die Fluthwelle des Meeres erzeugt oder die Lage des Schwerpunctes der Erde verändert, ganz ebenso wie ein Körper in unserer Hand existirt, wenn derselbe ihre Hautfläche durch Druck- oder Wärmewirkungen afficirt und wir auf diese Weise zur Vorstellung von der localisirten Existenz eines Körpers gelangen. Von diesem verallgemeinerten Gesichtspuncte, welcher die Localisirung der Körper nicht willkürlich nur von einer besonderen Gattung von Wirkungen, sondern von jeder durch die Erfahrung bewiesenen Wirkung der Körper abhängig macht, verschwindet der Unterschied zwischen Contact- und Fernewirkung. Dass ein Körper den Bewegungszustand eines andern aus einer für unseren gegenwärtigen Organismus sichtbaren Entfernung zu verändern vermag, ist nicht minder eine Thatsache der Beobachtung, wie der Widerstand und Druck, welchen ein Körper in einer für uns unsichtbaren Entfernung, die wir Berüh-

---

1) Proceedings of the Royal Institution 1873. Febr. 4. Prof. *J. Clerk Maxwell* »on Action in distans«.

rung nennen, auf uns oder einen andern Körper ausübt. Dass zwischen den räumlichen Bedingungen, unter denen wir diese beiden Klassen von Wechselwirkung zwischen Körpern beobachten, eine absolute Verschiedenheit existire, so dass in dem einen Falle der räumliche Abstand der Oberflächen zweier Körper ein endlicher sei, im andern Falle aber absolut Null sein müsse, ist eine durchaus willkürliche Annahme, zu der wir uns nur durch den Schein verführen liessen. Ebenso wenig wie wir berechtigt sind, für den Abstand zweier physisch gegebenen Körper einen absolut genauen Grössenwerth anzunehmen, sondern stets nur einen solchen, welcher in den Fehlergrenzen der angewandten Beobachtungsmethode eingeschlossen ist, ebenso wenig sind wir berechtigt, für den Abstand zweier Körperoberflächen den absolut genauen Werth Null anzunehmen.

Aber nur unter dieser Annahme sind die räumlichen Verhältnisse zweier Körper bei der Berührung absolut und nicht blos relativ verschieden von denjenigen, bei welchen sie aus einer für uns sichtbaren und deshalb direct messbaren Entfernung auf einander wirken.

Dass *Newton* bei Abfassung seiner Principien vollkommen diese Anschauungen theilte, geht wohl am deutlichsten aus dem Umstande hervor, dass er die zweite Auflage seines Werkes mit einer Vorrede bereicherte, welche von *Roger Cotes* verfasst worden ist, einem hochbegabten Mathematiker, welchen *Newton* wegen seines umfassenden Geistes besonders schätzte.

Diese ganze Vorrede ist nun im Wesentlichen nichts Anderes als eine scharfsinnige Vertheidigung der Atomistik und unvermittelten Fernewirkung der Materie. Dass diese Vorrede aus Cambridge vom 12. Mai 1713 datirt ist, also aus einer Zeit, in welcher *Newton* bereits im 71. Lebensjahre stand, beweist zur Genüge, dass die hierin von *Cotes* ausgesprochenen Gedanken mit *Newton*'s innerster Ueberzeugung in Uebereinstimmung gewesen sind.

Es mag mir gestattet sein, zur Erläuterung des Gesagten hier einige Stellen dieser Vorrede im Originaltext [1]) anzuführen, welchen die deutsche Uebersetzung von Prof. *Wolfers* (Berlin 1872) beigefügt ist.

---

1) Ausgabe von *Le Seur* und *Jacquier*, Genevae 1739.

Stellen aus der Vorrede
zu
Newton's Philosophiae naturalis Principia mathematica
von
Roger Cotes.
(1713.)

Original.

„*Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt et mobilia et impenetrabilia: et inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse et mobilia et impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: et inde concludimus corpora universa etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hae fixarum affectiones nondum sint observatae.*" (*p. XXII.*)

„*Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere ve-*

Uebersetzung von Prof. Wolfers.

»Alle Körper, welche wir beobachtet haben, sind ausgedehnt, beweglich und undurchdringlich; und hieraus schliessen wir, dass alle Körper, auch die nicht beobachteten, ausgedehnt, beweglich und undurchdringlich sind. Ebenso sind alle beobachteten Körper schwer, und hieraus schliessen wir auf die Schwere aller Körper, auch derjenigen, welche wir nicht beobachtet haben. Wollte Jemand behaupten, die Fixsterne seien nicht schwer, weil man ihre Schwere noch nicht wahrgenommen hat, so könnte man aus demselben Grunde die Behauptung aufstellen, dass sie weder ausgedehnt, noch beweglich, noch undurchdringlich seien, weil man diese Eigenschaften derselben noch nicht beobachtet hat.« (p. 11.)

»Wenn daher gezeigt ist, dass in der Natur eine wirkliche Anziehung aller

rum locum in rerum natura; quinetiam ostensum fuerit, qua ratione motus omnes caelestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit et merito deridenda objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse vel maxime concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phaenomena per vortices explicari.« (*p. XXIV.*)

Dinge stattfinde; wenn ferner auch gezeigt ist, nach welcher Weise man alle Bewegungen am Himmel durch sie erklären könne, so würde der Einwurf, dass dieselben Bewegungen durch Wirbel erklärt werden müssten, wenn wir auch die Möglichkeit der letztern zugegeben hätten, eitel und wahrhaft lächerlich sein. Wir geben aber diese Möglichkeit nicht zu. Die Erscheinungen können nämlich auf keine Weise durch Wirbel erklärt werden.« (p. 13.)

,,*Gravitas ergo non erit occulta causa motuum coelestium; siquidem ex phaenomenis ostensum est, hanc virtutem revera existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas, qui nescio quos vortices, materiae cujusdam prorsus fictitiae et sensibus omnino ignotae, motibus iisdem regendis praeficiunt.*" (*p. XXIII.*)

»Die Schwere wird daher keine verborgene Ursache der Erscheinungen am Himmel sein, indem aus den Erscheinungen selbst dargethan wird, dass sie wirklich existire. Diejenigen nahmen vielmehr zu verborgenen Ursachen ihre Zuflucht, welche, ich weiss nicht, was für Wirbel einer gänzlich ersonnenen und den Sinnen ganz unbekannten Materie annehmen, durch welche jene Bewegungen hervorgebracht werden sollen.« (p. 11.)

,,*Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem vero formarum varietatem, quae in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam et intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte*

»Sie behaupteten demnach, die allgemeine Materie sei homogen, und alle den begrenzten Körpern eigenthümliche verschiedene Formation entspringe aus gewissen, höchst einfachen und leicht zu erkennenden Beziehungen der sie

quidem progresso instituitur a simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit natura.

»*Verum ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras et magnitudines, incertoque situs et motus; quin et fingendi fluida quaedam occulta, quae corporum poros liberrime permeent, omnipotente praedita subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglecta rerum constitutione vera: quae sane frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certissimas observationes investigare possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesibus; etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissime procedant; fabulam quidem elegantem forte et venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.*« *(p. XVI.)*

zusammensetzenden Theilchen. In der That stellen sie so zwar ein Fortschreiten vom Einfachen zum Zusammengesetzten dar, wenn sie jene ursprünglichen Beziehungen der Theilchen so annehmen, wie die Natur sie zeigt.« »Allein ... da sie selbst gewisse verborgene Flüssigkeiten erdenken, welche die Poren der Körper frei durchwandern, eine sehr bedeutende Freiheit besitzen und durch verborgene Bewegungen angetrieben werden: so versinken sie in Träumereien, indem sie die wahre Einrichtung der Dinge vernachlässigen, welche man vergebens durch falsche Vermuthungen abzuleiten suchen wird, da man sie kaum selbst durch die sichersten Beobachtungen erforschen kann. Diejenigen, welche ihre Speculationen auf Hypothesen begründen, werden, wenn sie hierauf auf's strengste nach mechanischen Gesetzen fortschreiten, eine Fabel, vielleicht eine elegante und schöne, jedoch nur eine Fabel aufbauen.« (p. 4.)

»*Sunt qui gravitatem praeter naturam esse dicunt, et miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cum in physica praeternaturales causae locum non habeant. Huic ineptae prorsus objectioni diluendae, quae et ipsa philosophiam sub-*

»Manche halten die Schwere für unnatürlich, und nennen sie beständig ein Wunder. Sie wollen sie daher verwerfen, da in der Physik aussernatürliche Ursachen nicht stattfinden. Bei der Widerlegung dieses durchaus thörichten Einwurfes, welcher die ganze Naturfor-

ruit universam, vix operae pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt, quod tamen dici non potest: vel eo nomine praeter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideo ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariae corporum affectiones; quae quoniam sunt primariae, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon res hae omnes sint pariter praeter naturam, eoque pariter rejiciendae: viderint vero qualis sit deinde futura philosophia.« (p. XXIV.)

schung umstösst, zu verweilen, ist wohl kaum der Mühe werth. Entweder leugnen sie, dass die Schwere allen Körpern innewohne, — was jedoch nicht behauptet werden kann — oder sie halten sie deshalb für aussernatürlich, weil sie aus andern Beziehungen der Körper und daher nicht aus mechanischen Ursachen entspringt. Sicher finden ursprüngliche Beziehungen der Körper statt, welche von andern nicht abhängen, weil sie eben ursprüngliche sind. Man mag daher zusehen, ob nicht alle diese Beziehungen aussernatürliche, und desshalb zu verwerfen seien, und zusehen, wie künftig die Naturlehre beschaffen sein würde.« (p. 12.)

»Ideone autem gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur ex philosophia, quod causa ipsius gravitatis occulta est et nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuant absurdi, unde totius tandem philosophiae fundamentum convellantur.« (p. XXIII.)

»Wird man aber desshalb die Schwere eine verborgene Ursache nennen, und sie unter diesem Namen aus der Naturlehre verbannen, weil ihre Ursache verborgen und noch nicht gefunden ist? Diejenigen welche dies behaupten, mögen sehen, dass sie keine absurde Behauptung aufstellen, wodurch sie endlich die ganze Grundlage der Physik umreissen würden.« (p. 14.)

»Etenim causae continuo nexu procedere solent a compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam per-

»Obgleich man durch beständige Verknüpfung der Ursachen vom Zusammengesetzten zum Einfachen fortzuschrei-

veneris, jam non licebit ulterius progredi. Causae igitur simplicissimae nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas apellabis occultas, et exulare jubebis? Simul vero exulabunt et ab his proxime pendentes et quae ab illis porro pendent, usque dum a causis omnibus vacua fuerit et probe purgata philosophia.« *(p. XXIII.)*

ten pflegt, kann man doch nicht weiter kommen, sobald man zur einfachsten Ursache gelangt ist. Von der letztern kann keine mechanische Erklärung gegeben werden; würde diese gegeben, so wäre die Ursache noch nicht die einfachste. Wird man desshalb diese einfachsten Ursachen verborgene nennen und dieselben verbannen wollen? Zugleich würden dann auch die unmittelbar von ihnen abhängenden und eben so die weiter abhängenden Ursachen verbannt werden, bis die Naturlehre von allen Ursachen frei und gereinigt wäre.«(p. 12.)

Mit wie bewunderungswürdigem Scharfsinn hier *Roger Cotes* bereits vor 163 Jahren die Entfernung der Ursachen und Kräfte aus der Mechanik als letzte Consequenz der Continuitäts-Theorie, d. h. der Hypothese einer stetigen Raumerfüllung der Materie, hingestellt hat, beweist die so eben erschienene dritte Lieferung der »Vorlesungen über mathematische Physik von *G. Kirchhoff*.« [1])

In diesen Vorlesungen ist »die Annahme festgehalten, dass die Materie stetig den Raum erfüllt, wie sie es zu thun scheint, die Theorieen, die auf der Annahme von Molecülen beruhen, sind in ihnen nicht berührt.«

Im Gegensatze unserer ganzen bisherigen Anschauung von der Aufgabe der Mechanik in ihrer Anwendung auf »die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen«, d. h. also doch wohl auf wirklich existirende und nicht blos gedachte Bewegungen, erklärt *Kirchhoff* in der Vorrede zu seinem nur der ***reinen*** Mechanik gewidmeten Werke:

1) Vorlesungen über mathematische Physik von Dr. *Gustav Kirchhoff*, Professor der Physik an der Universität zu Berlin. Leipzig. 1876.

»ich stelle es als die Aufgabe der Mechanik hin, die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen zu beschreiben, und zwar vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben. Ich will damit sagen, dass es sich nur darum handeln soll, anzugeben, welches die Erscheinungen sind, die stattfinden, nicht aber darum, ihre Ursachen zu ermitteln.«

Bekanntlich suchen die Vertheidiger der Continuitätstheorie ihre Argumente gleichfalls durch die Autorität *Newton*'s zu stützen und berufen sich hierbei nach dem Beispiele *Faraday*'s auf einen Brief *Newton*'s an *Bentley*, den auch *Maxwell* a. a. O. mit folgenden Worten citirt:

»*But so far was Newton from asserting shat bodies really do act on one another at a distance independently of any thing between them, that in a letter to Bentley, which has been quoted by Faraday in this place, he says:*

»»*It is inconceivable that inanimate brute matter should, without the mediation of something else, which is not material, operate upon and affect other matter without mutual contact, as it must do if gravitation, in the sense of Epicurus, be essential and inherent in it . . .*«

Gestützt auf diese Aeusserungen *Newton*'s versucht *Maxwell* für die ganze Lehre von der *actio in distans* *Cotes* allein verantwortlich zu machen, indem er bemerkt:

»*The doctrine of direct action at a distance cannot claim for its author, the discoverer of universal gravitation. It was first asserted by Roger Cotes, in his preface to the »Principia« which he edited during Newton's life.*«

»*And when the Newtonian philosophy gained ground in Europe, it was the opinion of Cotes rather than that of Newton, that became most prevalent . . .*«

Welches psychologische Wunder aber Hr. *Maxwell* gleichzeitig mit dieser Argumentation statuirt, indem er es für möglich hält, dass ein Autor bei seinen Lebzeiten zwei Auflagen eines grossen Werkes mit der Vorrede eines Anderen in die Welt schickt, und letzterem gestattet, in dieser Vorrede Anschauungen und Principien zu entwickeln, welche mit den Ueberzeugungen des Autors in directem Widerspruche stehen, — dies

psychologische Räthsel scheint *Maxwell* bei seiner Beweisführung übersehen zu haben.

Indessen, ganz abgesehen hiervon, vermag ich zwischen den obigen Worten *Newton*'s und der Vorrede von *Cotes* gar nicht einen solchen Gegensatz zu finden, wie ihn die Vertreter der Continuitätstheorie für ihre Anschauungen auszubeuten beflissen sind. Es würde nämlich der wesentliche Inhalt jener *Newton*'schen Worte antithetisch ausgedrückt, folgendermaassen lauten:

> »*It is conceivable that animate, not brute matter should, without the mediation of something else, operate upon and affect other matter without mutual contact, as it must do if gravitation be essential and inherent in it . . .*«

Wenn man nämlich versucht, den Inhalt der beiden ursprünglichen Attribute »*inanimate*« und »*brute*« welche man der Materie beizulegen sich gewöhnt hat, im Gegensatze zu den Attributen »*animate*« und »*not brute*« bestimmter zu definiren, so gelangt man gerade zu denjenigen Eigenschaften, vermöge deren die Theile der Materie nur durch Druck und Stoss bei der Berührung auf einander wirken können.

Es ist daher kein Wunder, wenn unser Verstand aus solchen Eigenschaften, welche wir auf Grund einer unvollständigen Induction den Elementen der Materie beigelegt haben, nicht im Stande ist, andere Eigenschaften z. B. die *actio in distans*, für die Aggregate jener Elemente, d. h. für die Körper, abzuleiten. Der logische Widerspruch, der für unser bewusstes Denken in der Annahme einer solchen unvermittelten *actio in distans* zu liegen scheint, ist von uns selbst verschuldet, und rührt einfach daher, dass wir denselben Dingen, d. h. den Elementen der Materie, stillschweigend und daher ohne reifliche Ueberlegung, Attribute absprechen, welche wir später den Aggregaten jener Elemente wieder beizulegen genöthigt sind.

Hierdurch allein wird es begreiflich, weshalb wir uns Körper, deren Elemente aus solchem »*inanimate, brute matter*« bestehen, ebensowenig mit einer *actio in distans* begabt denken oder vorstellen können, wie einen kugelförmigen Würfel oder ein hölzernes Eisen. Wir müssen daher *Newton* vollkommen beipflichten, wenn er in seinem obigen Briefe an *Bentley* die Annahme einer unvermittelten Fernewirkung

eines solchen »*inanimate brute matter*« für absurd erklärt, und nicht glaubt, dass jemals ein Mensch auf solchen Gedanken verfallen kann, dem überhaupt eine competente Fähigkeit des wissenschaftlichen Denkens beizumessen ist (»*that one body can act upon another at a distance ... is to me so great an absurdity, that I believe no man who has in philosophical matters a competent faculty of thinking can ever fall into it*«).

Wenn nun in unseren Tagen das mit unübertroffenem Erfolge von *Newton* vertriebene Fluidum des *Cartesius* mit seinen »Wirbelringen«, »Wirbelfäden« und »vortex motions« von Neuem zwischen den Atomen und Molecülen der Körper sein verwirrendes Wesen treibt, so darf man nach dem glänzenden Siege der *Newton*'schen Principien in der Astronomie auch nicht an ihrem endlichen Siege in der Physik und Chemie verzweifeln. Diejenigen aber, welche mit dem bewunderungswürdigen Instrumente ihrer mathematischen Analyse die Natur der Körper durch Fluida und deren Wirbel zu ergründen hoffen, mögen die folgenden Worte von *Roger Cotes* beherzigen, welche derselbe den Vertretern der Continuitätstheorie gewidmet hat:

»Diese mögen an ihrer Ansicht Freude finden, jedoch müssen sie auch billig handeln, und anderen die Freiheit nicht versagen, welche sie für sich selbst in Anspruch nehmen. Es wird daher erlaubt sein, *Newton*'s System, welches uns wahrer erscheint, beizubehalten und zu umfassen, wie auch den durch Erscheinungen dargethanen Ursachen lieber zu folgen, als gänzlich erdichteten und noch nicht erwiesenen. Zur wahren Forschung gehört die Natur der Dinge aus wirklich existirenden Ursachen abzuleiten.[1])

2) Deutsche Uebersetzung von *Wolfers*, p. 12.
Im Original lautet die obige Stelle wie folgt:
»His sua licebit opinione frui; ex aequo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. Newtonianam itaque philosophiam, quae nobis verior habetur, retinere et amplecti licebit, et causas sequi per phaenomena comprobatas, potius quam fictas et nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis vere existentibus derivare.« (p. XXIV.)

9.

Die vorhergehend angestellten Betrachtungen, welche mir für den ungehinderten Fortschritt der folgenden Entwickelungen durchaus nothwendig erschienen, hatten den Zweck, den logischen und physikalischen Zusammenhang darzulegen, in welchem die Hypothese beharrlicher oder ewiger Bewegungen von elementaren Theilchen im Innern der Körper, mit den fundamentalen Principien der physikalischen Atomistik steht. Ich glaube gezeigt zu haben, dass diese Hypothese eine ebenso nothwendige Consequenz dieser Principien ist, wie die Hypothese von der beharrlichen Bewegung von kosmischen Massen eine Consequenz der von *Galilei* und *Newton* begründeten Mechanik des Himmels ist. Ja, man kann sogar behaupten, dass die hierbei erforderliche Voraussetzung eines absolut leeren Raumes, in welchem die Bewegungen vor sich gehen, bei den letzten physikalisch nicht mehr theilbaren Elementen der Materie in aller Strenge zutreffen muss, während man bei den Bewegungen kosmischer Massen jene Voraussetzung, im Hinblick auf das bewegungs- und wirkungsfähige Medium des Lichtes, principiell nur als eine in der Natur angenähert realisirte Bedingung betrachten darf. Dass jedoch diese Voraussetzung selbst dem gegenwärtigen Standpuncte der astronomischen Beobachtungen vollkommen genügt, ist eine allgemein bekannte Thatsache. Selbst die bisherigen Anomalien in den Bewegungen des *Encke*'schen Kometen, in welchen man geneigt war, den ersten directen Beweis für die Existenz eines widerstehenden Mediums im Weltraume gefunden zu haben, scheinen sich durch neuere Untersuchungen mit grosser Wahrscheinlichkeit als solche herauszustellen, welche, der Vermuthung *Bessel*'s [1]) ent-

---

1) Astronomische Nachrichten Bd. 13. p. 349. *Bessel*'s Werke, herausgegeben von Dr. *R. Engelmann*.

Bd. 1. p. 80 ff. *Bessel* bemerkt hier wörtlich: »Der grosse Einfluss einer Ausströmung auf die Bewegung des Cometen kann nur durch eine genau gleiche Ausströmung auf der entgegengesetzten Seite des Perihels vernichtet werden. Ob darin wirklich eine völlige Gleichheit, oder ob auf einer der beiden Seiten des Perihels ein Uebergewicht stattfindet, wissen wir nicht.« ... »Von dieser Art waren die Gründe, welche mich veranlassten in Nr. 289 der Astron. Nachr. zu äussern, dass die von *Encke* erwiesene Beschleunigung der Umläufe des von ihm erschöpfend berechneten

sprechend, den Reactionskräften der ausströmenden Materie auf den Kern des Kometen zugeschrieben werden müssen. [1])

Man könnte nun schliesslich noch die Analogie zwischen den permanenten Bewegungen der Himmelskörper umeinander in geschlossenen Bahnen und den Bewegungen der Molecüle und Atome umeinander deswegen als gewagt betrachten, weil zur Vermeidung von Collisionen innerhalb gewisser Zeiten und Räume das Verhältniss zwischen dem Abstande und dem Durchmesser der bewegten Massen gewisse Grenzen nicht überschreiten dürfe. Vergleichen wir z. B. in unserem Planeten-System die Abstände der Planeten und Trabanten mit den Halbmessern ihrer Centralkörper, so würde z. B. die mittlere Entfernung des Merkur von der Sonne 83, diejenige der kleinen Planeten im Durchschnitt 644, die des Jupiter 1118 und die des entferntesten Planeten 7754 Sonnenhalbmesser betragen, während andererseits der Mond von der Erde etwa 60 Erdhalbmesser entfernt ist. Nach Untersuchungen von *Clausius*, *Loschmidt*, *Meyer*, *W. Thomson* und *Cl. Maxwell* u. A. sind wir gegenwärtig im Stande, auch im Reiche der Moleculargrössen jene Verhältnisse zwischen den Abständen und den sogenannten Halbmessern der Molecüle selbst für flüssige und feste Körper in gewisse Grenzen einzuschliessen.

Die Ergebnisse derartiger Forschungen sind vor einiger Zeit »von *William Thomson* in einem populären Vortrage [2]) zusammengestellt und dabei gezeigt worden, dass zwischen den aus sehr verschiedenen Untersuchungen gezogenen Folgerungen eine über alle Erwartung grosse Uebereinstimmung besteht, durch welche die Wahrscheinlichkeit, dass jene Folgerungen nicht unrichtig seien, ausserordentlich erhöht wird.« [3]) Nach *W. Thomson* muss

Cometen nicht nothwendig von einem Widerstande herrühre. Es ist in der That nur bekannt, dass diese Beschleunigung stattfindet, nicht aber, aus welcher Ursache sie entstanden ist.«

1) Dr. *E. von Asten* »Ueber die Existenz eines widerstehenden Mittels im Weltraume. Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Petersbourg, Tome V. 21. Mai/2. Juni 1874.

Derselbe: »Ueber die Erscheinung des *Encke*'schen Cometen im Jahre 1875, nebst Bemerkungen über die Existenz eines widerstehenden Mittels im Weltraum. Ebendaselbst. 29. October/10. November 1874.

2) Nature No. 22. 31 March 1870. *Silliman*, Amer. Journ. [2] 50. 38 Annalen d. Chemie u. Pharmacie 1871 Bd. 157. S. 54.

3) *Lothar Meyer*. Die modernen Theorien der Chemie und ihre Bedeutung für die chemische Statik. 2. Aufl. (Breslau 1872.) p. 290.

nämlich bei flüssigen und festen Körpern der Abstand der Mittelpuncte zweier Molecüle innerhalb der Grenzen von $\frac{1}{14.10^6}$ und $\frac{1}{44.10^6}$ Mm. liegen; wogegen der Durchmesser eines Gasmolecüles nicht kleiner als $\frac{1}{5.10^7}$ Mm. sein kann. Die neuesten Angaben über diese Verhältnisse verdanken wir einem Vortrage *Maxwell*'s auf der britischen Naturforscherversammlung zu Bradford im Jahre 1873. Diesen Mittheilungen zufolge beträgt der Durchmesser des kugelförmig gedachten Wasserstoffmolecüles $\frac{58}{10^8}$ Mm. Drückt man nun die oben von *Thomson* für den Abstand zweier Molecüle eines flüssigen oder festen Körpers angegebenen Grenzwerthe von $\frac{1}{14.10^6}$ und $\frac{1}{46.10^6}$ Mm. in Einheiten des Halbmessers des Wasserstoffmolecüles von $\frac{29}{10^8}$ Mm. aus, so erhält man

$$\text{für die obere Grenze: } \frac{1}{14.10^6} : \frac{29}{10^8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{für die untere Grenze: } \frac{1}{46.10^6} : \frac{29}{10^8} = \frac{1}{13}$$

Wenn man daher unter jenen Durchmessern der Molecüle Grössen verstehen wollte, welche die kugelförmigen Räume absolut starrer und daher undurchdringlicher Massenelemente bestimmen sollen, so würde das erlangte Resultat keinen Sinn haben, denn alsdann würde der centrale Abstand solcher gleichgrossen Kugeln niemals kleiner als das Doppelte ihres Halbmessers werden können. Unter dieser Voraussetzung würden sich weder Wassermolecüle von der oben angegebenen Grösse noch Kohlensäuremolecüle, deren Durchmesser *Maxwell* zu $\frac{98}{10^8}$ Mm. angiebt, in solchen Abständen befinden können, welche *W. Thomson* als Grenzwerthe für feste und flüssige Körper bezeichnet hat.

Dieser Widerspruch verschwindet jedoch, wenn man erwägt, dass jene Dimensionen der Molecüle nur aus gewissen Wechselwirkungen derselben bestimmt sind, die als solche auch

nur Grenzwerthe für die Wirkungssphären der Molecüle, — so weit der Einfluss derselben bei unseren Beobachtungen merklich ist, — zu berechnen gestatten. So würde z. B. im gasförmigen Zustande, unter mittleren Druck- und Temperaturverhältnissen nach den Angaben *Maxwell's* der mittlere Weg, welchen ein Wasserstoffmolecül bis zur Wirkungssphäre seines Nachbarmolecüles zurückzulegen hat, $\frac{9650}{10^8}$ Mm. und der eines Kohlensäuremolecüles $\frac{3790}{10^8}$ Mm. betragen. Drückt man diese Abstände in Einheiten des Halbmessers der molecularen Wirkungssphären jener Stoffe aus, welche, wie bemerkt, nach *Maxwell's* Angaben für Wasserstoff $\frac{29}{10^8}$, für Kohlensäure $\frac{46}{10^8}$ Mm. betragen, so erhält man für den mittleren Abstand zweier Molecüle des Wasserstoffes 333 und für Kohlensäure 82 Halbmesser der molecularen Wirkungssphären jener Molecüle. Vergleicht man diese Werthe mit den oben für einige Planetenabstände in Einheiten des Sonnenhalbmessers ausgedrückten Zahlen, so sind dies Grössen von gleicher Ordnung, welche z. B. beim Merkur und der Kohlensäure nahezu übereinstimmen. Es können sich folglich im *gasförmigen* Zustande unter normalen Druck- und Temperaturverhältnissen die Molecüle des Wasserstoffes und der Kohlensäure ebenso ungehindert durch Centralkräfte umeinander in geschlossenen Bahnen bewegen, wie die Körper unseres Planetensystems um die Sonne.

Dass die Molecüle der sogenannten chemischen Elemente, d. h. derjenigen Stoffe, welche wir nach dem gegenwärtigen Stande unserer chemischen und physikalischen Hülfsmittel nicht mehr in einfachere zerlegen können, nicht bereits jene letzten Elemente der Materie sind, welche die Atomistik ihren Deductionen zu Grunde legt, ist eine gegenwärtig wohl ziemlich unbestrittene Annahme. Dieselbe haben sowohl hervorragende Chemiker wie *Dumas*, *Laurent* und *Gerhard* als auch neuere Physiker in übereinstimmender Weise und aus sehr verschiedenen Gründen gemacht.

So bemerkte u. A. *Clausius*[1]) bereits 1857 wörtlich:

1) *Pogg.* Ann. Bd. C. p. 353. Abhandlungen über mech. Wärmetheorie. 2. Abth. p. 244. (Braunschweig 1867.)

»Ich nehme an, dass die Kraft, welche die Entstehung chemischer Verbindungen verursacht, und welche wahrscheinlich in einer Art von Polarität der Atome besteht, auch schon in den einfachen Stoffen wirksam ist, und dass auch in diesen mehrere Atome zu einem Molecüle verbunden sind.«

Ueber die Grösse der Wirkungssphäre dieser letzten Atome wissen wir aber bisjetzt noch gar nichts, so dass wir auch nicht im Stande sind, für das Verhältniss zwischen den Entfernungen der Centra und Radien dieser Wirkungssphären ähnliche Werthe, wie oben für die Himmelskörper oder die Molecüle eines Gases zu berechnen.[1]) Es steht daher der Hypothese, dass jene Verhältnisse mindestens Grössen von derselben Ordnung wie diejenigen bei den Himmelskörpern sind, keine Thatsache im Wege, und so lange dies der Fall ist, genügt diese Annahme, um die Bewegungen der letzten Atome der Materie im Innern aller Körper ebenso als permanente und ungehindert in geschlossenen Bahnen vor sich gehende Bewegungen zu betrachten, wie dies factisch bei den Gestirnen für den gegenwärtigen Zustand unserer Beobachtungsmethoden erwiesen ist.

Betrachtet man also bei einem *Ampère*'schen Molecularstrom die beiden elektrischen Theilchen $+e$ und $-e$ nebst ihren trägen Massen ε und ε' als jene letzten Atome der Materie, so ist die beharrliche Existenz dieses Molecularstromes eine ebenso nothwendige Consequenz einer einmal vorhandenen Bewegung, wie die beharrliche Existenz der geschlossenen Bahn eines Planeten oder Trabanten in einem Weltsysteme. Unter dieser Voraussetzung hätte man sich ein materielles Molecül als ein Aggregat paarweise mit einander verbundener und in freien Bahnen beweglicher Elektricitätstheilchen vorzustellen, von denen jedes Paar durch seine beharrliche Bewegung in einer geschlossenen Bahn einen *Ampère*'schen Molecularstrom darstellt. Durch die beliebig vertheilte Lage dieser Ströme würde in hinreichender Entfernung zweier solcher Molecüle nur diejenige Wirkung übrig bleiben, welche man als Gravitation bezeichnet hat, vermöge

1) *Lothar Meyer* bemerkt hierüber in seiner oben angegebenen Schrift p. 291:

»Welche Dimensionen nun aber den Atomen zuzuschreiben seien, die eine Molekel zusammensetzen, lässt sich zunächst nicht angeben.«

welcher sich Aggregate solcher Molecüle proportional dem Producte ihrer trägen Massen nach dem *Newton*'schen Gesetze anziehen. Die Erscheinungen der Elektrolyse erfordern die weitere Annahme, dass solche materiellen Molecüle, je nach der Beschaffenheit ihrer Constitution, eine verschiedene Anziehungskraft auf die beiden Gattungen von elektrischen Theilchen $+e$ und $-e$ mit ihren trägen Massen ε und ε' ausüben. Durch diese Annahme wird die Fortführung zweier chemisch heterogener Bestandtheile eines Elektrolyten im entgegengesetzten Sinne, — ganz entsprechend der Theorie *Quincke*'s über die Fortführung suspendirter Theilchen, — in der Weise erklärt, dass das mit positiven Elektricitätstheilchen verbundene Molecül im Sinne der positiven Strömung fortgeführt wird.

Diesen Annahmen entsprechend hätte man sich jedes materielle Molecül eines Körpers als ein Aggregat beliebig gerichteter *Ampère*'scher Molecularströme mit einem gewissen Quantum frei beweglicher Elektrcitätstheilchen vorzustellen, welche unter dem Einfluss elektrostatisch oder elektrodynamisch inducirender Kräfte diejenigen Gruppirungen und Bewegungen vollführen, welche durch das *Weber*'sche Gesetz der elektrischen Wechselwirkung bestimmt sind.

Diese Vorstellung von der Constitution eines Körpermolecüles soll den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt und zunächst gezeigt werden, dass diese Annahme durchaus keine neue, sondern eine bereits seit langer Zeit zur Erklärung von sehr merkwürdigen Erscheinungen benutzte und nothwendige Hypothese ist, welche bisher noch durch keine andere von gleicher Tragweite ersetzt werden konnte.

10.

So lange man nur magnetische Körper kannte, d. h. solche, welche durch magnetische oder elektrodynamische Kräfte dergestalt in den magnetischen Zustand versetzt werden konnten, dass sie von dem inducirenden Körper, wie z. B. ein Stückchen Eisen von einem Magneten, angezogen wurden, war es nicht nothwendig elektrische Molecularströme anzunehmen, welche

durch den Einfluss des inducirenden Körpers gerichtet wurden. Durch die Annahme von richtungsfähigen Molecularmagneten in den Molecülen dieser Körper konnte jenen Erscheinungen in ganz ebenso befriedigender Weise genügt werden. Als aber *Faraday* durch seine Entdeckung des Diamagnetismus zahlreiche Körper kennen lehrte, welche gerade das entgegengesetzte Verhalten zeigten, indem sie von magnetisch inducirenden Körpern abgestossen wurden, war die Annahme von elektrischen Molecularströmen und frei beweglichen Elektricitätstheilchen im Innern der Körper keine willkürliche mehr. Denn es liessen sich diese merkwürdigen Erscheinungen nur dadurch erklären, dass jene frei beweglichen Elektricitätstheilchen sich bei Annäherung oder Erzeugung von Magnetismus zu elektrischen Molecularströmen von solcher Richtung und Lage anordnen, dass hieraus eine abstossende Wechselwirkung entspringt. Während wir diese Abstossung bei körperlichen Leitern, in denen der elektrische Strom einen Widerstand zu überwinden hat, nur so lange beobachten, als sich der inducirende Strom oder Magnet dem Leiter nähert, oder in der Nähe desselben anwächst, sind jene inducirten Molecular-Ströme im Innern der Körper beharrlich, da bei ihnen ebenso wenig wie bei den *Ampère*'schen Strömen in den intramolecularen Räumen ein Widerstand zu überwinden ist. Sie beharren folglich so lange als der inducirende Magnet in ungeänderter Entfernung und Stärke verharrt und erzeugen daher eine permanente Abstossung. Bei der Entfernung oder dem Verschwinden müssen auch jene Ströme wieder verschwinden, da hierbei der inducirende Process die entgegengesetzte Wirkung hat und somit jene Ströme wieder vernichtet.

Dies ist die Theorie des Diamagnetismus, welche *Wilhelm Weber* vor 25 Jahren vom Standpuncte der atomistischen Elektricitätstheorie gegeben hat. Diese Theorie erklärt folglich durch die Annahme von der Existenz widerstandslos im Innern der Körper beweglicher Elektricitätstheilchen Erscheinungen, welche sich nicht durch bewegliche Molecularmagnete erklären lassen. Es verhält sich demgemäss die Theorie der elektrischen Molecularströme zur Theorie der Molecularmagnete hinsichtlich des Diamagnetismus, wie die Undulationstheorie zur Emanationstheorie hinsichtlich der Interferenz.

Weber selbst spricht sich von diesem Gesichtspuncte über

die Bedeutung von *Faraday's* Entdeckung des Diamagnetismus folgendermassen aus:

»Die von *Faraday* entdeckten diamagnetischen Erscheinungen dienen daher zur Entscheidung der Alternative zwischen diesen beiden Theorien, gerade so, wie die Interferenzerscheinungen zur Entscheidung der Alternative zwischen Emissions- und Wellentheorie in der Optik gedient haben, und dies ist die wesentlichste und wichtigste Bedeutung, welche dieser Entdeckung gegeben werden kann. Durch die Entdeckung des Diamagnetismus wird also die Hypothese der elektrischen Molecularströme im Innern der Körper bestätigt; die Hypothese der magnetischen Fluida im Innern der Köper widerlegt.

Alle unsere Hypothesen oder Vorstellungen von den Körpern finden immer nur innerhalb eines begrenzten Bereiches von Erscheinungen Geltung, und unterscheiden sich von einander durch die grössere Beschränkung oder Ausdehnung dieses Bereiches. Wir schreiben ihnen Realität zu, so lange wir keine Erscheinungen kennen, die ausserhalb des Bereiches, für welches sie gelten, lägen; im entgegengesetzten Falle bezeichnen wir sie als ideal. Wenn nun auch die magnetischen Fluida künftig in die Reihe der idealen Vorstellungen gesetzt werden müssen, so behalten sie doch die nämliche Wichtigkeit und Bedeutung, die sie bisher besassen, so oft man die Betrachtungen auf denjenigen Kreis beschränkt, für welchen sie gelten. — Und wenn wir auch für jetzt den elektrischen Molecularströmen im Innern der Körper Realität zuschreiben, gleich wie dem Wellen fortpflanzenden Lichtäther in der Optik, so kann es doch geschehen, dass auch sie künftig, bei weiterer Ausbildung der Wissenschaft, in die Reihe der idealen Vorstellungen versetzt werden.«[1])

Weber hat in derselben Abhandlung noch Versuche und Messungen angestellt, welche die Existenz jener Molecularströme auch in den Molecülen magnetischer Körper zu beweisen be-

1) *Wilhelm Weber*, elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über Diamagnetismus. Abhandlungen d. K. Sächs. Ges d. W. Bd. I. p. 560.

stimmt sind. Indem er als Prototyp dieser Körper das Eisen wählte, bemerkt er S. 574 über das erlangte Resultat:

> »Es scheint hierdurch die Drehbarkeit der Eisenmolecüle ausser Zweifel gesetzt. Und da man nun diese Eisenmolecüle nach *Ampère* als die Träger von Molecularströmen betrachten kann, so ist dadurch eine vollständige Uebereinstimmung aller magnetischen Erscheinungen, auch derjenigen, welche an veränderlichen Magneten beobachtet werden, mit der Theorie der Molecularströme bewiesen, und es ist dadurch eine wichtige Bestätigung dieser Theorie durch die magnetischen Erscheinungen gewonnen worden, als Gewähr der vorher gegebenen Begründung derselben durch die diamagnetischen Erscheinungen.«

Eine zweite nicht minder wichtige Bestätigung hat die Hypothese von der Existenz beharrlicher Molecularströme und frei beweglicher Elektricitätstheilchen in den Elementen der Körper auf dem Gebiete der Optik erhalten. *C. Neumann* hat in seiner Abhandlung »über magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes« (Halle 1863) diese Hypothese zum Ausgangspuncte einer mathematischen Theorie jener merkwürdigen, gleichfalls von *Faraday* entdeckten, Erscheinung gemacht. Hierbei nimmt *Neumann* »für die Wirkung eines elektrischen Theilchens auf ein Aethertheilchen dasjenige Gesetz an, welches für die Einwirkung zweier elektrischen Theilchen aufeinander gilt, nämlich dasjenige Gesetz, welches *Weber* für diese Wirkung aufgestellt, und welches, wie *Weber* gezeigt hat, alle Erscheinungen sowohl die der ruhenden als auch die der in Bewegung begriffenen Elektricität umfasst.«[1])

Neumann gelangt auf Grundlage der hier angedeuteten Prämissen zu bestimmten Gesetzen jener Erscheinung, von denen die drei ersten eine directe Vergleichung mit den Beobachtungen ermöglichen. Diese drei Gesetze lauten folgendermassen:

1. »Der Ablenkungswinkel φ der Polarisationsebene ist proportional mit der Dicke Δ des Körpers.«
2. »Der Ablenkungswinkel φ ist proportional mit der Intensität der auf den Körper einwirkenden magnetischen Kraft R.«

1) *Neumann* p. 6. a. a. O.

3. »Der Ablenkungs-Winkel φ ist proportional mit dem Cosinus desjenigen Winkels c, unter welchem die Richtung der magnetischen Kraft R gegen die Richtung der Lichtstrahlen geneigt ist.«

Es stimmen nun in der That diese drei Gesetze vollständig mit den Resultaten der Beobachtung überein, denn es sind dieselben Gesetze, welche in mehr oder weniger specieller Gestalt bereits von *Faraday*, *Wiedemann* u. A. und später in der obigen allgemeinen Form auch von *Verdet*[1]) ausgesprochen worden sind. Um das erste und zweite Gesetz zu prüfen, wurden nach einander durchsichtige Körper von ein und derselben Substanz, welche aber verschiedene Dicken Δ besassen, in den Apparat eingeschaltet; gleichzeitig wurde auch die Grösse der auf den Körper einwirkenden magnetischen Kraft R durch Verstärkung oder Schwächung des im Apparate circulirenden elektrischen Stromes von einem Versuche zum andern abgeändert. Den oben erwähnten beiden Gesetzen zufolge ist unter diesen Umständen der Ablenkungswinkel der Polarisationsebene

$$\varphi = A . \Delta . R,$$

wo A eine Grösse darstellt, welche bei einer solchen Versuchsreihe denselben Werth besitzt. In der folgenden Tafel sind nun die Messungen angegeben, welche *Verdet* in Betreff dieser Formel bei einem Glasparallelepipedum angestellt hat, welches von den Lichtstrahlen bei einem Theil der Versuche parallel mit einer, bei einem andern Theil der Versuche parallel mit einer andern Kante durchlaufen wurde. Diese beiden Kanten waren 37.2 und 26.0 Millimeter lang. Die drei ersten Columnen in der folgenden Tabelle enthalten die durch directe Messung für die Dicke Δ, die magnetische Kraft R und den Ablenkungswinkel φ bei den einzelnen Versuchen gefundenen Werthe.

1) Ann. d. Chim. et Phys. 3e Sér. T. 41. p. 370; T. 43. p. 37; T. 52. p. 129.

A	R	2φ beobachtet	2φ berechnet	Differenz
37,2 Mm.	148,25	6° 55′	6°62′	— 7′
—	116,37	5 28	5 31	— 3
—	107,00	5 9	5 4	+ 5
—	92,87	4 26	4 24	+ 2
—	89,37	4 20	4 14	+ 6
—	83,50	4 4	3 57	+ 7
—	59,37	2 57	2 49	+ 8
26,0 Mm.	143,81	4 31	4 39	— 8
—	109,62	3 31	3 34	— 3
—	85,37	2 48	2 46	+ 2

Die Versuche *Verdet*'s, welche eine Vergleichung des dritten von *Neumann* aus seiner Theorie deducirten Gesetzes mit der Beobachtung gestatten, sind folgendermassen angeordnet. Als durchsichtiger Körper wurde hierbei wiederum ein rechtwinkeliges Glasparallelepipedum benutzt; die Lage desselben war aber bei diesen Versuchen eine andere als bei den früher erwähnten. Während früher nämlich der Glaskörper zwischen den beiden verticalen Polplatten des *Ruhmkorff*'schen Apparates so aufgestellt war, dass sein Mittelpunct ungefähr mit dem Mittelpuncte des Apparates zusammenfiel, befand sich derselbe bei der folgenden Versuchsreihe, vertical über dem Mittelpuncte des Apparates. Hierbei ruhte das Glasparallelepipedum auf einer festen horizontalen Unterlage in solcher Höhe, dass alle dasselbe in horizontaler Richtung durchlaufende Lichtstrahlen ungehindert über die beiden Polplatten hinweggehen konnten. Bei dieser Anordnung konnte der Winkel γ, welchen die mit den Lichtstrahlen parallele Kante des Parallelepipedums mit der Axe des Apparates, d. i. mit der Richtung der von dem Apparate ausgeübten magnetischen Kraft macht, dadurch, dass man das Parallelepipedum auf seiner horizontalen Unterlage um seinen Mittelpunct drehte, beliebig abgeändert werden.

Verdet überzeugte sich zunächst, in ähnlicher Weise wie bei den früher erwähnten Versuchen, davon, dass der Glaskörper sich bei dieser Anordnung wiederum in einem sehr nahezu constant-magnetischen Felde befand, und beobachtete sodann die Ablenkungen φ, welche die Polarisationsebene des Lichtes bei verschiedenen Grössen des Winkels γ erfuhr, während die Intensität des im Apparate circulirenden Stromes, mithin auch die Stärke der von dem Apparate ausgeübten magnetischen Kraft,

immer ein und dieselbe blieb. Es ergaben sich [1]) folgende Werthe:

γ	2φ beobachtet			2φ berechnet			Differenz		
0°	8°	55′	45″	8°	55′	45″	0°	0′	0″
15	8	29	15	8	37	50	— »	8	35
30	7	40	0	7	44	0	— »	4	0
45	6	20	0	6	18	45	+ »	1	15
60	4	28	45	4	27	45	+ »	1	0
75	2	19	30	2	18	45	+ »	0	45

Da die hierbei zwischen Theorie und Beobachtung auftretenden Differenzen ebenso wie bei der ersten Versuchsreihe »vollständig innerhalb der Beobachtungsfehler« liegen, so fasst *Neumann* das Resultat der Vergleichung seiner Theorie mit den Beobachtungen *Verdet's* in folgendem Satze (p. 71. a. a. O.) zusammen:

> »Wir kommen somit zu dem Ergebniss, dass die aus der Theorie deducirten Gesetze 1. 2. 3. mit der Beobachtung auf das Genaueste übereinstimmen.«

Es hat sich also, wie man sieht, die Hypothese von permanenten elektrischen Molecularströmen und eines gewissen, frei beweglichen Quantums von Elektricitätstheilchen in den Elementen der Körper auf zwei, scheinbar gänzlich verschiedenen, Gebieten von Erscheinungen, nämlich des Diamagnetismus und der Optik, dadurch bewährt, dass diese Hypothese eine quantitative Bestimmung von Grössen ermöglichte, welche vollkommen durch die Beobachtungen bestätigt worden sind. Es ist nun aber weiter zu beachten, dass es bis jetzt keine zweite Hypothese giebt, welche zu einer ebenso befriedigenden Uebereinstimmung der daraus abgeleiteten Consequenzen mit der Beobachtung zu führen im Stande ist.

Denn auch die neuesten Wirbeltheorien von *Maxwell* und *Helmholtz* liefern eine so wenig genügende Uebereinstimmung mit den Beobachtungen, dass es *Wiedemann* in der 2ten Auflage seines Werkes über Galvanismus und Elektromagnetismus nicht einmal für nöthig hält, die aus dieser Theorie sich ergebenden

---

1) Ann. d. Chim. et Phys. 3e Série. T. 43. p. 43.

Werthe der Drehungswinkel der Polarisationsebene mit den obigen Beobachtungen *Verdet*'s mitzutheilen.

Die betreffende Stelle in dem citirten Werke [1]) lautet nämlich wörtlich folgendermassen:

> »Auf die Annahme eben solcher Wirbel basirt *Maxwell* [2]) die Berechnung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene, indem er dabei das von *Helmholtz* gewonnene Resultat benutzt, dass, wenn ein aus bestimmten Flüssigkeitstheilchen bestehender Wirbel sich in der Flüssigkeit verschiebt, das Product aus seiner Rotationsgeschwindigkeit mit seinem Querschnitt constant bleibt. Er nimmt ferner an, dass die Winkelgeschwindigkeit des durch die Lichtbewegung in (gleichzeitige, rechts und links herum stattfindende) Rotationen versetzten Lichtäthers mit der Bewegung des Aethers sich combiniren kann, welche die magnetischen Erscheinungen bedingt. Er gelangt hierdurch zu der schon §. 686 citirten Formel:
>
> $$\varrho = \text{Const.} \frac{4\pi^2 m}{V} \cdot \frac{n^2}{\lambda^2_0} \left(n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda} \right)$$
>
> wo ϱ die Drehung, m die Intensität des Magnetismus in der Richtung des Lichtstrahles, V die Lichtgeschwindigkeit, λ_0 die Wellenlänge im Vacuum, n der Brechungsindex der Substanz. Da dieselbe indess nach den §. 687 angeführten Versuchen von *Verdet* nicht genügend mit der Beobachtung übereinstimmt, so glauben wir für die weitere Ausführung der Rechnung auf das Original verweisen zu können.«

In seinem neuesten Werke »on Electricity and Magnetism« Oxford 1873. Vol. II, p. 413 theilt *Maxwell* drei Formeln mit, welche den Drehungswinkel Θ der Polarisationsebene unter andern auch als Function von der Wellenlänge λ des Lichtes dar-

---

1) Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus von *Gustav Wiedemann*. Bd. II 2. Abthlg. p. 618 (§ 1242). Braunschweig 1874.

2) *Maxwell*, Treatise on electricity and Magnetism. Vol. II. p. 399. 1873., vgl. auch *W. Thomson*. Proceed. Roy. Soc. 1856. June; auch Phil. Mag. [4] Vol. XXIII. p. 85. 1862.

stellen. Die beiden ersten Formeln enthalten, wie die obige, direct das reciproke Quadrat der Wellenlänge, die dritte Formel, »which results from the physical theory of *M. C. Neumann*« enthält eine complicirtere Function der Wellenlänge. Auf Grund dieses Unterschiedes scheint sich *Maxwell* für berechtigt zu halten, die *Neumann*'sche Formel zu verwerfen, denn er bemerkt bezüglich derselben (l. c. Vol. II, p. 414):

> »It is evident that the values of Θ given by the formula (III) are not even approximately proportional to the inverse square of the wave-length. Those given by the formulae (I) and (II) satisfy this condition, and give values of Θ which agree tolerably well with the observed values for media of moderate dispersive power.«

Maxwell citirt hierbei aber nur die Habilitationsschrift[1]) *Neumann*'s aus dem Jahre 1858, welche die Vergleichung mit den numerischen Resultaten *Verdet*'s gar nicht enthält, während *Neumann* in der Vorrede zu seiner 4 Jahre später (1863) erschienenen deutschen Schrift ausdrücklich bemerkt: »in der gegenwärtig vorliegenden Schrift wird man diese Untersuchungen und die Erweiterungen, welche dieselbe mittlerweile erfahren haben, in ausführlicher Weise dargelegt finden.«[2])

Neumann giebt nun ferner die aus seiner Theorie folgende Formel für die Beziehung zwischen dem Drehungswinkel φ und der Wellenlänge λ und zwar als Approximation:

$$\varphi = \frac{\frac{A}{n}}{1 - B\frac{n^2}{\lambda^2}}$$

Diese Formel vergleicht *Neumann* gleichfalls mit Beobachtungen, welche *Wiedemann*[3]) über die fragliche Abhängigkeit

---

1) Explicare tentatur, quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur. Halis Saxonum 1858.

2) Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. Versuch einer mathematischen Theorie von *Carl Neumann*. Halle 1863. p. VI.

3) *Pogg.* Ann. Bd. 82. S. 231.

angestellt hat. Es ergaben sich für die Wellenlängen der Linien *C*, *D*, *E*, *F* und *G* zwischen Theorie und Beobachtung folgende Differenzen:

für	C	+ 0,38
	D	+ 0,99
	E	+ 1,51
	F	+ 1,18
	G	— 1,42

Hierzu bemerkt *Neumann* p. 74 seiner Schrift:

»Leider vermag ich aus dem *Wiedemann*'schen Aufsatze nicht zu erkennen, welches die absolute Bedeutung der Zahlen ist. Es wird nämlich von *Wiedemann* nur angegeben, dass diese Zahlen den Drehungswinkeln proportional sind. Demgemäss kann ich auch nicht beurtheilen, ob die oben erhaltenen Differenzen noch innerhalb der Beobachtungsfehler liegen.

»Sollten die Differenzen nicht innerhalb der Beobachtungsfehler liegen, so würde ich daraus nur schliessen, dass man sich (namentlich bei einem so stark dispergirenden Körper wie Schwefelkohlenstoff) bei Anwendung meiner Formel nicht auf die Anwendung der beiden ersten Constanten *C'*, *C''* beschränken darf, dass vielmehr auch noch die nächstfolgende *C'''* einen Werth besitzt, der nicht vernachlässigt werden darf.

»Ueberhaupt wird man die Formel (55), was die durch zwischen φ und τ festgesetzte Abhängigkeit anbelangt, nicht früher einer strengen Prüfung zu unterwerfen im Stande sein, als bis über diese Abhängigkeit sehr umfangreiche Reihen von Beobachtungen vorliegen.«

Während sowohl von *Maxwell* wie von *Wiedemann* die vollkommen befriedigende Uebereinstimmung der *Neumann*'schen Theorie mit den zuerst angeführten Beobachtungen *Verdet*'s mit Stillschweigen übergangen wird, scheinen jene Physiker die unvollkommene Uebereinstimmung der von *Neumann* selbst als approximativ bezeichneten ersten Glieder seiner Formel als ausreichend zu betrachten, um der seiner Theorie zu Grunde liegenden atomistischen Hypothese keine Beachtung zu schenken.

Ich glaube, es erklärt sich die gegenwärtig noch bei vielen Physikern vorhandene Abneigung gegen die atomistische Auf-

fassung der Elektricitätslehre bei gleichzeitiger Annahme der Atomistik in der Chemie und Physik dadurch, dass sie den inneren Zusammenhang der *Ampère*'schen Molecularströme und der diamagnetisch inducirten Molecularströme mit der Atomistik noch nicht gehörig erwogen haben. Wenn man sich nämlich die Nothwendigkeit vergegenwärtigt, mit welcher aus dieser Hypothese die permanente Existenz geschlossener Bahnen und daher ebenso die unendlich lange dauernden Bewegungen der in diesen Bahnen bewegten Atome resultiren, wenn keine störenden Kräfte von hinreichender Stärke einwirken, so geben die folgenden Worte *Wiedemann*'s in der neuesten Auflage seines grossen Werkes einen genügenden Beweis von der Richtigkeit meiner Behauptung. Es heisst dort Bd. II. 2. Abth. p. 589 von jenen Molecularströmen:

»Dass diese Ströme, weil sie in ihren unendlich kleinen Bahnen keinen Widerstand finden, unendlich lange andauern sollen, ist schwierig anzunehmen, sobald man die Elektricitätsbewegung an das Vorhandensein körperlicher Massen knüpft, an denen stets eine Art Reibung der Elektricitäten unter Wärmeerzeugung und Verlust an Bewegung stattfinden würde.

»Auch die diamagnetischen Erscheinungen würden sich durch die Induction dauernder Ströme oder Aetherrotationen um die Molecüle in den diamagnetischen Körpern durch Einwirkung des Magnetes oder Stromes erklären lassen, wo aber dieselbe Schwierigkeit zu Tage tritt, wie bei der Annahme der magnetischen Molecularströme.«

Wenn also sogar in dem neuesten und umfassendsten Werke über den Galvanismus und Magnetismus noch solche Argumente gegen die Existenz beharrlicher Bewegungen im Innern atomistisch constituirter Körper entwickelt werden, so liefert dies den deutlichsten Beweis, wie wenig man sich bisher diejenigen Consequenzen vergegenwärtigt hat, welche ich mich bemüht habe, in den vorangehenden Artikeln zu entwickeln.

Dagegen treffen die *Wiedemann*'schen Argumente mit vollem Rechte die beharrliche Existenz von molecularen Wirbelbewegungen (»Molecular Vortices«) da wir bisjetzt keine Flüsssigkeit kennen, welche vollkommen ohne innere Reibung wäre, wohl aber einen Raum, der als solcher den Bewegungen der Körper keinen Widerstand entgegensetzt. Das *Galilei*'sche Beharrungsgesetz enthält die Definition dieser Eigen-

schaft des Raumes und die Anwendung des *Newton*'schen Gravitationsgesetzes auf die kosmischen Bewegungen hat den empirischen Beweis für die Existenz eines solchen Raumes ausserhalb der Körper geliefert. In ähnlicher Weise wird die Anwendung des *Weber*'schen Elektricitätsgesetzes auf die molecularen Bewegungen den empirischen Beweis für die Existenz eines solchen Raumes innerhalb der Körper liefern.

11.

Durch die vorhergehenden Entwickelungen glaube ich gezeigt zu haben, dass die Hypothese, es existiren in allen Körpern bewegliche Elektricitätstheilchen, deren Eigenschaften durch das *Weber*'sche Gesetz definirt sind und welche theils zu beharrlichen Molecularströmen vereinigt, theils frei beweglich sind, um sich unter dem Einfluss inducirender Kräfte zu neuen Molecularströmen vereinigen zu können, keine neue Hypothese ist, sondern vielmehr eine solche, welche sich bereits seit 25 Jahren zur Erklärung von elektrischen, magnetischen und diamagnetischen Erscheinungen und wichtigen, damit zusammenhängenden, optischen Erscheinungen vorzüglich bewährt hat.

Es ist daher geboten, diese Hypothese in ihren weiteren Consequenzen zu verfolgen. Ich will hierzu zunächst wieder solche Erscheinungen wählen, welche man, wie die Reibung der Körper, bisher als mechanische von den elektrischen Wechselwirkungen der Körper getrennt untersucht hat. Hierhin gehören in erster Reihe die Adhäsion und Cohäsion der Körper.

Nach unserer Hypothese befinden sich in der Oberflächenschicht eines jeden Körpers eine grosse Anzahl beliebig gerichteter *Ampère*'scher Molecularströme von molecularem Durchmesser. Es bezeichne:

ϱ den mittleren Halbmesser dieser Molecularströme,

i die mittlere Intensität der Ströme in magnetischem Maasse,

m das magnetische Moment eines Molecularstromes auf die Einheit des Magnetismus in der Einheit der Entfernung,

e die Entfernung des Mittelpunctes eines Molecularstromes von der magnetischen Einheit,

so ist nach bekannten Gesetzen:

$$m = \frac{\varrho^4 \pi i}{e^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Denken wir uns nun z. B. zwei ebene, kreisförmige Platten parallel in der Entfernung e einander gegenüber gestellt, so werden dieselben unter der Voraussetzung, dass die Lagen aller Molecularströme in ihrem Innern gleichförmig vertheilt sind, und e im Vergleich zu ϱ sehr gross ist, nur eine verschwindende statisch-magnetische Wechselwirkung auf einander ausüben. Sobald aber die Entfernung e eine moleculare Grösse von der Ordnung des Halbmessers ϱ wird, ist dies nicht mehr der Fall. Die Ebenen der Molecularströme werden sich je nach der Beschaffenheit des Körpers drehen, so dass, wie beim weichen Eisen unter dem Einfluss eines Magneten, eine magnetische Anziehung entsteht. Gleichzeitig wird aber durch diese Annäherung der magnetisch erregten Oberflächen eine Inductionswirkung auf die frei beweglichen Elektricitätstheilchen ausgeübt, vermöge deren sie sich zu Molecularströmen anordnen, welche eine diamagnetische Abstossung hervorrufen. Da die letztere erst durch die Annäherung der magnetisch angezogenen Oberflächen erzeugt wird, so werden sich die beiden Platten bis zu derjenigen Entfernung nähern müssen, bei welcher dieser magnetischen Anziehungskraft die durch sie hervorgerufene diamagnetische Abstossungskraft das Gleichgewicht hält. Es tritt folglich ein stabiler Gleichgewichtszustand ein. Sollen die Platten wieder aus der Entfernung e, in welcher dieser Zustand eingetreten ist, in grössere Entfernung versetzt werden, so gehört hierzu eine gewisse Arbeit, deren Grösse von der Natur und Entfernung der beiden Platten abhängt. Es fragt sich nun, ob die hier nur qualitativ aus der elektrodynamischen Wechselwirkung abgeleiteten Erscheinungen der Adhäsion beider Platten auch zu quantitativen Folgerungen führen, welche direct mit der Erfahrung vergleichbar sind.

Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst die statisch-magnetische Wirkung und die elektrodynamische Inductionswirkung zweier Molecularströme betrachten, von denen der eine in der einen kreisförmigen Scheibe, der andere ihm gegenüber, in der zweiten Scheibe, sich befinden mag. Der Einfachheit halber mag angenommen werden, dass die Ebenen beider Kreisströme unter einander und den ebenen Oberflächen beider Scheiben parallel seien.

Vernachlässigt man alsdann die Glieder, welche die 5te und höhere Potenzen von e im Nenner haben und unterscheidet die auf die betreffende Scheibe bezüglichen Werthe des Molecularstromes durch ϱ_1 und i_1, so ist die statisch-magnetische Wechselwirkung k_s dieser beiden Molecularströme.

$$k_s = \frac{\varrho^2\pi i \cdot \varrho_1{}^2\pi^2 i_1}{e^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die elektrodynamische Inductionswirkung bei einer Veränderung des Abstandes e, während welcher die Ebenen beider Ströme parallel bleiben sollen, ergiebt sich unmittelbar aus der obigen Formel, wenn man die Proportionalität dieser Wirkung mit dem magnetischen Momente und der Geschwindigkeit $\frac{de}{dt}$ der Abstandsänderung beider Platten berücksichtigt. Bezeichnet alsdann noch ε die sogenannte Inductionsconstante des Stoffes aus welchem die beiden Platten verfertigt sind, so hat man, wenn mit k_i diese durch Induction erzeugte Kraft bezeichnet wird:

$$k_i = \frac{\varepsilon \cdot \varrho^2\pi i \cdot \varrho_1{}^2\pi i_1}{e^3} \cdot \frac{de}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Werden die Stromstärken i und i_1 in mechanischem Maasse ausgedrückt, so giebt der letzte Ausdruck unmittelbar die Grösse des mechanischen Widerstandes, welcher bei Entfernung der beiden Platten mit der Geschwindigkeit $\frac{de}{dt}$ überwunden werden muss.

Bezeichnet R den Radius der beiden gleichgrossen kreisförmigen Scheiben, so ist aus obiger Formel ersichtlich, dass bei constanter Entfernung e die Grösse der Wechselwirkung proportional dem Producte der Oberflächen beider Scheiben wachsen muss, da bei gleichmässiger Vertheilung der Molecularströme die Zahl derselben auf jeder der beiden Scheiben proportional der Oberfläche wächst. Bezeichnet daher K_i die von beiden Platten mit dem Radius R in der Entfernung e ausgeübte Wechselwirkung der Induction bei Veränderung des Abstandes um die unendlich kleine Grösse de, so hat man:

$$K_i = \varepsilon \cdot \varrho^2\pi i \cdot \varrho_1{}^2\pi i_1 \cdot R^2\pi \cdot R^2\pi \cdot \frac{1}{e^3} \cdot \frac{de}{dt} \quad . \quad . \quad (4)$$

oder, wenn man ϱ und i gleich ϱ_1 und i_1 setzt und die Constante

$$A = \varepsilon \cdot (\varrho^2 n^2 i)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

einführt:

$$k_1 = A \cdot R^4 \cdot \frac{1}{e^3} \cdot \frac{de}{dt}$$

oder

$$K_1 \cdot dt = A \cdot R^4 \frac{de}{e^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Durch Integration erhält man aus dieser Gleichung:

$$K_1 t = A \cdot R^4 \cdot \frac{1}{e^2}$$

oder, wenn man die beiden Platten aus einer ursprünglichen Entfernung e in eine grössere Entfernung α parallel mit sich selbst versetzt, und die hierzu erforderliche mechanische Kraft mit K, die erforderliche Zeit mit T bezeichnet, so hat man:

$$KT = A \cdot R^4 \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{e^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Der negative Character, welchen die Differenz der eingeklammerten Brüche besitzt, zeigt die entgegengesetzte Richtung der bewegenden und Adhäsionskraft an. Sieht man von diesem Vorzeichen ab und will nur die quantitativen Beziehungen der in obiger Formel vorkommenden Grössen ausdrücken, so kann man dieselbe auch folgendermassen schreiben:

$$KT = \frac{A \cdot R^4}{e^2} \left(1 - \left[\frac{e}{\alpha}\right]^2\right) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Bei Ableitung dieser Formel ist die Voraussetzung gemacht worden, dass die mit einander in Wechselwirkung tretenden Molecularströme ihre ursprüngliche Lage beibehalten, sich also bei Aenderung der Entfernung e nicht unter dem Einflusse der molecularen Wechselwirkung der Theilchen der betreffenden Scheibe, der sie angehören, drehen. Ebenso ist nicht die Wechselwirkung derjenigen Elektricitätstheilchen berücksichtigt worden, welche freibeweglich sich bei metallischen Leitern von Molecül zu Molecül bewegen. Eine Berücksichtigung dieser Wechselwirkung, wo man es mit Stromelementen zu thun hätte, deren inducirende Wechselwirkung umgekehrt proportional ihrer Entfernung ist, würde in die obige Formel noch additiv ein Glied

einführen, welches mit dem natürlichen Logarithmus von $\alpha - e$ behaftet wäre. Es kann daher die obige Formel nur als eine approximative mit den Beobachtungen verglichen werden.

Befinden sich die beiden Platten in einem Medium z. B. in einer tropfbar- oder elastisch-flüssigen Masse, so wird sich die Wechselwirkung bei ihrer Abstandsänderung zusammensetzen aus derjenigen der beiden Platten und derjenigen bei Entfernung zweier benachbarter Molecularschichten der Flüssigkeit. Da aber, unserer Hypothese entsprechend, beide Wirkungen dasselbe Gesetz befolgen müssen, so wird auch hierdurch die in obiger Formel (8) ausgedrückte Gestalt dieses Gesetzes nicht wesentlich geändert werden. Dagegen wird die Intensität der bei der Dilatation zweier benachbarter Flüssigkeitsschichten aufzuwendenden Kraft von der Natur der Flüssigkeit abhängen. Berücksichtigt man nun, dass die bei der gleitenden Verschiebung zweier solcher Schichten auftretende Widerstandskraft ihrem Wesen nach identisch mit der im vorliegenden Falle, bei senkrechter Abstandsänderung, auftretenden Widerstandskraft ist, d. h. elektrodynamischen Ursprungs ist, so folgt hieraus, dass diese letztere Kraft genau von denselben Eigenschaften der Körper wie die erstere abhängen muss. Da nun die bei einer gleitenden Verschiebung zweier Schichten auftretende Widerstandskraft durch den Coefficienten der inneren Reibung gemessen wird, so folgt, dass auch bei den Adhäsionserscheinungen in einem Medium, die Grösse dieser Kraft direct proportional dem inneren Reibungscoefficienten der angewandten Flüssigkeit sein muss, vorausgesetzt, dass die betreffenden Platten sich in einem Abstande befinden, welcher im Vergleich zu der Moleculardistanz zweier benachbarten Flüssigkeitsschichten als sehr gross angesehen werden kann.

Die bisher aus der elektrodynamischen Theorie der Molecularkräfte abgeleiteten approximativen Gesetze für die Adhäsionserscheinungen zweier kreisförmigen Platten von gleicher Grösse in einem flüssigen Medium lassen sich mit Berücksichtigung der Formel (8) in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Die Kraft, mit welcher die Platten entfernt werden müssen, wächst proportional der 4ten Potenz ihres Halbmessers.
2. Wenn das Verhältniss des ursprünglichen Abstandes e zu dem Abstande α, bis zu welchem die Platten ent-

fernt werden, constant bleibt, oder sehr klein wird, so ändern sich die zur Trennung erforderlichen Kräfte umgekehrt proportional den Quadraten ihres ursprünglichen Abstandes e.

3. Die Kräfte sind umgekehrt proportional den Zeiten, während welcher sie eine Abstandsänderung erzeugen.
4. Die Kräfte sind direct proportional der Constante der inneren Reibung der Flüssigkeit, innerhalb welcher sich die Platten befinden.

Alle diese Gesetze stimmen nun mit denjenigen überein, welche *J. Stefan* bei seinen »Versuchen über scheinbare Adhäsion« [1]) theils direct durch das Experiment, theils indirect durch Behandlung der Probleme nach den Gesetzen der analytischen Hydrodynamik gefunden hat. Bei den *Stefan*'schen Versuchen war die Entfernung α constant zu 0,26 Cm. angenommen, dagegen betrug die Entfernung e bei vier verschiedenen Versuchen 0,0573, 0,0350, 0,0213 und 0,0111 Cm. Die Zeiten, während welcher die trennende Kraft wirkte, variirten zwischen 8,5 und 175 Secunden. Der Apparat, welcher zu diesen Versuchen verwendet wurde, war sehr einfach. »Auf einen mit Stellschrauben versehenen Dreifuss wird eine weite cylindrische Glasschale gesetzt und durch drei verschiebbare Widerlager festgehalten. In dieser Schale wird durch passend ausgeschnittene Korke die eine Glasplatte, die untere, ebenfalls fix angebracht und mittelst der Stellschrauben horizontal gestellt.« Die zweite Platte ist eine sogenannte Adhäsionsplatte, welche so an eine Wage gehängt wurde, dass ihre untere Fläche horizontal und äquilibirt war. Auf die darunter befindliche und ebenfalls horizontal gestellte Platte wurden drei Stückchen eines Drahtes gelegt und dann die obere Platte so weit herabgelassen, dass sie auf diesen Drahtstücken auflag. Der Durchmesser des eingelegten Drahtes misst die Distanz der beiden Platten. »Zum Losreissen der oberen Platte von der unteren ist die Einlage eines Uebergewichtes in die äquilibrirende Wagschale nothwendig.« Dass der ganze Charakter der hierbei stattfindenden Phänomene ein dynamischer

1) Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie d. W. zu Wien. Bd. 69. Heft IV. Jahrgang 1874 April. p. 713—735. Auszug hiervon in *Pogg.* Ann. Bd. 154 p. 136—1875 März.

und nicht, wie man bisher allgemein annahm, ein statischer ist, erläutert *Stefan* durch folgende Worte:

»Die Distanz zwischen zwei Platten von 155 Mm. Durchmesser, welche unter Wasser anfänglich um 0,1 Mm. von einander abstehen, wird durch den continuirlichen Zug eines Grammes um 0,01 Mm. erst in anderthalb, um 0,1 Mm. erst in sieben Minuten vergrössert. Dadurch wird erklärlich, wie man die Beobachtungen auf kurze Zeit beschränkend zur Annahme eines statischen Gleichgewichtes verleitet werden kann.«

Die aus den Versuchen abgeleiteten Gesetze werden von *Stefan* folgendermaassen ausgedrückt: (S. 716 a. a. O.)

»Es stellte sich zuerst mit grosser Schärfe sowohl für die Bewegung der Platten in tropfbaren Flüssigkeiten als auch in der Luft das Gesetz heraus, dass die Zeit in welcher sich die beiden Platten aus einer gegebenen anfänglichen in eine bestimmte andere Distanz entfernen, dem aufgelegten Uebergewichte verkehrt proportional ist.«

»Die bezeichnete Zeit wird bei demselben Uebergewichte um so grösser, je kleiner die anfängliche Distanz der Platten, doch in viel stärkerem Verhältnisse, als im einfachen. Sie wächst nahezu im quadratischen Verhältnisse, wenn die Plattendistanz im einfachen kleiner wird.«

»Diese Zeit ist ferner um so grösser, je grösser die zu dem Versuche gewählten Platten sind. Bei sonst gleichen Verhältnissen verhalten sich die Zeiten bei zwei verschiedenen Paaren, wie die vierten Potenzen der Radien der Platten.«

»Was endlich den Einfluss der Natur der Flüssigkeit anbetrifft, so lieferten die mit Wasser, einer Salzlösung, Alkohol und Luft gemachten Versuche das übereinstimmende Resultat, dass sich die gedachten Zeiten verhalten wie jene, in welchen unter gleichem Drucke gleiche Volumina dieser Flüssigkeiten durch eine Capillarröhre strömen.«

Da diese Zeiten nach den Versuchen von *Poiseuille, O. E. Meyer* und *Maxwell* proportional dem Coefficienten der inneren

Reibung der Flüssigkeiten sind, so ist auch hierdurch die Proportionalität mit dieser Grösse ausgedrückt.

> »Damit« — sagt *Stefan* — »ist klar dargethan, dass es sich bei dieser Erscheinung um ein Problem der Hydrodynamik handelt, und den Schluss dieser Abhandlung bildet ein Versuch einer theoretischen Lösung dieses Problems.«

In der That betrachtet der Verfasser seine analytische Lösung nur als einen solchen Versuch, indem er ausdrücklich (S. 727) die Schwierigkeit derselben vom Standpuncte der gewöhnlichen hydrodynamischen Principien mit folgenden Worten hervorhebt:

> »Eine exacte theoretische Behandlung dieser Versuche ist bei der grossen Complication, welche dieses Problem in analytischer Beziehung darbietet, nicht möglich.«

Als solche approximative Formel wird alsdann S. 730 die folgende Gleichung mitgetheilt,

$$t = \frac{3\pi\mu R^4}{4q} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Zwischen den Bezeichnungen in dieser Formel und den von mir in Formel (7) gewählten bestehen folgende Beziehungen. Es ist:

$$t = T$$
$$q = K$$
$$\frac{3\pi\mu}{4} = A$$
$$a = e$$

Mit Berücksichtigung dieser Bezeichnungen und der oben über das negative Vorzeichen gemachten Bemerkung stimmt das durch die *Stefan*'sche Formel aus hydrodynamischen Principien abgeleitete Gesetz genau mit dem von mir aus elektrodynamischen Principien abgeleiteten Gesetze überein. Eine genauere Uebereinstimmung seiner theoretischen Formel mit den Beobachtungen vermochte *Stefan* nur durch eine Annahme herzustellen, welche mit allen bisher bei Capillaritätserscheinungen gemachten Erfahrungen in Widerspruch tritt:

Stefan hebt dies selber S. 718 mit folgenden Worten hervor:

> »Die Uebereinstimmung zwischen den Resultaten der

Versuche und der theoretischen Entwickelung konnte jedoch nur unter der Annahme, dass die Flüssigkeit an den Platten nicht vollkommen ruhig sei, sondern längs denselben gleite, erzielt werden; während bei den Versuchen über die Strömung der Flüssigkeiten durch capillare Glasröhren die Annahme, dass die Flüssigkeit an der Röhrenwand die Geschwindigkeit Null hat, vollkommen den Beobachtungen entspricht.«

Am Schlusse wird noch einmal auf den provisorischen Character und die Unvollständigkeit aufmerksam gemacht, welche der gegebenen hydrodynamischen Lösung des Problems anhaftet. Der folgende Satz beschliesst nämlich die Abhandlung:

»Es ist einerseits die theoretische Betrachtung des Phänomens von Anfang an nur eine approximativ giltige, andererseits die Anzahl der Beobachtungen nicht eine sehr grosse und bleibt der Fall denkbar, dass die Einführung eines nicht berücksichtigten Vorganges in die Discussion der Resultate zur zuerst abgeleiteten Formel eine ähnliche Correction brächte, wie selbe durch die Annahme der Gleitung gefunden wurde. Um diese Frage zu lösen, müssen noch weitere speciell zu diesem Zwecke angeordnete Versuchsreihen ausgeführt werden.«

Mit Berücksichtigung der Leichtigkeit, mit welcher sich aus der elektrodynamischen Theorie der Adhäsion der allgemeine Character des erwähnten Gesetzes ergab, wird die Hoffnung berechtigt erscheinen, dass auch in den zuletzt angedeuteten Puncten diese Theorie mehr Licht verbreiten und schneller als die Hydrodynamik zum Ziele führen wird. Ich glaube diese Vermuthung mit um so grösserer Zuversicht aussprechen zu dürfen, als auch theoretische Untersuchungen über die Reibung der Gase auf einem ganz anderen Wege zu dem Resultate geführt haben, dass die der bisherigen Theorie der Reibung zu Grunde gelegte Hypothese über die Molecularkräfte unzulässig ist und durch eine dem elektrodynamischen Grundgesetze *Weber*'s entsprechende Wechselwirkung zwischen den Gasmolecülen ersetzt werden muss.

O. E. Meyer hat nämlich vor kaum einem Jahre im 80sten Bande des *Borchardt*'schen Journales für Mathematik p. 345 einen »Zusatz zu der Abhandlung zur Theorie der innern Rei-

bung im 78sten Bande dieses Journales« veröffentlicht, in welchem er erklärt, dass die bisher seiner »Theorie zu Grunde liegende Hypothese als unzulässig erscheint, und es ergiebt sich die Nothwendigkeit, dieselbe passend abzuändern.« Diese Abänderung besteht nun aber in der Einführung einer Hypothese, »welche der von Herrn *Carl Neumann* in der Elektrodynamik benutzten gleicht.« Dieser Hypothese gemäss, welche bekanntlich nur ein anderer Ausdruck des *Weber*'schen Grundgesetzes ist, nimmt *Meyer* an, »dass der Werth der zwischen zwei Theilchen ausgeübten Wechselwirkung von der Entfernung r zweier gleichzeitig eingenommenen Orte derselben abhängt; diese Kräfte aber gelangen erst in einem späteren Momente zur Wirkung, und zwar mit einer Verzögerung t, deren Werth r proportional ist« (p. 316).

Stefan und *Boltzmann* in Wien theilen diese Anschauungen und nach einer Bemerkung des Letzteren in *Borchardt*'s Journal hat *Stefan* sogar zuerst auf die Nothwendigkeit einer solchen Annahme hingewiesen.

Betrachtet man die innere Reibung der Gase nach der elektrodynamischen Moleculartheorie gleichfalls als ein elektrisches Inductionsphänomen, indem man für die Gasmolecüle die gleiche Molecularconstitution aus *Ampère*'schen Molecularströmen nebst frei beweglichen Elektricitätstheilchen wie bei den Molecülen der festen und flüssigen Körper voraussetzt, so würde von jedem Gasmolecüle bei seiner Annäherung an ein anderes eine bestimmte Arbeit geleistet, welche in Form von lebendiger Kraft der inducirten elektrischen Strombewegung des Nachbarmolecüles wieder auftritt. Denken wir uns daher eine ebene Schicht eines Gases, so wird die von dieser in der angedeuteten Weise geleistete Arbeit, d. h. die auf die benachbarte Schicht übertragene lebendige Kraft direct proportional sein

1. der Anzahl der Molecüle in der Flächeneinheit, d. h. der Dichtigkeit des Gases und
2. der Intensität der elektrischen Molecularströme in jedem einzelnen Molecüle, d. i. der Geschwindigkeit der in diesen Strömen bewegten Elektricitätstheilchen: u;
3. der Länge des Weges l, welchen die Theilchen durchschnittlich bei der Veränderung ihres Abstandes zurücklegen.

Bezeichnet alsdann γ eine von der Natur des Gases ab-

hängige Constante und η den Coefficienten der inneren Reibung eines Gases, so hätte man nach der elektrodynamischen Molecular-theorie

$$\eta = \gamma \cdot \varrho u l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Berücksichtigt man nun, dass sich bei einer Veränderung des Gasvolumens die Grössen ϱ und l im entgegengesetzten Sinne ändern, indem bei einer doppelten Dichtigkeit des Gases offenbar auch die doppelte Anzahl von Molecülen in der Flächenheit einer ebenen Gasschicht liegen, und daher der mittlere Weg l im Allgemeinen nur halb so gross sein kann, — (wenigstens wenn man die Umkehr der Bewegung von einer constanten Grösse der diamagnetisch erzeugten Repulsivkraft abhängig macht, wie dies ja auch die mechanische Gastheorie bezüglich der repulsiven Wirkungssphären der Molecüle thut) — so würde sich aus der obigen Gleichung (1) das merkwürdige Gesetz ergeben:

> dass die innere Reibung eines Gases innerhalb weiter Grenzen unabhängig von seiner Dichtigkeit ist.

Berücksichtigt man ferner, dass u die Geschwindigkeit der in den Molecülen sich bewegenden Elektricitätstheilchen $+e$ und $-e$ mit ihren trägen Massen ε und ε' ist, und betrachtet diese Massen als diejenigen, deren lebendige Kraft (u^2) identisch mit derjenigen Molecularbewegung ist, welche wir vorwiegend als Temperatur eines Körpers bezeichnen,[1]) so würde sich als zweites Gesetz aus obiger Formel ergeben:

---

1) *Wilhelm Weber* hat diese Anschauung zuerst in seiner letzten Abhandlung (*Pogg.* Ann. Bd. 156. p. 36 — 1875) »über die Bewegungen der Elektricität in Körpern von molecularer Constitution« bei Erklärung der Temperaturzunahme eines von elektrischen Strömen durchflossenen Leiters mit folgenden Worten ausgesprochen:

> »Diese Zunahme an lebendiger Kraft ist nichts anderes, als die vom Strome im Leiter erzeugte Wärme selbst, wie sich daraus ergiebt, dass sie dem mechanischen Aequivalent der erzeugten Wärme gleich ist, was, wie schon bemerkt, wenigstens näherungsweise bewiesen worden ist. — Es wird hierdurch die am Schlusse des vorigen Artikels ausgesprochene Vermuthung bestätigt, dass die in allen ponderablen Körpern enthaltenen beweglichen Theile, deren Bewegung Wärme ist, identisch sind mit den in allen ponderablen Körpern enthaltenen Theilen, deren Bewegung Magnetismus ist. Es giebt keine anderen, von dem ponderablen unabhängig beweglichen Theile im Innern der Körper als diese, nämlich die elektrischen Theile.«

dass die innere Reibung eines Gases proportional der Quadratwurzel aus seiner absoluten Temperatur ist.

Diese beiden Gesetze sind nun in der That nach den Untersuchungen von *O. E. Meyer* und *Cl. Maxwell* mit grosser Annäherung als durch die Erfahrung bestätigt anzusehen. Beide Autoren sind gleichfalls bemüht gewesen, jene Gesetze aus den Principien der mechanischen Gastheorie mit Hülfe der sogenannten tumultuarischen Bewegung der Gasmolecüle nach der von *Bernoulli*, *Krönig* und *Clausius* entwickelten Hypothese abzuleiten. *O. E. Meyer* bemerkt hierbei in seiner Abhandlung »Ueber die innere Reibung der Gase« [1]) Folgendes:

»Die Geschwindigkeit eines Theilchens (Gasmolecüles) besteht aus zwei Theilen, aus der fortschreitenden Geschwindigkeit v und aus der molecularen Geschwindigkeit, deren lebendige Kraft die Wärme ist. Die letztere ist meistens sehr viel grösser als die erstere, so dass wir v gegen die andere Componente vernachlässigen, mithin u ohne erheblichen Fehler als die Geschwindigkeit der Wärmebewegung ansehen können.

Durch Einführung dieser Grösse wird der Reibungscoefficient des Gases

$$\eta = \tfrac{1}{3} muNl;$$

und dieser Ausdruck [2]) wird noch einfacher durch Benutzung der Dichtigkeit ϱ des Gases oder der Masse, welche in der Einheit des Volumens enthalten ist; nach dieser Definition ist

$$\varrho = Nm;$$

folglich wird der Reibungscoefficient

$$\eta = \tfrac{1}{3} \cdot \varrho ul;$$

wodurch derselbe sehr einfach definirt ist.«

Wie man sieht, ist dies dieselbe Formel, welche oben unmittelbar aus der elektrodynamischen Theorie der Molecularconstitution abgeleitet wurde. Würde man die Annahme machen,

---

1) *Poggendorff*'s Annalen, Bd. 125. p. 596 (1865).

2) Hierin bedeutet m die Masse eines Gasmolecüles, u die Geschwindigkeit der in demselben bewegten Theilchen, N die Anzahl der Molecüle in der Einheit des Volumens, und l die mittlere Weglänge eines Molecüles bei seiner translatorischen Bewegung.

dass die Masse eines Molecüles, also das Atomgewicht desselben, proportional der Anzahl der in ihm bewegten elektrischen Theilchen ist, d. h. der Elektricitätsmenge, welche in ihm in Molecularströmen und frei beweglichen Theilen vorhanden ist, so würde auch hier einfach

$$\varrho = Nm$$

zu setzen sein.

Maxwell[1]) hatte dem Ausdruck des Reibungscoefficienten die folgende Form gegeben

$$\eta = \tfrac{1}{4}\,\frac{mu}{\pi s^2}$$

worin s den Radius der Wirkungssphäre eines Molecüles, d. h. die Hälfte derjenigen Entfernung ausdrückt, bis zu welcher sich die Centra zweier Molecüle bei ihrer translatorischen Bewegung einander nähern.

O. E. Meyer bemerkt a. a. O. zu dieser Formel:

> »In dieser Form lässt der Ausdruck übersehen, dass er, wie *Maxwell* schon gezeigt hat, von der Dichtigkeit des Gases unabhängig ist, da λ (der mittlere Abstand der Molecüle) aus ihm verschwunden ist. Er ist aber proportional der Moleculargeschwindigkeit u, also der Quadratwurzel aus der sogenannten absoluten Temperatur.«

In wie weit die Beobachtungen *Meyer*'s mit diesen theoretischen Consequenzen in Uebereinstimmung sind, wird von diesem Physiker mit folgenden Worten angedeutet:

> »Diese Folgerungen haben sich durch die unternommene experimentelle Prüfung als angenähert richtig bewährt. Mehr als eine angenäherte Bestätigung war auch nicht zu erwarten, da die durchgeführte theoretische Betrach-

---

1) Philos. mag. Vol. 19. p. 32. 1860.

Maxwell benutzt in dieser Abhandlung die obige Formel, um die mittlere Weglänge eines Luftmolecüles zu berechnen. Setzt man $\eta = 0.0003$ Cm., ferner für 0°, $\varrho = \frac{1}{770}$ und nach *Clausius* (*Pogg.* Ann. Bd. 100 S. 377) $u = 480$ Met., so findet *O. E. Meyer* $l = 0.00014$ Mm., was ungefähr mit dem etwas kleineren, von *Maxwell* berechneten Werthe von $\frac{1}{447000}$ engl. Zoll übereinstimmt. Die Zeit T, welche zwischen je zwei aufeinander folgenden Collisionen eines Theilchens mit andern durchschnittlich verfliesst, ergiebt sich zu 0.0003 Mill. Secunde, so dass jedes Theilchen in einer Secunde etwa 3000 Millionen Mal mit einem andern zusammenstossen würde.

tung nur für ideelle Gase streng richtig ist, d. h. für solche Medien, welche ausser der Trägheit und Schwere nur geradlinige Bewegung besitzen.«

Meyer hat alsdann in einer späteren Abhandlung[1]) die angenäherte Richtigkeit der obigen beiden Sätze durch eine theoretische Behandlung der mit grosser Sorgfalt und Vollständigkeit von *Graham*[2]) mitgetheilten Versuche nachgewiesen und beschliesst p. 380 seine Untersuchungen mit folgenden Sätzen:

»*Als festgestelltes Resultat dieser Untersuchung stelle ich hin, dass der Reibungscoefficient jedes Gases von dem Drucke, unter dem es steht, unabhängig oder doch nur in sehr geringem Grade abhängig ist; ferner dass die Reibung der Gase mit der Temperatur zunimmt, und zwar bei allen Gasen auf gleiche Weise. Weniger sicher ist dagegen festgestellt, in welchem Verhältnisse die Reibungsconstante mit der Temperatur zunimmt. Ferner bleibt zweifelhaft, ob eine äussere Reibung der Gase an festen Körpern anzunehmen ist, oder ob die Gase an der Oberfläche fester Körper fest haften, so wie welchen Einfluss hierauf die Temperatur und der Druck äussern.*«

Dass nun aber *O. E. Meyer* in den Resultaten seiner umfassenden Untersuchungen nicht etwa einen Beweis für die Richtigkeit der *Maxwell*'schen Theorie zu erblicken glaubt, hebt er selber ausdrücklich in folgenden Sätzen hervor:

»Die Resultate meiner Beobachtungen sprechen entschieden zu Gunsten der *Maxwell*'schen Theorie, folglich auch für die Richtigkeit der Theorie der molecularen Stösse. Dasselbe wird durch Beobachtungen bestätigt, welche *Graham* über die Strömung von Gasen durch Capillarröhren angestellt hat. Ich bin indess weit entfernt, in dieser Bestätigung der Theorie einen Beweis für die Wahrheit der Hypothese zu sehen; vielmehr halte ich weitere Prüfungen durch Beobachtungen anderer Art, namentlich durch thermische Beobachtungen, für durchaus nothwendig.«

---

1) *Poggend.* Ann. Bd. 127. p. 253. Ueber die Strömung der Gase durch Capillarröhren.

2) On the motion of gases. Phil. Transact. of the roy. soc. of London 1846, p. 573; 1849, p. 349.

Es ist leicht ersichtlich, dass unter der oben gemachten Annahme von der Proportionalität zwischen ponderabler Masse der Molecüle und der Quantität der in denselben strömend bewegten Elektricitätsmengen auch das *Avogadro*'sche Gesetz und dasjenige von der Constanz des Productes aus der specifischen Wärme und dem Atomgewichte ebenso unmittelbar aus der elektrodynamischen wie aus der mechanischen Gastheorie folgt. Ebenso ergiebt sich die Wärmeerzeugung bei schneller Compression eines Gases und die Beziehung der hierbei aufgewandten Arbeit zur Temperaturerhöhung als eine einfache Consequenz der elektrodynamischen Moleculartheorie. Wie früher bei der gleitenden Reibung hat man es auch hier nur mit der Wärmeentwickelung inducirter Ströme zu thun.

12.

Die bisher aus der elektrodynamischen Theorie der Molecularkräfte abgeleiteten und mit den Beobachtungen verglichenen Folgerungen bezogen sich im Wesentlichen auf Körper, deren Molecüle sich in keinem stabilen Gleichgewichtszustande, wie die Molecüle von festen und krystallisirten Körpern, befanden. Es ist bekannt, dass die Atomistik, um überhaupt nur die Möglichkeit solcher stabilen Gleichgewichtszustände von materiellen Punctsystemen zu erklären, den einzelnen Molecülen gleichzeitig eine attractive und repulsive Fernewirkung beilegen muss, deren Aenderung mit der Entfernung nothwendig nach verschiedenen Gesetzen stattfinden muss. Nur unter dieser Bedingung ist die Atomistik im Stande durch eine viel schnellere Abnahme der repulsiven im Vergleich zu den attractiven Fernewirkungen der Molecüle stabile Gleichgewichtslagen derselben, wie sie uns die Beobachtung bei starren Körpern zeigt, zu erklären. Diese Annahme wird jedoch vom Standpuncte der elektrodynamischen Theorie der Molecüle überflüssig, indem bereits oben erwähnt wurde, dass bei der Annäherung zweier ebenen Körperflächen bis zu einer solchen Entfernung, welche im Verhältniss zu dem Durchmesser der Molecüle und ihrer Molecularströme nicht mehr verschwindend ist, einerseits durch partielle Drehung der Ebenen dieser Ströme magnetische Anziehung, und alsdann, bei der unter diesem Einfluss

stattfindenden Annäherung magnetisirter Molecüle, auch diamagnetische Abstossung auftreten muss. Es erzeugt sich also bei diesem Process die Anziehung gleichsam selber eine Abstossung, wobei alsdann bei eingetretener Gleichheit dieser Wirkungen, nothwendig ein stabiles Gleichgewicht jener beiden Körperschichten eintreten muss.

Sollen z. B. vier Molecüle von gleicher Beschaffenheit so mit einander verbunden sein, dass jedes einzelne Molecül von den drei anderen sich in gleichen Abständen befindet, so müssen diese vier Molecüle in den Eckpuncten eines gleichseitigen Tetraëders liegen. Besitzen alsdann die gleichen Kantenlängen dieses Tetraëders diejenige Grösse, bei welcher der oben erwähnte Gleichgewichtszustand zwischen magnetisch und diamagnetisch erregter Wechselwirkung stattfindet, so wird auch dieses Tetraëder eine stabile Gleichgewichtslage darstellen müssen, bei welcher jede Abstandsveränderung durch äussere Kräfte einen Arbeitsaufwand verlangt, welcher äquivalent der bei der Verrückung der Molecüle elektrodynamisch erregten Inductionswirkung ist. Vergleicht man hierbei in einem beliebig angeordneten Systeme solcher Molecüle die Arbeit, welche bei einer sehr kleinen Verrückung in der Verbindungslinie zweier Molecüle geleistet wird mit derjenigen Arbeit, welche bei einer gleich grossen Verrückung in einer zur Verbindungslinie der Molecüle senkrechten Richtung geleistet werden muss, so sieht man unmittelbar, dass die zu dieser letzteren Verrückung erforderliche Arbeit eine verschwindend kleine Grösse im Verhältniss zur ersteren sein muss. Da nämlich die elektrodynamische Induction zweier Molecüle nur durch die Veränderung ihrer Entfernung r erzeugt wird, so beträgt im ersten Falle die vergrösserte Entfernung $r + \delta$, wenn mit δ die kleine Verrückung eines Molecüles bezeichnet wird. Dagegen ist diese Entfernung im zweiten Falle die Hypotenuse h eines rechtwinklichen Dreiecks, dessen Katheten r und δ sind, so dass man hat

$$h = \sqrt{r^2 + \delta^2}.$$

Wird daher δ sehr klein gesetzt, wie bei der Anwendung des Princips der virtuellen Verrückungen in den Problemen der Hydrodynamik, so kann δ^2 gegen r^2 vernachlässigt werden, so dass $h = r$ wird und daher, wenn diese Bedingung in aller Strenge erfüllt ist, im zweiten Falle zur Verrückung gar keine Arbeit, im ersten dagegen eine der Weglänge δ proportionale Arbeit erforderlich

ist. Drückt man bei einem solchen Systeme elektrodynamisch verbundener Molecüle die Bedingung eines constanten mittleren Abstandes, d. h. eines constanten Volumens analytisch aus, so erhält man eine Bedingungsgleichung, welche identisch ist mit der für incompressible tropfbare Flüssigkeiten in der analytischen Mechanik aufgestellten Gleichung. Ein solches System von Molecülen muss daher auch »die characteristische Eigenschaft der Flüssigkeiten, die sie wesentlich von den festen Körpern unterscheidet und als Grundlage ihrer Gleichgewichtslehre dient« besitzen, nämlich die Fähigkeit den Druck, der auf ihre Oberflächen ausgeübt wird, nach allen Richtungen gleichmässig fortzupflanzen.[1])

Poisson hat sich in seiner Abhandlung »*Equations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides*« (Journal de l'École Polyt. Cah. 20) sehr eingehend mit der inneren Natur der Flüssigkeiten beschäftigt. Von dieser Abhandlung bemerkt *Poisson* in seiner Mechanik a. a. O. selber:

> »In meiner Abhandlung über die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichtes und der Bewegung der elastischen Körper und der Flüssigkeiten, habe ich gezeigt, wie diese Eigenschaft von der gegenseitigen Anordnung der Molecüle der Flüssigkeit herrührt, zu welcher sie sehr schnell wieder zurückkehrt, wenn sie verdichtet oder ausgedehnt worden ist, und wie die Mittelkraft der Molecularanziehungen oder Abstossungen, die die inneren Drucke hervorbringt, in grossem Verhältnisse sich ändern kann, wenn auch die Veränderungen der Abstände der Molecüle, die in den Flüssigkeiten statthaben, nur sehr klein sind.«

Bezüglich der in dieser Abhandlung discutirten Incompressibilitätsgleichung der Flüssigkeiten bemerkt jedoch *C. Neumann* in seiner oben erwähnten Schrift über die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes[2]):

> »Zu einer Ableitung der in Rede stehenden Gleichung auf Grund rein mechanischer Principien findet man aber selbst dort keinen Versuch.«

---

1) *Poisson*, Mechanik II. p. 391. (Deutsche Ausgabe v. *Stern*, Berlin 1836.)

2) S. 44. a. a. O.

Aus dem Angeführten scheint mir deutlich hervorzugehen, welche theoretischen Schwierigkeiten die Constitution fester und tropfbar-flüssiger Körper vom Standpuncte der Atomistik darbietet, wenn man nur eine statische und nicht eine elektrodynamische Wechselwirkung zwischen den Molecülen der Körper annimmt. Vielleicht hat dieser Umstand nicht wenig dazu beigetragen, der Hypothese einer continuirlichen Raumerfüllung der Materie gerade bei Mathematikern Vorschub zu leisten. Dagegen dürften die hier angedeuteten physikalischen Analogien zwischen der Wechselwirkung discreter und elektrodynamisch erregter Molecüle und der Wechselwirkung continuirlicher Volumelemente einer incompressiblen und frictionslosen Flüssigkeit den Schlüssel für die physikalische Erklärung jener merkwürdigen formalen Analogien enthalten, auf welche *Helmholtz*, *W. Thomson* und noch vor Kurzem *G. Kirchhoff* bei der mathematischen Analyse hydrodynamischer Probleme geführt worden sind.

13.

Bei allen bisher betrachteten Folgerungen, welche sich aus der elektrodynamischen Molecular-theorie der Körper ergeben haben, wurden von den intramolecularen Inductionsprocessen lediglich nur diejenigen betrachtet, welche durch Abstandsveränderungen der Molecüle erzeugt werden. Bekanntlich lehren nun aber Experiment[1]) und Theorie[2]) übereinstimmend, dass auch bei unveränderlichem Abstande eines stromdurchflossenen Leiters von einem andern Leiter, durch Veränderung der Stromintensität elektrische Ströme in letzterem inducirt werden. Das Gesetz, welches diese beiden Arten von Erregung inducirter Ströme in einem Leiter verknüpft, nämlich in dem einen Falle durch Veränderung des Abstandes, d. i. einer extensiven Grösse, in dem andern Falle durch Veränderung der Stromintensität, d. i. einer intensiven Grösse, ist ein ebenso einfaches

1) *Felici*, Nuovo Cimento T. IX. p. 345. (1859.) *Wiedemann*, Galvanismus Bd. II. § 566.

2) *W. Weber*. Elektrodynamische Maassbestimmungen I. Leipzig 1846.

F. Neumann. Abhandlungen d. Kgl. Akademie z. Berlin 1847.

als merkwürdiges. Dies Gesetz ist einfach, weil es die durch eine Veränderung des Abstandes bei constantem Strome erzeugte Inductionswirkung als vollkommen gleichwerthig mit der durch eine Veränderung des Stromes bei constantem Abstande erzeugten Wirkung ausspricht, vorausgesetzt, dass die in beiden Fällen auf verschiedene Weise erzeugten Aenderungen des elektrodynamischen Potentiales übereinstimmen.

Mit andern Worten, es hängt die Stromerregung durch Induction in einem Leiter nur von der Aenderung des Potentiales des erregenden Stromes ab. Ob diese Aenderung durch eine Abstandsveränderung oder durch Intensitätsänderung des inducirenden Stromes oder durch gleichzeitige Veränderung beider Variablen erzeugt wird, ist dem Leiter vollkommen gleichgültig. Derselbe reagirt in allen diesen Fällen stets durch die Entwickelung eines galvanischen Stromes in seinem Innern, von dem dann alle übrigen Wechselwirkungen, also auch die mechanischen Repulsions- und Attractionsphänomene, in gleicher Weise wie in den bisher nur durch Abstandsänderung characterisirten Fällen abhängen. Hieraus folgt also,

> dass durch eine Vergrösserung der Stromintensität, d. h. der Geschwindigkeit der in den Molecularströmen bewegten elektrischen Theilchen $+e$ und $-e$ mit ihren trägen Massen ε und ε' eine *Repulsion*, — durch eine Verminderung der Stromgeschwindigkeit dagegen eine *Attraction* entstehen muss.

Wäre man also im Stande, die Intensität der elektrischen Molecularströme im Innern eines Körpers in allen Molecülen zu vergrössern, so würde während dieser Zunahme der Stromintensität die Repulsion zwischen den Molecülen verstärkt, welche bestrebt ist, den mittleren Abstand derselben zu vergrössern; der Körper würde sich also ausdehnen. Im entgegengesetzten Falle würde, während einer Verminderung der molecularen Stromgeschwindigkeit, die Attraction zwischen den Molecülen verstärkt; der Körper würde sich zusammenziehen.

Bekanntlich beobachten wir bei allen Körpern, wenn dieselben hinreichend erwärmt werden, eine Ausdehnung, und ebenso eine Zusammenziehung bei ihrer Abkühlung. Erwärmen und Abkühlen bedeutet aber mechanisch nichts anders, als die

lebendige Kraft in den Molecülen eines Körpers vergrössern und vermindern. Wenn daher an dieser Veränderung der lebendigen Kraft auch die elektrischen Theilchen in den Molecularströmen Theil nehmen oder die lebendige Kraft dieser Massen allein, nach *Weber*, die Wärme eines Körpers bestimmt, so ist die Volumenveränderung der Körper bei Temperaturveränderungen eine nothwendige Consequenz der elektrodynamischen Moleculartheorie. Die Anomalien des allgemeinen Gesetzes, welche bekanntlich innerhalb gewisser Temperaturgrenzen bei einigen Körpern z. B. beim Wasser vorkommen, würden mit den hier abgeleiteten allgemeinen Folgerungen nicht im Widerspruch stehen, wenn man berücksichtigt, dass die attractiven und repulsiven Wirkungen zwischen den Molecülen nicht nur diamagnetisch, sondern auch magnetisch inducirte Wirkungen sind, deren Verhältniss von der relativen Grösse der Drehbarkeit der Ebenen der Molecularströme abhängen. Ferner kommen hierzu noch die später zu besprechenden dielektrischen Wirkungen. So lange die Abhängigkeit dieser Eigenschaften der Molecüle von ihrer Temperatur, d. h. von der lebendigen Kraft ihrer elektrischen Theilchen nicht untersucht und bestimmt ist, lassen sich die erwähnten Anomalien nicht als unmögliche und daher auch nicht mit der Theorie in Widerspruch stehende Thatsachen betrachten.

Ich habe das oben erwähnte allgemeine Gesetz der elektrischen Induction nicht nur als ein einfaches, sondern auch als ein merkwürdiges bezeichnet, und zwar deswegen, weil sich in ihm in reinster Form das Grundgesetz für die Interpretation unserer Sinnesempfindungen gegenüber den Eindrücken der Aussenwelt wiederspiegelt. Auch hier kann ein und derselbe Eindruck auf uns durch zwei gänzlich von einander getrennte Veränderungen des einwirkenden Objectes erzeugt werden, nämlich entweder erstens durch Veränderung seiner räumlichen Beziehungen (Entfernung und Lage), bei unveränderlichen Eigenschaften des Dinges, oder zweitens durch Veränderung dieser Eigenschaften, z. B. der Form und Grösse, bei unverändertem Abstande von unserem Körper. Die Existenz dieser zwiefachen Art von Ursachen — zu deren Annahme uns die Erfahrung und das Verstandesbedürfniss einer widerspruchsfreien Erklärung der Sinneseindrücke gezwungen hat, — findet ihren Ausdruck in der Beschaffenheit unserer gegenwärtigen Raumanschauung. In der That drückt die-

selbe im Wesentlichen nur jenes oben erwähnte Gesetz aus, dass jede Erklärung von empfundenen Unterschieden durch die Annahme von zwei wesentlich von einander verschiedenen Ursachen möglich sei, nämlich erstens durch Unterschiede an dem Objecte selber, bei unveränderter räumlicher Beziehung, und zweitens durch Unterschiede des Abstandes von uns, bei unveränderter Beschaffenheit des Objectes, gleichgültig, ob diese Unterschiede an einem Objecte nacheinander eintreten (Veränderungen) oder gleichzeitig bei Unterschieden mehrerer Objecte oder einzelner Theile desselben Objectes nebeneinander. Der wesentliche Inhalt unserer ganzen Raumanschauung enthält nichts anderes als den Ausdruck der in obiger Weise gefundenen Thatsache, dass die Wirkungen der Körper auf uns und auf einander sich ändern können, ohne dass hierbei die Eigenschaften der Körper sich selber zu ändern brauchen.

Hierauf beruhen z. B. alle Beweise für die Congruenz ebener Figuren durch Deckung. Denn ohne die Möglichkeit einer solchen Deckung würden zwei congruente aber symmetrische Dreiecke niemals in solche Lagen gebracht werden können, dass alle gleichen Stücke derselben gleichzeitig auf einander fallen. Um dies zu bewirken, ist der Process des Umklappens erforderlich, welcher nur in einem Raume ausgeführt werden kann, welcher eine Dimension mehr als die ebenen Dreiecke besitzt. Folglich werden durch die dritte Dimension des Raumes Widersprüche oder Antinomien unseres Verstandes beseitigt, welche derselbe ohne diese dritte Dimension zwischen begrifflich identischen und anschaulich verschiedenen Figuren in der Wirklichkeit antreffen würde. Auf diese Weise würde also ein klarer Verstand, welcher vermöge der Unvollkommenheit des mit ihm verbundenen Organismus nur eine Raumanschauung von zwei Dimensionen besässe, »durch Thatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben« diese beschränkte Raumanschauung »allmälig umarbeiten«[1]) und auf diese Weise zu unserer gegenwärtigen Raumanschauung von drei Dimensionen gelangen. Denn ohne die Anschauung der dritten Dimension würde der Verstand in jeder perspectivischen Verkleinerung, Verschiebung und Verdeckung von Objecten unerklärte Wunder zu erblicken genöthigt sein, indem alle

1) *Riemann*, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhandl. d. Kgl. Ges. d. W. zu Göttingen. Bd. XIII.

diese Veränderungen der Grösse der gereizten Netzhautfläche nur auf adäquate Veränderungen der Objecte selber bezogen werden könnten, denen man alsdann die Fähigkeit eines plötzlichen Verschwindens und Wiedererscheinens beilegen müsste, ohne sich Rechenschaft von dem Orte geben zu können, in welchem sie sich während ihrer Abwesenheit befanden und von welchem sie wieder kommen.

Alle diese Widersprüche lassen sich nur durch die Annahme der dritten Dimension des Raumes beseitigen, und zwar ganz in derselben Weise, wie nur durch Annahme der dritten Dimension die astronomischen Erscheinungen auf der scheinbaren Fläche des Himmelsgewölbes widerspruchsfrei erklärt werden können. Die Entwickelung der Astronomie zeigt uns das allmälige Entstehen der dritten Dimension am Himmel im bewussten Erkenntnissprocesse, während wir uns dieses empirisch-psychologischen Ursprunges in den Orientirungsprocessen des täglichen Lebens nicht mehr bewusst sind.

Dass es nun aber auch bei unserer gegenwärtigen Raumanschauung von drei Dimensionen noch Antinomien giebt, und zwar nicht nur physikalische sondern in erster Linie auch geometrische von ganz derselben Gattung wie die oben bei der Congruenz ebener Figuren erwähnte, dies hat zuerst *Kant*[1]) vor 108 Jahren in seiner Abhandlung »von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume« (1768) nachgewiesen. In der That, lässt sich der Unterschied, welcher zwischen congruenten und symmetrischen räumlichen Gestalten, wie sie z. B. zwischen einem Objecte und seinem Spiegelbilde existiren, nicht anders begrifflich ausdrücken, als dass man die vollkommen identische relative Lage der einzelnen Theile solcher Gestalten auf einen Ort bezieht, der ausserhalb des Objectes liegt, und daher mit der relativen Lage und Grösse der Begrenzungsstücke, durch welche wir die geometrischen Eigenschaften eines räumlichen Gebildes erschöpfend definiren, in gar keiner Beziehung steht. Hieraus zieht *Kant* a. a. O. den Schluss:

> »dass der absolute Raum unabhängig von dem Dasein aller Materie und selbst als der erste Grund der Möglichkeit ihrer Zusammensetzung eine eigene Realität habe.«[2]) (p. 294.)

1) *Kant*'s Werke, Bd. V. p. 293 ff. Ausgabe von *Rosenkranz*.
2) p. 294. a. a. O.

... »weil nur durch ihn das Verhältniss körperlicher Dinge möglich ist, und dass, weil der absolute Raum kein Gegenstand einer äusseren Empfindung, sondern ein Grundbegriff ist, der alle dieselbe zuerst möglich macht, wir dasjenige, was in der Gestalt eines Körpers lediglich die Beziehung auf den reinen Raum angeht, nur durch die Gegenhaltung mit andern Körpern wahrnehmen können.«[1])

Könnte nun diese geometrische Antinomie an Gebilden von drei Dimensionen in ähnlicher Weise wie die in einem früheren Stadium unserer Verstandesentwickelung vorhandene Antinomie an Gebilden von zwei Dimensionen, dadurch aufgelöst werden, dass man die Zahl der Dimensionen des Raumes um eine erhöht, so würde in einem Raume von 4 Dimensionen jene Antinomie verschwinden. Mit dieser hier begrifflich angedeuteten Möglichkeit von der theoretischen Entwickelung einer 4ten Dimension des Raumes darf jedoch nicht die anschauliche und practische Entwickelung derselben verwechselt werden. Letztere würde sich vielmehr nur unter dem Einfluss einer derartig veränderten Organisation unseres Körpers entwickeln können, dass wir jederzeit willkürlich im Stande sind, solche Operationen mit Körpern vorzunehmen, welche in ähnlicher Weise die Symmetrie congruenter räumlicher Gebilde aufheben, wie das Umwenden die Symmetrie congruenter ebener Gebilde aufhebt, also in beiden Fällen ohne Veränderung der relativen Lage einzelner Theile dieser Gebilde.

Diese Andeutungen über den Zusammenhang unserer räumlichen Anschauungsformen mit den durch die Erfahrung gegebenen Erscheinungen, mögen genügen, um meine Behauptung zu rechtfertigen, dass der Ursprung und die Erweiterung unserer Anschauungsformen und der eng damit verknüpfte Fortschritt der Naturerkenntniss durch Thatsachen bedingt ist, welche uns die Erfahrung liefert, und durch Antinomien, zu welchen der Verstand durch Anwendung des Satzes vom zureichenden Grunde auf jene empirischen Thatsachen geführt wird. Jede Beseitigung einer auf wirklicher Erfahrung beruhenden Antinomie führt nothwendig zu einer Erweiterung der bisherigen Grenzen unserer Anschauungsformen und hierdurch gleichzeitig

1) p. 301. a. a. O.

zu einer Erweiterung der Grenzen unserer Naturerkenntniss. Hieraus ergiebt sich, dass die physikalischen Gesetze für die Wechselwirkung von discreten Massen in engem Zusammenhange mit unseren räumlichen Anschauungsformen stehen, was bereits *Kant* vor 129 Jahren mit folgenden Worten angedeutet hat:

»Es ist wahrscheinlich, dass die dreifache Abmessung des Raumes von dem Gesetze herrühre, nach welchem die Kräfte der Substanzen ineinander wirken.«

»Die dreifache Abmessung scheint daher zu rühren, weil die Substanzen in der existirenden Welt so ineinander wirken, dass die Stärke der Wirkung sich wie das Quadrat der Weiten umgekehrt verhält.« [1])

Diesen Zusammenhang der Eigenschaften des Raumes mit dem Gesetze der Wechselwirkung zweier Körper durch das allgemeine Gesetz der elektrischen Induction zu erläutern, war der wesentliche Zweck der vorangehenden Erörterungen.

14.

Es wurde zu Anfang des vorigen Artikels der allgemeine Einfluss der Wärme auf die Körper nach der elektrodynamischen Moleculartheorie behandelt und hierbei gezeigt, dass die, bei Aenderung des Temperaturzustandes auftretenden, Aenderungen ihres Volumens abgeleitet werden können aus den repulsiven und attractiven Wirkungen, welche zwei stromdurchflossene Leiter während der Zunahme und Abnahme der in ihnen fliessenden Ströme aufeinander ausüben. Es mögen im Anschluss hieran jetzt noch einige allgemeine Verhältnisse erörtert werden, welche die Körper beim Durchgange von elektrischen Strömen durch ihre Masse zeigen.

Der Vorgang bei der Fortführung der elektrischen Theilchen $+ e$ und $- e$ ist bei metallischen Körpern und flüssigen Elektrolyten ein etwas verschiedener. Während bei den ersteren nach den Anschauungen *Weber*'s nur jene elektrischen Theilchen mit den unzertrennlich ihnen anhaftenden trägen Massen von Molecül zu Molecül in entgegengesetzter Richtung fortwandern, kann dies bei Elektrolyten, wie ihre Zersetzung beweist, nur in

1) *Kant*'s Werke, Bd. 5. p. 26. Ausgabe von *Rosenkranz*.

der Weise geschehen, dass die Elektricitätstheilchen gleichzeitig die vorher miteinander verbundenen Molecüle der chemischen Verbindung bei ihrer Wanderung mitnehmen, um sie an den Elektroden abzulagern. Es geht hieraus hervor, dass der elektrische Strom, wenn er durch flüssige Elektrolyten geht, im Allgemeinen eine grössere Arbeit als in metallischen Leitern zu leisten hat. Nach der elektrodynamischen Molecularlheorie besteht nun aber die Arbeit, welche bei irgend einer Ortsveränderung eines Molecüles im Innern oder an der Oberfläche eines Körpers geleistet wird, in der Ueberwindung eines durch elektrodynamische Induction erzeugten Widerstandes, der seiner Natur und seinem Ursprunge nach identisch ist mit dem bei der inneren Reibung und der scheinbaren Adhäsion zu überwindenden Widerstande.

Es folgt also aus der elektrodynamischen Molecularlheorie unmittelbar, dass auch bei der durch den elektrischen Strom erzeugten Fortführung materieller Molecüle ein Widerstand überwunden, d. h. eine Arbeit geleistet werden muss, welche von denselben Kräften erzeugt wird, aus welchen die Reibung und Adhäsion entspringt. Folglich muss auch, bei Constanz der wesentlichen Umstände, zwischen dem Leitungsvermögen und der Reibungsconstante flüssiger Elektrolyte eine Proportionalität stattfinden. Zu den erwähnten wesentlichen Umständen, von deren Constanz diese Proportionalität abhängt, wird vor allem die Arbeit gehören, welche zur Ueberwindung des Zusammenhanges der beiden elektrolytisch getrennten Bestandtheile erforderlich ist.

Alle Ursachen, welche diesen Zusammenhang lockern, werden eine Verminderung dieser molecularen Arbeit des Stromes bedingen und daher die Leitungsfähigkeit des Elektrolyten vergrössern. Als Ursachen, welche diese sogenannte chemische Anziehungskraft zweier Molecüle vermindern, kennen wir nun, abgesehen von der Elektricität, nur die Wärme und die sogenannte chemische Einwirkung der Molecüle eines anderen Körpers. Man müsste also hieraus schliessen, dass Wärmezufuhr, d. h. Temperaturerhöhung und Zusatz fremder, chemisch nicht zur Verbindung gehöriger, Molecüle den Leitungswiderstand einer elektrolytischen Flüssigkeit vermindert.

Diese beiden Folgerungen werden durch die Erfahrung be-

stätigt. Die erstere, dass leitende Flüssigkeiten bei einer Temperaturerhöhung ihren Leitungswiderstand vermindern, und zwar unter Umständen sehr bedeutend, ist eine längst bekannte Thatsache. [1]) Dagegen ist die zweite Folgerung in ihrer Allgemeinheit erst ganz vor Kurzem durch eine Untersuchung von *F. Kohlrausch* festgestellt worden, welche *Beetz* am 5. Nov. 1875 der Kgl. Baierischen Akad. d. W. mitgetheilt hat.[2]) Indem ich von andern, nicht minder interessanten, Beziehungen absehe, welche *Kohlrausch* zwischen der elektrischen Leitungsfähigkeit und der chemischen Zusammensetzung von Flüssigkeiten findet, beschränke ich mich nur darauf, hier die beiden folgenden Sätze mitzutheilen. *Kohlrausch* hat die Leitungsfähigkeit verschiedener Mischungen von Wasser und Schwefelsäure untersucht und bemerkt hierbei:

> »Wir sehen also, dass dasjenige Verhältniss von Wasser und Schwefelsäure, in welchem beide eine chemische Verbindung darstellen (wenn dieselbe auch nicht sehr fest sein mag) für das elektrische Leitungsvermögen ungünstig ist.«
>
> »Endlich besteht die auffallende Thatsache, dass nicht eine einzige chemisch feste Verbindung vorliegt, welche in gewöhnlicher Temperatur für sich ein gut leitender Elektrolyt wäre.«
>
> »Mir scheint, dass die genannte Reihe von Thatsachen eine aufmerksame Beachtung verdient. Man wird durch sie unwillkürlich zu der Meinung gedrängt, dass es vor Allem die Mischung verschiedener Körper sei, welche sie elektrolytisch leitend macht; wenigstens wenn sie einzeln chemisch feste Verbindungen darstellen.«

Diese merkwürdigen Beziehungen erscheinen als einfache und nothwendige Consequenzen der elektrodynamischen Moleculartheorie, wenn man die Annahme macht, dass auch die sogenannten chemischen Affinitätskräfte der Molecüle identisch mit elektrischen oder magnetischen Attractionskräften sind,

---

1) *Hankel, Pogg.* Ann. Bd. 69 S. 255. 1846. Vgl. *Wiedemann*, Galvanismus, 2. Aufl. Bd. I. p. 321 ff.

2) *F. Kohlrausch*, Ueber das elektrische Leitungsvermögen des Wassers und der Säuren. Sitzung d. math.-phys. Classe v. 5. Nov. 1875. p. 284.

die aus diesem Grunde nothwendig mit den Kräften der im galvanischen Strome bewegten elektrischen Theilchen in Wechselwirkung treten müssen. Diese Hypothese von der Identität der elektrischen und chemischen Kräfte ist aber keine neue, sondern bereits vor 42 Jahren von *Faraday* und später von *Joule* als eine durch Versuche bewiesene Thatsache hingestellt worden. Zum Beweise meiner Behauptung erlaube ich mir hier wörtlich einige Sätze aus der berühmten Abhandlung von *Joule* »über das mechanische Aequivalent der Wärme, bestimmt durch die Wärmeentwickelung bei Reibung von Flüssigkeiten« [1]) aus der oben citirten deutschen Ausgabe seiner Abhandlungen (p. 99) anzuführen:

> »1834 erwies Dr. *Faraday* die »»Identität der chemischen und elektrischen Kräfte««. Dieses Gesetz, welches der grosse Mann neben vielen anderen entdeckte, und welches die Beziehungen zwischen Magnetismus, Elektricität und Licht darlegt, erlaubte ihm, den Gedanken auszusprechen, dass die sogenannten Imponderabilien nur die Exponenten verschiedener Formen der Kräfte seien.
>
> Auch Herr *Grove* und Dr. *Mayer* haben sich entschieden für ähnliche Ansichten ausgesprochen.
>
> Meine eigenen Versuche in Bezug auf diesen Gegenstand wurden im Jahre 1840 begonnen, wo ich der Royal Society meine Entdeckung des Gesetzes für die Wärmeerzeugung durch *Volta*-Elektricität mittheilte. Aus diesem Gesetze ergab sich unmittelbar:
>
> 1. dass die durch eine *Volta*'sche Säule entwickelte Wärme *ceteris paribus* ihrer Intensität oder elektromotorischen Kraft proportional ist, und
> 2. dass die durch Verbrennung eines Körpers erzeugte Wärme der Intensität seiner Verwandtschaft zum Sauerstoff proportional ist.
>
> So fuhr ich fort, Beziehungen zwischen Wärme und chemischer Verwandtschaft festzustellen. 1843 zeigte ich, dass die durch Magneto-Elektricität erzeugte Wärme der verbrauchten Kraft proportional ist; und dass die Kraft der elektromagnetischen Maschine von der Kraft der chemischen

1) Philos. Magazine vol. XXXI. p. 173 (1847).

Verwandtschaft in der Batterie herrührt, einer Kraft, welche sonst in Form von Wärme auftreten würde.«

Dass nun ferner auch die oben aus der elektrodynamischen Moleculartheorie deducirten Beziehungen zwischen dem elektrischen Leitungswiderstande und der Constante der inneren Reibung oder Zähigkeit existiren, ist ebenfalls eine längst bekannte Thatsache.[1] *Wiedemann*[2] hat z. B. durch Versuche für verdünnte Lösungen von schwefelsaurem Kupferoxyd, salpetersaurem Kupferoxyd, salpetersaurem Silberoxyd, Kali, salpetersaurem Ammoniak sowie für verdünnte Schwefelsäure nachgewiesen, dass man das galvanische Leitungsvermögen durch einen mit einer Constante multiplicirten Quotienten darstellen kann, der zum Zähler den Procentgehalt, zum Nenner die Reibungsconstante hat.

Ebenso ist durch zwei erst kürzlich erschienene Abhandlungen von *Grotrian* über »die Reibungsconstanten einiger Salzlösungen und ihre Beziehungen zum galvanischen Leitungsvermögen«[3] der Nachweis geliefert, dass diese Beziehungen auch noch in sehr interessanten Analogien ihren Ausdruck finden, welche zwischen den Aenderungen des Leitungsvermögens und der Reibungsconstante mit der Temperatur bestehen. Auf Grund zahlreicher und sorgfältig angestellter Versuche gelangt nämlich *Grotrian* zu dem Schlusse:

»dass die Aenderung des Leitungsvermögens mit der Temperatur die grösste Aehnlichkeit mit der Aenderung der Reibungsconstanten durch die Temperatur besitzt.«

Bei metallischen Leitern, welche der elektrische Strom ohne Zersetzung durchfliesst, fällt die elektrolytische Arbeit fort, und es kann die Arbeit des Stromes im Innern eines solchen atomistisch constituirten Leiters nur in derjenigen Arbeit bestehen, welche nach den Gesetzen der *Galilei-Newton*'schen Mechanik eine fernwirkende Kraft bei Bewegung einer trägen Masse leistet. Im vorliegenden Falle ist nun diese fernwirkende Kraft die elektromotorische Kraft, und die träge Masse die den elektrischen Theilchen

1) *Hankel*, *Pogg.* Ann. Bd. 69. S. 263.
Beetz, ebendas. Bd. 117. S. 17.
2) *Wiedemann*, ebendas. Bd. 99. S. 229.
3) *O. Grotrian*, ebendas. Bd. 157. p. 180 ff. (Heft 1) und p. 237 (Heft 2).

$+e$ und $-e$ eigenthümliche träge Masse $\varepsilon + \varepsilon'$. Weder über das Verhältniss noch die absolute Grösse dieser trägen Massen ε und ε' liegen bisjetzt Bestimmungen vor. Wir wissen nur, dass diese Massen im Vergleich zu den kleinsten der uns bisjetzt bekannten Massen sehr klein sein müssen; dagegen scheint durch die eigenthümlichen und mannigfachen Unterschiede, welche sich bei zahlreichen, durch die positive und negative Elektricität erzeugten, Phänomenen zeigen, [1]) eine quantitative Verschiedenheit jener trägen Massen ε und ε' angedeutet zu werden. Für die vorliegende Betrachtung ist diese Verschiedenheit gleichgültig; man kann ferner voraussetzen, dass z. B. die negativen elektrischen Theilchen $-e$ mit ihren trägen Massen ε' ruhen, indem sie fest mit den ruhenden Molecülen des metallischen Leiters verbunden gedacht werden. Unter dieser vereinfachenden Voraussetzung hätten wir es alsdann nur mit den durch die elektromotorische Kraft erzeugten Bewegungen der trägen Massen ε der positiven elektrischen Theilchen $+e$ zu thun. Bekanntlich wird nun in der Mechanik die Arbeit, welche eine auf eine frei bewegliche Masse ε einwirkende Kraft f in einem Zeittheilchen dt leistet, gemessen durch das Product aus dieser Kraft und die von ihr erzeugte und in ihre Richtung fallende Geschwindigkeits-Componente u, d. h. also durch das Product

$$f u . dt$$

In diesem Ausdrucke bedeutet folglich u die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein positives elektrisches Theilchen $+e$ nebst seiner trägen Masse ε in der Richtung des elektrischen Stromes im Leiter bewegt, wenn es durch eine, in mechanischem Maasse ausgedrückte, Kraft f afficirt wird. [2]) Da nun die Stromstärke i

---

1) Z. B. in den *Lichtenberg*'schen Figuren und den Lichterscheinungen an den Elektroden von *Geissler*'schen Röhren.

2) Die Ableitung bleibt genau dieselbe, wenn man sich die negativen elektrischen Theilchen nicht mit den Molecülen des Leiters verbunden, sondern mit gleicher aber entgegengesetzter Geschwindigkeit $-u$ von einer elektromotorischen Kraft $-f$ afficirt denkt. Wenn man dann für die positiven Theilchen die gleichen aber entgegengesetzten Grössen annimmt, so besteht die Arbeit der elektromotorischen Kraft während eines Zeitelementes dt aus zwei Theilen, nämlich aus

der Arbeit der positiven Theilchen $= (+f) . (+udt) = f.udt$
und der Arbeit der negativen Theilchen $. (-f) \quad (-udt) = fudt$,
so dass die ganze, von der elektromotorischen Kraft geleistete Arbeit sich ergiebt als die Summe dieser beiden Arbeiten d. h. als: $2\,fudt$.

eines galvanischen Stromes gemessen wird durch die Quantität von Elektricitätstheilchen (unter der gemachten Annahme also von positiven Elektricitätstheilchen) welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters fliessen, so wird diese Stromstärke i proportional der Geschwindigkeit u sein. Die elektromotorische Kraft e, insofern sie die Ursache jener Fortführung elektrischer Theilchen ist, wird ebenso proportional der Kraft f sein, so dass, wenn A einen Proportionalitätsfactor bedeutet, man die Gleichung hat:

$$f \,.\, u = A \,.\, e \,.\, i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bekanntlich wird nun der sogenannte Widerstand w eines Leiters gemessen durch das Verhältniss der elektromotorischen Kraft e zu der Stromstärke i, oder, bei Zugrundelegung der obigen mechanischen Vorstellungen, durch das Verhältniss der beschleunigenden Kraft f zu der durch sie erzeugten Beschleunigung u, also genau durch dasjenige Verhältniss, welches wir in der Dynamik als Maass einer trägen Masse betrachten. Man hat also:

$$w = \frac{e}{i}$$

und hieraus

$$e = w \,.\, i$$

Führt man diesen Werth von e in die obige Gleichung (1) für fu ein, so erhält man

$$f \,.\, u = A \,.\, w \,.\, i^2 \,. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In Worten ausgedrückt, lautet das gefundene Resultat folgendermassen:

> Die von einem galvanischen Strome in einem Leiter geleistete mechanische Arbeit ist proportional dem Producte aus dem Widerstande des Leiters und dem Quadrate der Stromstärke.

Dieser Satz enthält das von *Joule* und *Lenz* auf experimentellem Wege gefundene Gesetz für die von einem galvanischen Strome in einem Leiter erzeugte Wärme. Da nun aber unseren heutigen Anschauungen gemäss Wärme und mechanische Arbeit äquivalent sind, so haben die oben abgeleiteten Consequenzen im Wesentlichen die Bedeutung einer theoretischen Deduction des Gesetzes von *Lenz* und *Joule* aus den

Principien der atomistischen Elektricitätslehre.[1]) Es fragt sich hierbei nur noch, in wie weit wir im Stande sind, uns eine »construirbare Vorstellung« von dem molecularen Vorgange zu machen, durch welchen im Innern eines stromdurchflossenen Leiters die lebendige Kraft der trägen Massen ε und ε_1 der elektrischen Theilchen sich in einen integrirenden Bestandtheil der lebendigen Kraft der Molecüle des Leiters verwandelt. Wären die im Innern eines Leiters strömend fortbewegten Theilchen nur ihrer eigenen Wechselwirkung und der elektromotorischen Kraft unterworfen, so würde sich ihre Geschwindigkeit, wie die eines frei fallenden Körpers, fortdauernd im Sinne der Strombewegung vergrössern und daher die Stromstärke stetig mit der Zeit anwachsen.

Die Erfahrung lehrt, dass dies nicht der Fall ist, sondern dass der Strom, kurze Zeit nach dem Schluss der Kette, stationär wird. Hieraus folgt, dass die im Leiter erzeugte Wärme nicht allein in der lebendigen Kraft der strömend bewegten Elektricitätstheilchen bestehen kann. Nimmt man daher mit *Weber* an, dass die auch ohne Anwesenheit eines Stromes in jedem Körper beweglichen Theile die elektrischen Theilchen der Molecularströme sind, deren lebendige Kraft die Wärmemenge eines Körpers bestimmt, so muss die strömende Bewegung der Elektricität die Intensität der Molecularströme vergrössern, was durch einen mechanischen Process geschehen kann, der analog demjenigen ist, durch welchen die mittlere lebendige Kraft unseres Planetensystems durch ein- und austretende Kometen- und Meteorschwärme vergrössert werden kann. Letztere würden die strömend bewegten Elektricitätstheilchen darstellen, während die Planeten die positiv-elektrischen Theilchen, und die Sonne das ponderable Molecül mit seiner negativen Elektricität repräsentiren würden.

Um experimentell die Identität und nicht blos die Proportionalität zwischen der vom Strome erzeugten Wärme und der zur Stromerregung verwandten Arbeit nachzuweisen, bedarf es noch feinerer absoluter Maassbestimmungen, als bisher haben ausgeführt werden können.

---

1) *Wilhelm Weber* hat diese Deduction gegeben in seiner letzten Abhandlung »über die Bewegungen der Elektricität in Körpern von molecularer Constitution.« *Pogg.* Ann. Bd. 156 p. 34 ff. (1875.)

Nach den hier angedeuteten Vorstellungen lassen sich nun leicht die Umstände angeben, welche den Widerstand eines metallischen Leiters verändern müssen. Da der Widerstand durch das Verhältniss der Beschleunigung eines elektrischen Theilchens zur elektromotorischen Kraft, welche diese Beschleunigung erzeugt, gemessen wird, so ist klar, dass für diejenigen Molecularströme, deren Ebenen senkrecht zur Strombewegung stehen, das erwähnte Verhältniss kleiner als für andere sein muss. Denn bei diesen Strömen steht die Richtung der Geschwindigkeitscomponenten der bewegten Elektricitäts-Theilchen senkrecht zur Richtung der beschleunigenden Kraft. Wird daher die lebendige Kraft dieser Molecularströme vergrössert, z. B. durch Temperaturerhöhung des Leiters, so wird eine grössere beschleunigende Kraft in der Richtung des Stromes erforderlich sein, um diesen schneller bewegten Theilchen dieselbe Geschwindigkeitscomponente wie vorher zu ertheilen.

Folglich muss der Leitungswiderstand metallischer Leiter durch Temperaturerhöhung vergrössert werden, so lange die wesentlichen Umstände dieselben bleiben. Diese Folgerung wird durch zahlreiche und längst bekannte Thatsachen bestätigt.[1]

Eine zweite Art, den Leitungswiderstand zu vergrössern, bestände darin, dass man bei unveränderter Temperatur die Anzahl derjenigen Molecularströme vergrösserte, deren Ebenen senkrecht zur Strombewegung stehen. Bei magnetischen Körpern kann dies durch Magnetisirung geschehen, da dieser Vorgang nach *Ampère* und *Weber* nur in der Drehung von bereits im Körper vorhandenen Molecularströmen besteht. Es müsste daher ein stark magnetisirter Körper in der Richtung der magnetischen Axe einen grösseren Leitungswiderstand als in einer hierzu senkrechten Richtung zeigen. Auch diese Folgerung scheint bereits durch Beobachtungen von *W. Thomson*[2] und *Beetz*[3] bestätigt zu sein. Wenigstens findet Ersterer, dass »der Widerstand des Eisens bei seiner temporären Magnetisirung in der Richtung seiner

1) Vgl. *Wiedemann*, Galvanismus, Cap. III. Einfluss der Temperatur auf den Widerstand metallischer Leiter.

2) *W. Thomson*, Phil. Trans. 1858. Vol. III. p. 737.

3) *Beetz*, *Pogg.* Ann. Bd. 128. S. 202. (1866.)

magnetischen Axe um etwa $^1/_{3000}$ stieg.«[1]) Ebenso bemerkt *Wiedemann* a. a. O. S. 592 über die anderen Versuche:

»*Beetz* hat indessen entschieden eine Zunahme des Widerstandes der magnetisirten Körper in der Richtung ihrer magnetischen Axe beobachtet, selbst wenn die, bei den Versuchen von *Thomson* möglichen, secundären Einflüsse nicht wirkten.«

Alle diese Erscheinungen lassen sich, wie gezeigt, sehr einfach aus der elektrodynamischen Molecular-theorie ableiten, wenn man in der angedeuteten Weise eine Uebertragung von lebendiger Kraft von einem Molecularsysteme zum andern mit der bewegten Masse selber, d. h. durch den Eintritt bewegter elektrischer Theilchen mit ihren trägen Massen ε und ε' in die beharrliche Molecularströmung der um ein benachbartes Molecül kreisenden Elektricitätstheilchen annimmt. Wenn aber auf diese Weise einmal die Existenz einer solchen Uebertragung von lebendiger Kraft oder Wärme in den Körpern erwiesen ist, so liefert dieser Vorgang auch den Schlüssel zur Uebertragung von Wärme in denjenigen Fällen, wo zwei sich berührende Körper oder zwei Schichten desselben Körpers von verschiedener Temperatur Wärme durch Leitung mit einander austauschen. Diese, zuerst von *W. Weber* ausgesprochene, Auffassung des molecularen Vorganges bei der Wärmeleitung eröffnet unmittelbar das Verständniss für die von *Wiedemann*, *Franz* und andern Physikern beobachtete Proportionalität zwischen der elektrischen und thermischen Leitungsfähigkeit der Körper.

Da nun bei dieser Art der Uebertragung von lebendiger Kraft der Molecüle lediglich die lebendige Kraft der trägen Massen der elektrischen Theilchen $+e$ und $-e$ in Betracht kommt, so entspricht dieser Vorgang der zuerst von *W. Thomson* zur Erklärung der thermoelektrischen Erscheinungen, besonders des *Peltier*'schen Phänomenes, gemachten Hypothese von der Fortführung der Elektricität durch die leitend sich verbreitende Wärme. Diese Anschauung ist neuerdings auch von *Kohlrausch*[2]) entwickelt und von *W. Weber*[3]) in einer solchen Weise verallgemeinert worden, dass hierdurch gleichzeitig ein Verständniss für die beim Con-

---

1) *Wiedemann*, Galvanismus II. p. 589.
2) Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1874. p. 65.
3) *Poggend.* Ann. Bd. 156. p. 44 ff. (Septemberheft. 1875.)

tacte heterogener Körper auftretenden elektrischen Spannungen eröffnet wird.

Bezüglich der Interpretation der krystallinischen Structur- und Cohäsionsverhältnisse der Körper so wie der chemischen Affinitätskräfte, welche nach der elektrodynamischen Theorie der Materie nur verschiedene Aeusserungen derselben Kraft, nämlich der Elektricität, sind, erlaube ich mir auf die schönen und inhaltreichen Untersuchungen von *Wiedemann*[1]) zu verweisen. Bei seinen Bemühungen, diese merkwürdigen Analogien zu erklären oder wenigstens plausibel zu machen, bedient sich aber *Wiedemann* stets noch der Hypothese von »Molecularmagneten«, eine Annahme, welche jedoch, wie oben gezeigt, nach der Entdeckung des Diamagnetismus nicht mehr statthaft ist und mit der Hypothese von beharrlichen Molecularströmen vertauscht werden muss. Erst hierdurch wird der Einfluss der Wärme auf alle diese mannigfaltigen Erscheinungen einer theoretischen Behandlung fähig, und ich glaube, dass auf den von *Wiedemann* und *Kohlrausch*[2]) experimentell betretenen Wegen in Verbindung mit der elektrodynamischen Theorie der Materie der Chemie der Zukunft einst die schönsten Früchte erblühen werden.

---

1) *Wiedemann*, Galvanismus. (2. Auflage.) Bd. II. p. 328—334. Analogie des magnetischen mit dem mechanischen Verhalten der Körper. — II. 492 Analogie zwischen den Erscheinungen der Torsion und des Magnetismus. — II, 510—609 Magnetismus chemischer Verbindungen; II, 648 Einfluss des Magnetismus auf Krystallbildung.

2) In seiner letzten Arbeit (Sitzungsberichte d. K. Akad. d. Wiss. zu München 1875, Nov. 5) zeigt *Kohlrausch*, dass die Bestimmung des Leitungswiderstandes mit Hülfe des *Weber*'schen Dynamometers ein physikalisches Reagenz für die chemische Reinheit flüssiger Körper ist, welches selbst die empfindlichsten aller bisher bekannten chemischen Reagentien weit überflügelt. *Kohlrausch* bemerkt hierüber a. a. O. wörtlich Folgendes:

> »Ich will einige Proben von der beispiellos empfindlichen Reaction auf die Reinheit des Wassers durch sein Leitungsvermögen mittheilen: Durch blosses Stehen in der Platinschale unter dicht schliessender Glasglocke stieg das Leitungsvermögen eines Destillators von $k \cdot 10^{10} = 0.77$ an in fünf Stunden auf 1.5, in 20 Stunden auf 3.5, in 80 Stunden auf 8.6, in 44 Tagen bis auf 30. — Tabakrauch vermehrte das Leitungsvermögen binnen kurzer Zeit in auffälliger Weise«. — »Ein Milliontel Schwefelsäure oder Salpetersäure, d. h. ein Tropfen in etwa 60 Liter, bewirkt ferner im Wasser ungefähr das 10fache von obigem Leitungsvermögen.«

15.

Am Schlusse des vorigen Artikels wurde die Uebertragung und Verbreitung von lebendiger Kraft mit den, diese lebendige Kraft selber besitzenden, Massentheilchen e und e' discutirt. Die Physik lehrt uns nun aber in den Erscheinungen der strahlenden Wärme und des Lichtes noch eine zweite Art der Uebertragung von lebendiger Kraft, ohne Fortführung von trägen Massentheilchen, kennen, nämlich durch sogenannte Schwingungen der Massentheilchen eines elastischen Mediums.

Nach den bisher entwickelten Principien der elektrodynamischen Molecular-theorie entspringen die sogenannten elastischen Kräfte bei der Abstandsveränderung zweier Molecüle nur aus den, durch elektrische Induction erzeugten, diamagnetischen Repulsions- und Attractionskräften. Denken wir uns z. B. eine Reihe gleichweit von einander abstehenden Molecüle

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & b & c & d & e & f & g \end{array}$$

so wird durch eine Verrückung von a nach b in b eine Bewegung von elektrischen Theilchen inducirt, welche eine Repulsivkraft zwischen a und b hervorruft. Das Entstehen eines Inductionsstromes in b erzeugt aber, wie früher gezeigt, gleichfalls einen Inductionsstrom in c, der so gerichtet ist, dass nun auch zwischen b und c eine Repulsivkraft entsteht. Auf diese Weise pflanzt sich also, wie man sieht, in der Molecülreihe von a nach b eine longitudinale Schwingung fort, die in Folge einer Verrückung des Molecüles a nach b erzeugt worden ist.

Nach den früher besprochenen Eigenschaften des Inductionsgesetzes kann genau dieselbe Wirkung auch durch eine Verstärkung der Molecularströme in a bewirkt werden, indem während der Dauer dieser Verstärkung der elektrischen Strömung eine Repulsion zwischen a und b entsteht, die sich dann in ähnlicher Weise auf die andern Molecüle überträgt, wie im vorigen Falle. Wenn daher durch irgend welche Ursachen in der ganzen Molecülreihe von a bis g gleichzeitig eine Zunahme der Stromintensität der Molecularströme erfolgt, so findet, während dieser Zunahme, eine Repulsion zwischen allen Molecülen gleichzeitig statt, während umgekehrt bei gleichzeitiger Ab-

nahme der molecularen Stromgeschwindigkeit eine Attraction zwischen den elektrodynamisch erregten Molecülen entsteht. Es sind diese einfachen Betrachtungen bereits oben zur Erklärung des allgemeinen Verhaltens der Körper gegenüber der Wärme benutzt worden, bezüglich der Aenderung ihres Volumens mit der Temperatur. In der obigen Reihe von Molecülen würde sich also auch dann lebendige Kraft von einem Molecüle zum andern ohne Uebergang von materiellen Theilchen fortpflanzen, wenn dieselben in relativ constantem Abstande blieben, eine Eigenschaft, die durch die Incompressibilität des betrachteten Aggregats von Molecülen ausgedrückt wäre. Die beweglichen Theilchen, deren lebendige Kraft auf solche Weise sich fortpflanzt, sind hier wiederum die trägen Massen ε und ε' der elektrischen Theilchen $+e$ und $-e$, und es folgt aus der Anwendung des *Weber*'schen Grundgesetzes auf die inducirten Ströme, dass die Componenten der inducirten Bewegungen dieser Theilchen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der hier betrachteten Welle stehen müssen.

Um daher durch den elektrischen Inductionsprocess die Uebertragung von lebendiger Kraft dieser Theilchen, d. h. von Wärme, auf andere Körper zu ermöglichen, und zwar ohne gleichzeitige Uebertragung von elektrischen Massentheilchen wie bei der Wärmeleitung, würde die Annahme eines überall im Weltraum und zwischen den Molecülen der Körper verbreiteten Mediums genügen, welches aus einem Aggregate beharrlicher, elektrischer Molecularströme besteht. Die einfachste Constitution eines solchen Aggregates würde in Molecularströmen bestehen, von denen jeder nur aus *einem* positiv elektrischen Theilchen $+e$ mit der trägen Masse ε und *einem* negativ elektrischen Theilchen $-e$ mit der trägen Masse ε' zusammengesetzt ist. Ein solches Medium würde nach dem Vorausgegangenen die zwei characteristischen Eigenschaften besitzen: erstens eine merkliche Incompressibilität und zweitens die Fähigkeit, Schwingungen fortzupflanzen, bei denen die Schwingungscomponenten der bewegten Theilchen $+e$ und $-e$ senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung stehen.

Da nun diese beiden Eigenschaften identisch mit denjenigen sind, zu welchen die Erscheinungen der Optik und der strahlenden Wärme bei dem sogenannten Aether geführt haben, so nehme ich an, dass der Aether aus einem Aggre-

gate der elektrischen Theilchen + e und — e besteht, welche mit ihren trägen Massen ε und ε' paarweise zu Molecularströmen verbunden sind.

Ich erlaube mir nun zunächst zu bemerken, dass die Hypothese von der elektrischen Natur des Lichtäthers nicht neu ist. Der Erste, welcher meines Wissens dieselbe auf Grund exacter Forschungen ausgesprochen hat, ist *Carl Neumann*. Bei Gelegenheit einer näheren Discussion der von *Mac Cullagh* zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene aufgestellten Differentialgleichungen [1]), mit denen sich *C. Neumann* auf Anregung seines Vaters sehr eingehend beschäftigt hatte, gelangte Ersterer bereits vor 20 Jahren (1856) zu folgendem Satze:

> »Geht man von der Hypothese aus, dass die relative Verrückung eines Aethertheilchens in Bezug auf ein anderes auf dieses letztere ebenso einwirkt, wie das Element eines elektrischen Stromes auf einen Magnetpol wirkt; so ergeben sich aus dieser Hypothese unmittelbar und mit Nothwendigkeit die *Mac Cullagh*'schen Differentialgleichungen.«

Später gelangte auch *Clebsch* in seiner Abhandlung über die circularpolarisirenden Medien zu demselben Resultate bezüglich der noch etwas allgemeineren, von *Cauchy* aufgestellten, Differentialgleichungen. [2])

Mit grösstem Erfolge wurde aber dann von *C. Neumann* in seiner bereits früher citirten Schrift (1863) diese Hypothese benutzt, um die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes zu erklären.

Nur vier Jahre später spricht alsdann der dänische Physiker *L. Lorenz* in Kopenhagen ganz allgemein »die Identität der Schwingungen des Lichtes mit den elektrischen Strömen« [3]) aus. Indem *Lorenz* bei seinen Untersuchungen wesentlich mathematisch zu Werke geht und ausdrücklich alle physischen Hypothesen, welche die Allgemeinheit seiner Resultate beeinträchtigen können, fern hält, spricht er selber das Ergebniss seiner Untersuchungen a. a. O. mit folgenden Worten aus:

---

1) *Pogg.* Ann. Ergänz. Bd. II. p. 425.

2) *Borchardt*'s Journal Bd. 57. S. 322—324.

3) *Pogg.* Ann. Bd. 131. p. 243 ff. »Ueber die Identität der Schwingungen des Lichtes mit den elektrischen Strömen.« (1867.)

»Indem ich also alle physischen Hypothesen von der Untersuchung fern halte, werde ich in der Kette, die die verschiedenen Aeusserungen der Kräfte verknüpft, ein neues Glied nachzuweisen versuchen, indem ich darthun werde, dass, in Uebereinstimmung mit den Gesetzen, die wir für die Fortpflanzung der Elektricität unter Einwirkung der freien Elektricität und der elektrischen Ströme des umgebenden Mittels aus dem Versuche ableiten können, solche periodische elektrische Ströme möglich sind, die sich in jeder Weise wie die Schwingungen des Lichtes verhalten, woraus sich dann unzweifelhaft ergiebt, dass die Schwingungen des Lichtes selbst elektrische Ströme sind.«

In demselben Bande von *Poggendorff*'s Annalen, der Abhandlung von *Lorenz* unmittelbar vorausgehend, befindet sich unter dem Titel »Ein Beitrag zur Elektrodynamik von *Bernhard Riemann*« eine Abhandlung, welche dieser berühmte Mathematiker der Kgl. Gesellschaft d. W. zu Göttingen am 10. Febr. 1858 überreicht, später aber aus unbekannten Gründen wieder zurückgezogen hatte. Die Einleitung zu dieser Abhandlung bilden folgende Worte:

»Der Königl. Societät erlaube ich mir eine Bemerkung mitzutheilen, welche die Theorie der Elektricität und des Magnetismus mit der des Lichtes und der strahlenden Wärme in einen nahen Zusammenhang bringt. Ich habe gefunden, dass die elektrodynamischen Wirkungen galvanischer Ströme sich erklären lassen, wenn man annimmt, dass die Wirkung einer elektrischen Masse auf die übrigen nicht momentan geschieht, sondern sich mit einer constanten (der Lichtgeschwindigkeit innerhalb der Gränzen der Beobachtungsfehler gleichen) Geschwindigkeit zu ihnen fortpflanzt. Die Differentialgleichung für die Fortpflanzung der elektrischen Kraft wird bei dieser Annahme dieselbe, wie die für die Fortpflanzung des Lichtes und der strahlenden Wärme.«[1])

Lorenz gelangt ganz unabhängig hiervon zu dem gleichen Resultate, indem er für jene Fortpflanzungsgeschwindigkeit a

1) *Pogg.* Ann. Bd. 131. p. 237.

der elektrischen Schwingungen die Gleichung als sehr begründet voraussetzt:

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Hierin bedeutet c die von *W. Weber* elektrodynamisch bestimmte Geschwindigkeit von 59320 Meilen in der Secunde, so dass sich

$$a = 41950 \text{ Meilen}$$

als Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die Oscillationen elektrischer Molecularströme ergiebt. Für die Lichtgeschwindigkeit a resultirt nun aber, wie *Riemann* am Schlusse seiner Abhandlung bemerkt, »aus *Busch*'s und *Bradley*'s Aberrationsbeobachtungen $a = 41994$ geogr. Meilen und durch directe Messungen *Fizeau*'s 41882 geogr. Meilen.«

Die neueren Beobachtungen *Cornu*'s führen im Wesentlichen zu analogen Grössen. Diese Uebereinstimmung zwischen den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zweier, bisher als gänzlich verschieden betrachteten, molecularen Vorgänge ist offenbar eine so grosse, dass man hier schwerlich an ein Spiel des Zufalls glauben wird. Demgemäss betrachtet denn auch *Lorenz* dieses Ergebniss als einen Beweis für die Richtigkeit seiner Behauptung und hält die Uebereinstimmung der gefundenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für eine solche, dass man den elektrodynamisch abgeleiteten Werth sogar »als eine neue Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes betrachten kann, die jeder andern an Genauigkeit nicht nachzustehen scheint.«[1])

Die von *Lorenz* gefundenen Differentialgleichungen sind aber noch in einer andern Beziehung beachtenswerth, denn sie enthalten ein Glied, welches mit der Leitungsfähigkeit desjenigen Körpers multiplicirt ist, in welchem die Lichtoscillationen stattfinden. Dieses Glied zeigt nun gleichzeitig eine Absorption an, welche um so grösser ist, je grösser die elektrische Leitungsfähigkeit des Körpers ist. Durch eine Berücksichtigung dieser Verhältnisse gelangt *Lorenz* zu dem Resultate: »dass alle guten Leiter der Elektricität die Lichtstrahlen in

1) S. 252. a. a. O.

hohem Grade absorbiren, was bekanntlich mit der Erfahrung in merklicher Uebereinstimmung ist.«

»Für alle durchsichtigen Körper ist bekanntlich die Leitungsfähigkeit millionenmal kleiner als diejenige des Kupfers.« »So wie wir also aus der guten Leitungsfähigkeit der Metalle auf ihre Undurchsichtigkeit schliessen können, so können wir auch aus der sehr geringen Durchsichtigkeit eines Körpers folgern, dass derselbe ein gegen die Metalle äusserst schlechter Leiter des elektrischen Stromes ist, ein Resultat, das die Erfahrung auch völlig bestätigt hat.«[1])

In diesen Sätzen dürften die ersten Elemente einer rationellen Absorptionstheorie des Lichtes enthalten sein, welche insofern auch mit dem *Kirchhoff*'schen Satze von dem Zusammenhange der Absorption mit der Emission im Einklange zu stehen scheint, als eine durch starke Temperaturerhöhung gesteigerte Absorption des durchsichtigen *isolirenden* Glases dasselbe in ein weniger durchsichtiges *leitendes* Glas verwandelt. [2])

Die vorstehend mitgetheilten Thatsachen werden meine Hypothese, dass der sogenannte Lichtäther nichts anderes sei als ein Aggregat von elektrischen Molecularströmen, welche aus einer sehr geringen Anzahl elektrischer Theilchen (mindestens von zwei, zu einem Paare verbundenen) bestehen, nicht unwesentlich unterstützt haben. Es erscheint daher geboten, auch noch die weiteren Consequenzen dieser Hypothese bezüglich anderer Thatsachen der Erfahrung zu verfolgen.

Es wurde oben hervorgehoben, dass, während jeder Zunahme der lebendigen Kraft der Molecularströme einer Körperschicht, eine elektrodynamische Repulsion, — während jeder Abnahme der lebendigen Kraft dieser Ströme aber eine elektrodynamische Attraction von dieser Körperschicht auf benachbarte Molecularströme ausgeübt wird. Bildet daher die betrachtete Schicht die Grenzfläche eines Körpers, welcher leicht beweglich

---

1) S. 225 a. a. O. So leitet z. B. Kohlenstoff als durchsichtiger Diamant die Elektricität nicht, wohl aber als undurchsichtiger Graphit. Vgl. *Wiedemann*, Galvanismus § 99.

2) *Becquerel*, Compt. Rend. T. 38. p. 905. *Pfaff. Gilb.* Ann. Bd. VII. p. 249. *Beetz, Pogg.* Ann. Bd. 92. p. 462. *Buff*, Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. 90 p. 257.

in einem sogenannten »leeren«, d. h. in einem mit elementaren Molecularströmen *hinreichend stark* erfüllten, Raume aufgehängt ist, so muss dieser Körper während der Zuführung von lebendiger Kraft, z. B. in Form einer Bestrahlung durch Licht oder Wärme, in der Richtung der Strahlung zurückgestossen werden, dagegen während der Abnahme der lebendigen Kraft, z. B. durch Ausstrahlung nach beseitigter Licht- oder Wärmequelle oder besser noch durch Gegenüberstellung eines kälteren Körpers, von diesem scheinbar angezogen werden.

Diese Schlussfolgerung ist jedoch selbstverständlich nur so lange gültig, als die wesentliche Bedingung, unter welcher sie abgeleitet wurde, erfüllt ist. Diese Bedingung besteht darin, dass die Uebertragung von lebendiger Kraft von einem Molecularstrome zum andern o h n e Uebergang von elektrischen Theilchen, d. h. n u r unter dem Einflusse der elektrischen Induction, durch reine Strahlung vor sich gehe. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, sondern findet z. B. durch Gegenwart von *beweglichen wägbaren* Molecülen eines Gases, auch ein Uebergang von lebendiger Kraft durch L e i t u n g, d. h. durch Austritt eines elektrischen Theilchens aus einem Molecularstrome in einen andern statt, so ist jene Schlussfolgerung nicht mehr bindend. Denn alsdann kann möglicherweise die durch Leitung herbei geführte Verminderung der lebendigen Kraft eines Molecularstromes auf der bestrahlten Grenzfläche eine stärkere elektrodynamische A t t r a c t i o n zwischen dem Körper und den benachbarten Molecularströmen des Aethers bewirken, als die R e p u l s i o n, welche durch die Vermehrung der lebendigen Kraft während der Bestrahlung zwischen dem Körper und den Molecularströmen des umgebenden Aethers erzeugt wird. In diesem Falle kann sich das ganze Phänomen umkehren: der leichtbewegliche Körper kann *scheinbar* von dem Licht oder Wärme ausstrahlenden Körper angezogen, dagegen von einem kalten, d. h. Wärmestrahlen absorbirenden, Körper abgestossen werden. In diesem Falle erzeugt die durch Wärme-Leitung vermehrte lebendige Kraft der Körperoberfläche eine stärkere Repulsion (zwischen den dieser Fläche benachbarten Molecularströmen des Aethers), als die Attraction durch Verminderung der lebendigen Kraft bei der Wärme-A u s s t r a h l u n g. Um also die Bedingung, unter welcher allein die oben aufgestellte Folgerung der R e p u l s i o n eines Körpers bei der A b s o r p t i o n

und einer Attraction bei der Emission von Strahlen gültig ist, noch einmal kurz auszusprechen, kann man sagen, dass diese Beziehungen strenge nur dann stattfinden, wenn eine *genügende* Menge der vorhandenen Elektricitätstheilchen, sowohl im umgebenden Aether als an der Körperoberfläche, in beharrlicher Molecularströmung und nicht in translatorischer Bewegung von einem Molecül zum andern begriffen sind.

Die vorstehend aus der elektrodynamischen Theorie der Materie und des Aethers abgeleiteten Folgerungen werden nun gleichfalls durch beobachtete Thatsachen bestätigt.

Die ersten mit Sorgfalt ausgeführten Versuche über diesen Gegenstand theilte *Fresnel* am 13. Juni 1825 der französischen Akademie mit. [1])

Dieselben bestanden im Wesentlichen in Beobachtungen an einer empfindlichen Torsionswage, bei welcher das eine Ende des horizontalen Balkens mit einer kleinen Scheibe von Flittergold *(disque de clinquant)* versehen war.

Unter dem bis zu 1 bis 2 Millimeter ausgepumpten Recipienten der Luftpumpe wurde dieses Scheibchen stark *(brusquement)* von einem anderen, festen Scheibchen abgestossen, sobald letzteres durch concentrirte Sonnenstrahlen erwärmt wurde.

In Folge einer Discussion, welche sich bei dem lebhaften Interesse der Akademie für diese Erscheinung erhob und der hierbei ausgesprochenen Ansicht, dass man es mit einem elektrischen oder magnetischen Phänomene zu thun habe, stellte *Fresnel* weitere Versuche an, durch welche er diese Erklärung widerlegte, indem er bemerkt:

> »*En général une répulsion constante dans des circonstances variées et même opposées, exclut la supposition d'une action électrique ou magnétique.*«

Dagegen ist es bemerkenswerth, dass jener geniale französische Physiker und Mitbegründer der modernen Optik bereits die wahre Ursache dieser Erscheinung und ihren Zusammenhang mit der Theorie der Ausdehnung und Zusammenziehung der

---

1) *A. Fresnel.* Note sur la répulsion que des corps échauffés exercent les uns sur les autres à des distances sensibles. Ann. d. Chim. et de Phys. T. XXIX. p. 57 ff. und ein Zusatz p. 407.

Körper durch Absorption und Emission von Wärme geahnt und in folgendem Satze ausgesprochen hat:

»*J'espère que des physiciens plus habiles ou qui auront plus de loisir ne dédaigneront pas de concourir à ces recherches, qui promettent des résultats neufs et curieux, et jetteront peut-être quelque jour sur la théorie de la dilatation des corps par la chaleur.*« *(p. 61 l. c.)*

Nur drei Jahre später (1828) und gänzlich unabhängig von den oben erwähnten Versuchen *Fresnel's* veröffentlichte der Schotte *Mark Watt*[1]) eine Abhandlung, in welcher

---

1) Edinburgh new Philos. Journal Vol. V. p. 122—128. (1828 April bis September.)

»Abstract of a Memoir read before the Wernerian Society, giving an account of Experiments directed to ascertain the Principles of Attraction and Repulsion in the Lunar Rays etc.; a Description of several Varieties of the Instruments constructed for that purpose; and some Applications of Observations made, as illustrative of other Subjects by *Mark Watt*, Esq. Member of the Wernerian Society etc.«

Die Kenntniss dieser Abhandlung verdanke ich der Güte des Herrn Professor *Crookes*, welcher mich auf dieselbe im September vorigen Jahres, bei einem Besuche in seinem Laboratorium, aufmerksam machte und mir gleichzeitig das Original vorlegte. Ich sah bei dieser Gelegenheit zum ersten Male die merkwürdigen Rotationserscheinungen in den von Herrn *Crookes* construirten Radiometern und beschloss sogleich, mit Erlaubniss von Professor *Crookes*, auf meiner Rückreise Herrn Dr. *Geissler* in Bonn für die Construction solcher Radiometer zu interessiren. Es gelang mir dies auch in so hohem Maasse, dass ich bereits nach einem 14tägigen Aufenthalte in Bonn, Dank der bewährten und weltbekannten Geschicklichkeit Dr. *Geissler's*, drei Exemplare solcher Radiometer von *Crookes* mit nach Leipzig nehmen und der K. S. Gesellsch. d. W. in einer öffentlichen Gesammtsitzung am 18. Dec. vorzeigen konnte. Seitdem hat mir Herr Professor *Crookes* in der zuvorkommendsten Weise schriftlich seinen Rath bei der Construction photometrischer Apparate zu Theil werden lassen und gleichzeitig sein lebhaftes Interesse an den so schnell gelungenen Resultaten Dr. *Geissler's* ausgedrückt.

Zu diesen Bemerkungen sehe ich mich in Folge eines bereits während meines Aufenthaltes in Bonn auftauchenden Gerüchtes veranlasst, nach welchem Herr Professor *Crookes* »unwillig« über die gegen seinen Willen bewirkte Verbreitung der Radiometer durch Dr. *Geissler* sein sollte.

Ganz abgesehen davon, dass damals bereits die ausführliche Beschreibung dieses Apparates mit genauer Angabe aller Vorsichtsmaassregeln bei seiner Anfertigung im »Quarterly Journal of Science ed. by *W. Crookes*« No. 47 (Juli 1875) p. 337 ff. publicirt war, widerspricht eine solche An-

ganz ähnliche, nur viel mannigfaltiger modificirte, Versuche mitgetheilt werden. Die leichtbewegliche Torsionswaage wird selbst noch durch den Einfluss eines Kerzenlichtes aus einer Entfernung von 15 bis 20 Fuss abgelenkt. (»*It indicates the effectes of the light of a candle at the distance of from 15 to 20 feet from the flame.*«) Sogar mehrere Stunden hindurch andauernde Rotationen unter dem Einflusse des Lichtes werden beschrieben (»*it will continue, when first made, to revolve for hours without intermission, performing each revolution in about 5 Sec.*«) Ebenso behauptet *Watt*, auch durch den Einfluss der Mondstrahlen solche Bewegungen erhalten zu haben und bemerkt ausdrücklich, dass er die hierauf bezüglichen Experimente sehr oft wiederholt habe. (»*These experiments have been often repeated, as opportunities occurred for the last six months, and which every possible precaution.*«)

Am interessantesten und merkwürdigsten für mich unter allen diesen Experimenten von *Mark Watt* waren jedoch diejenigen, welche ein entgegengesetztes Verhalten zwischen einem Goldblättchen und einem Silberblättchen in einem lufterfüllten Raume zeigten. Während nämlich die mit einem Goldblättchen versehene Drehwaage stets vom Lichte angezogen wird, und in einer hierdurch bedingten Position zur Ruhe kommt, zeigt das Silberblättchen abwechselnd eine Attraction und Repulsion, so dass es durch einen Sonnenstrahl in stetige Oscillation versetzt wird.

> (»*The gold leaf always turns the edge oft its disc to the light; in whatever position the candle may be placed.*«
>
> »*The silver leaf has a movement peculiar to itself. It first turns the front of its disc, and then its edge; and this movement is often so constant, that it will oscillate for hours in an arc of 90°.*«)

Ich habe diese hier zuletzt erwähnten Experimente selbst wiederholt und bestätigt gefunden, ebenso wie den bereits von *Watt* hervorgehobenen Umstand, dass diese Eigenschaften der

---

nahme so sehr dem durchaus wissenschaftlichen und wahrheitsliebenden Character des Herrn *Crookes*, dass er mir gestatten möge, dies hier öffentlich auszusprechen. Die Wissenschaft hat vielmehr alle Ursache, diesem englischen Gelehrten dankbar zu sein, dass er durch seine eben so grosse Geschicklichkeit als Ausdauer und Beharrlichkeit die Physik um eine neue Thatsache bereichert hat.

Gold- und Silberblättchen durch längere Einwirkung des Lichtes abnehmen und endlich ganz verschwinden.

(»*If not kept in the dark and in vacuo, it soon loses this susceptibility.*«)

Alle diese Erscheinungen zeigen auf's deutlichste den wesentlichen Einfluss, welchen in einem lufterfüllten Raume die Oberflächenbeschaffenheit der bestrahlten Körper auf den Character der dadurch erzeugten Wirkung ausübt. Ich habe sogar bei meinen Versuchen in einem Falle die merkwürdige Beobachtung gemacht, dass ein frisch befestigtes Goldblättchen von der einen Seite durch Bestrahlung angezogen, von der anderen abgestossen wurde. Alle diese Thatsachen scheinen mir in unzweideutigster Weise die gänzliche Unhaltbarkeit aller derjenigen Erklärungsversuche zu beweisen, welche nur »Luftströmungen« oder »Temperaturdifferenzen« und die »kinetische Gastheorie« zum Ausgangspuncte ihrer Deductionen machen wollen. Denjenigen aber, welche sich, wie z.B. Herr Dr. *Neesen*[1]), dennoch hierzu für berechtigt halten sollten, erlaube ich mir vor der Publication ihrer eigenen Gedanken zunächst ein möglichst gründliches Studium der über diesen Gegenstand seit mehr als 50 Jahren vorhandenen Literatur zu empfehlen. Sie werden alsdann finden, dass alle ihre Argumente und Versuche mit noch grösserer Umsicht ausgeführt und discutirt, gleichzeitig aber für eine allgemeine Theorie der Erscheinung als unzureichend erkannt worden sind. Als besonders instructiv für diesen Zweck empfehle ich die Abhandlungen von *Muncke* und *Lenz* in *Poggendorff*'s Annalen in den Bänden 17. p. 159–165 (1829), Bd. 18. p. 239–240, Bd. 20. p. 417, Bd. 25. p. 241–270, Bd. 29. p. 381–403 (1833).

Folgende Worte *Muncke*'s aus dem zuletzt erwähnten Bande von *Poggendorff*'s Annalen ersuche ich die Vertreter der Luftströmungstheorie besonders zu berücksichtigen:

> »Man hat zwar gesagt, dass mit der Luftverdünnung zugleich der Widerstand abnehme, welchen dieses Fluidum dem bewegten Wagebalken entgegensetze und daher die Bewegungen im luftverdünnten Raume leichter erfolgen könnten; allein nicht zu gedenken, dass doch auf jeden Fall eine bewegende Ursache vorhanden

1) *Pogg.* Ann. Bd. 156. p. 144. »Ueber die Anziehung und Abstossung durch Licht- und Wärmestrahlen.«

sein muss, sobald eine ihr proportionale Bewegung durch sie erzeugt werden soll, darf nicht übersehen werden, dass bei einer durch die bewegte Luft selbst veranlassten Bewegung von einem Widerstande derselben so lange die Rede gar nicht sein kann, als die Bewegung des Körpers langsamer geschieht als die der Luft selbst.«

Alle diejenigen aber, welche, im Besitze hinreichender physikalischer Kenntnisse, gegenwärtig Gelegenheit haben, die Bewegungen eines *Crookes*'schen Radiometers längere Zeit mit Aufmerksamkeit zu beobachten, werden gewiss mit *Muncke* übereinstimmen, wenn er mit folgenden Worten seine Abhandlung gegen *Lenz* beschliesst:

»Wie es also nur möglich sein könnte, solche Bewegungen von Luftströmungen abzuleiten, dieses wird mir, je öfter ich dieselben beobachte und je länger ich darüber nachdenke, stets unbegreiflicher.«

Die fundamentale Thatsache, welche *Crookes* [1]) durch seine Versuche festgestellt hat, besteht in Folgendem:

In einem mit Luft von normaler Dichtigkeit erfüllten Raume wird ein Körper, wenn er durch Emission gegen einen kälteren Körper seine lebendige Kraft vermindert, von diesem scheinbar abgestossen; dagegen angezogen, wenn er durch Absorption von Strahlen eines wärmeren Körpers seine lebendige Kraft vergrössert.

Ist jedoch der Raum, in welchem sich der leichtbewegliche Körper befindet, nur mit Luft von einer Dichtigkeit unterhalb einer gewissen Grenze erfüllt, bei welcher scheinbar gar keine Einwirkung stattfindet, so kehrt sich das Verhältniss um: der wärmere Körper stösst den beweglichen zurück, der kältere zieht ihn an.

Nach meiner oben angedeuteten Theorie dieser Erscheinung beruht der dabei so auffallend zu Tage tretende Einfluss der Luft lediglich auf ihrem Leitungsvermögen für Wärme. Im ersten Falle, bei hinreichender Menge der Luftmolecüle, geht ein Wärmestrom von der berührenden Luftschicht auf die durch Aus-

1) Proceed. of the Roy. Soc. Vol. XXII. p. 37 et Vol. XXIII. p. 373. Quartely Journ. of Sc. Nr. XLVII Juli 1875.

strahlung sich abkühlende Oberfläche des Körpers über. Hierdurch wird die lebendige Kraft einer bestimmten Anzahl von Molecularströmen in der ausstrahlenden Fläche vergrössert, und während des Processes dieser Vergrösserung, durch das Anwachsen der Molecularströme, werden in den Molecülen des umgebenden Raumes Ströme inducirt, welche nach den Gesetzen der galvanischen Induction eine repulsive Wirkung auf die anwachsenden Molecularströme des Körpers und daher auch auf diesen selbst ausüben.

Man beachte hierbei wohl, dass die Stärke dieser Repulsion wesentlich von der Schnelligkeit abhängt, mit welcher die Aenderung der inducirenden Ströme stattfindet; findet diese Zunahme der Stromgeschwindigkeit einzelner Molecüle bei dem Wärmeübergang durch Leitung schneller statt als die Abnahme dieser Stromgeschwindigkeit bei andern Molecülen durch Ausstrahlung, so kann, trotz der durch letztere bewirkten stetigen Abnahme der mittleren Temperatur (wodurch ohne Anwesenheit leitender Luftmolecüle eine Anziehung eintreten würde) dennoch eine Repulsion stattfinden. Der hier in Betracht kommende Uebergang der Wärme durch Leitung hängt also wesentlich sowohl von der Leitungsfähigkeit des Gases als auch von derjenigen des beweglichen Körpers ab.

Ganz dieselben Betrachtungen finden Anwendung, wenn die Molecularströme des Körpers durch Bestrahlung eine grössere lebendige Kraft als die umgebende Luft besitzen. Nähert sich alsdann ein kälteres Luftmolecül dem Körper bis auf eine solche Entfernung, bei welcher durch leitenden Uebergang von Wärme die Intensität eines Molecularstromes im Körper schnell vermindert wird, so tritt während dieser Verminderung durch Induction eine attractive Wirkung zwischen diesem Molecularstrome und den im incompressiblen Aether inducirten Strömen ein. Auch hier liegt, bei Berücksichtigung des Einflusses der Schnelligkeit der Stromänderung, in der stetigen Temperaturerhöhung durch Einstrahlung kein Widerspruch mit der angenommenen schnelleren Verminderung der lebendigen Kraft einzelner Molecularströme durch Wärmeleitung.

16.

Wenn die gegebene Erklärung von dem Ursprunge der mechanischen Wirkung des Lichtes und ihres entgegengesetzten

Characters im lufterfüllten und luftverdünnten Raume in der Natur begründet ist, so müssen sich die beiden Voraussetzungen, auf welche dieselbe sich stützt, durch directe Versuche prüfen lassen.

Die erste dieser Voraussetzungen besteht darin, dass die Gasmolecüle, wenn sie einer Körperoberfläche durch Wärmeleitung lebendige Kraft entziehen oder mittheilen, dies während der kurzen Zeit ihrer sogenannten Berührung mit jener Oberfläche in einem viel stärkerem Maasse bewirken müssen, als es während derselben Zeit die übrigen, nicht von Gasmolecülen berührten, Flächentheile durch Ausstrahlung zu thun im Stande sind. Mit andern Worten, das Product aus der Berührungszeit und der während derselben durch Leitung abgegebenen Wärmemenge muss grösser sein als das Product aus derselben Zeitgrösse und der während derselben durch Strahlung abgegebenen Wärmemenge.

Man wäre deshalb zu der Erwartung berechtigt, dass selbst Spuren von Gasen im Stande sind, einem wärmeren Körper, der sich in einem luftverdünnten Raume befindet, verhältnissmässig grosse Quanta von lebendiger Kraft zu entziehen. Diese Folgerung wird nun in überraschender Weise durch die erst ganz kürzlich publicirten Untersuchungen von *Kundt* und *Warburg* »über Reibung und Wärmeleitung verdünnter Gase« bestätigt.[1]) Es werden von diesen Physikern a. a. O. S. 182, S. 207 u. 203 wörtlich folgende Sätze ausgesprochen:

> »Aeusserst geringe Spuren von Wasserdampf, die manometrisch durchaus nicht nachzuweisen sind, werden mit Leichtigkeit erkannt durch die Aenderung der Wärmeleitung, welche sie bewirken, und das Thermometer erweist sich somit als feines Reagens auf die Beschaffenheit eines Vacuums.«
>
> »Die Versuche dieses letzten Abschnittes dürften

1) *Pogg.* Ann. Bd. 156. p. 177—214. (1875. October-Heft.)
Man vergleiche auch die in demselben Bande (November-Heft) p. 497 ff. gleichzeitig publicirten Untersuchungen über die Wärmeleitung der Gase von *A. Winkelmann*, die in den wesentlichen Puncten mit den Resultaten von *Kundt* und *Warburg* übereinstimmen. In der Abhandlung von *Winkelmann* sowohl wie in derjenigen von *Kundt* und *Warburg* sind ausserdem sehr interessante Vergleichungen der empirisch gefundenen Leitungsfähigkeit der Gase mit ihren Reibungscoefficienten angestellt.

der elektrischen Schwingungen die Gleichung als sehr begründet voraussetzt:

$$a = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Hierin bedeutet c die von *W. Weber* elektrodynamisch bestimmte Geschwindigkeit von 59320 Meilen in der Secunde, so dass sich

$$a = 41950 \text{ Meilen}$$

als Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die Oscillationen elektrischer Molecularströme ergiebt. Für die Lichtgeschwindigkeit a resultirt nun aber, wie *Riemann* am Schlusse seiner Abhandlung bemerkt, »aus *Busch*'s und *Bradley*'s Aberrationsbeobachtungen $a = 41994$ geogr. Meilen und durch directe Messungen *Fizeau*'s 41882 geogr. Meilen.«

Die neueren Beobachtungen *Cornu*'s führen im Wesentlichen zu analogen Grössen. Diese Uebereinstimmung zwischen den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zweier, bisher als gänzlich verschieden betrachteten, molecularen Vorgänge ist offenbar eine so grosse, dass man hier schwerlich an ein Spiel des Zufalls glauben wird. Demgemäss betrachtet denn auch *Lorenz* dieses Ergebniss als einen Beweis für die Richtigkeit seiner Behauptung und hält die Uebereinstimmung der gefundenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für eine solche, dass man den elektrodynamisch abgeleiteten Werth sogar »als eine neue Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes betrachten kann, die jeder andern an Genauigkeit nicht nachzustehen scheint.«[1])

Die von *Lorenz* gefundenen Differentialgleichungen sind aber noch in einer andern Beziehung beachtenswerth, denn sie enthalten ein Glied, welches mit der Leitungsfähigkeit desjenigen Körpers multiplicirt ist, in welchem die Lichtoscillationen stattfinden. Dieses Glied zeigt nun gleichzeitig eine Absorption an, welche um so grösser ist, je grösser die elektrische Leitungsfähigkeit des Körpers ist. Durch eine Berücksichtigung dieser Verhältnisse gelangt *Lorenz* zu dem Resultate: »dass alle guten Leiter der Elektricität die Lichtstrahlen in

1) S. 252. a. a. O.

hohem Grade absorbiren, was bekanntlich mit der Erfahrung in merklicher Uebereinstimmung ist.«

»Für alle durchsichtigen Körper ist bekanntlich die Leitungsfähigkeit millionenmal kleiner als diejenige des Kupfers.« »So wie wir also aus der guten Leitungsfähigkeit der Metalle auf ihre Undurchsichtigkeit schliessen können, so können wir auch aus der sehr geringen Durchsichtigkeit eines Körpers folgern, dass derselbe ein gegen die Metalle äusserst schlechter Leiter des elektrischen Stromes ist, ein Resultat, das die Erfahrung auch völlig bestätigt hat.«[1])

In diesen Sätzen dürften die ersten Elemente einer rationellen Absorptionstheorie des Lichtes enthalten sein, welche insofern auch mit dem *Kirchhoff*'schen Satze von dem Zusammenhange der Absorption mit der Emission im Einklange zu stehen scheint, als eine durch starke Temperaturerhöhung gesteigerte Absorption des durchsichtigen *isolirenden* Glases dasselbe in ein weniger durchsichtiges *leitendes* Glas verwandelt. [2])

Die vorstehend mitgetheilten Thatsachen werden meine Hypothese, dass der sogenannte Lichtäther nichts anderes sei als ein Aggregat von elektrischen Molecularströmen, welche aus einer sehr geringen Anzahl elektrischer Theilchen (mindestens von zwei, zu einem Paare verbundenen) bestehen, nicht unwesentlich unterstützt haben. Es erscheint daher geboten, auch noch die weiteren Consequenzen dieser Hypothese bezüglich anderer Thatsachen der Erfahrung zu verfolgen.

Es wurde oben hervorgehoben, dass, während jeder Zunahme der lebendigen Kraft der Molecularströme einer Körperschicht, eine elektrodynamische Repulsion, — während jeder Abnahme der lebendigen Kraft dieser Ströme aber eine elektrodynamische Attraction von dieser Körperschicht auf benachbarte Molecularströme ausgeübt wird. Bildet daher die betrachtete Schicht die Grenzfläche eines Körpers, welcher leicht beweglich

1) S. 225 a. a. O. So leitet z. B. Kohlenstoff als durchsichtiger Diamant die Elektricität nicht, wohl aber als undurchsichtiger Graphit. Vgl. *Wiedemann*, Galvanismus § 99.

2) *Becquerel*, Compt. Rend. T. 38. p. 905. *Pfaff. Gilb.* Ann. Bd. VII. p. 249. *Beetz, Pogg.* Ann. Bd. 92. p. 462. *Buff*, Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. 90 p. 257.

schon darum ein gewisses Interesse haben, weil sie zeigen, wie verhältnissmässig grosse Quanta von Bewegungsgrösse durch Spuren gasiger Materie in der Zeiteinheit transportirt werden können.« (1. Abhandl. p. 550.)

»Man sieht, dass entsprechend den für die Reibung erhaltenen Resultaten verhältnissmässig grosse Quanta von Energie durch Spuren gasiger Materie in der Zeiteinheit transportirt werden können.«

»Die Abkühlungsgeschwindigkeit eines Thermometers, — welche mit grosser Schärfe gemessen werden kann — erweist sich somit als ein äusserst feines Reagens auf die Güte eines Vacuums und wir zweifeln, ob ein feineres gefunden werden kann.«

Die zweite Voraussetzung, auf welcher meine Erklärung beruht, besteht in der Annahme, dass der zuletzt erwähnte Transport von Wärme nur durch Leitung und nicht durch Strahlung stattfinde, d. h. im Sinne der elektrodynamischen Theorie der Materie gesprochen, dass auf der bestrahlten oder ausstrahlenden Fläche eine partielle Auflösung von Molecularströmen stattfinde, so dass elektrische Theilchen, welche vorher diesen Strömen angehörten, auf die Molecüle des Gases übergehen, um sich mit den hier vorhandenen Molecularströmen zu vereinigen und auf andere Molecüle überzugehen.

Man wäre daher zu der Erwartung berechtigt, unter geeigneten Umständen an der Oberfläche eines bestrahlten oder ausstrahlenden Körpers freie Elektricität, oder, bei passender Anordnung des Experimentes, zwischen einer beschatteten und bestrahlten Platte elektrische Ströme zu beobachten.

Solche Ströme sind nun in der That von *E. Becquerel*[1]) und *Grove*[2]) und ganz kürzlich von *Hankel*[3]) beobachtet worden. So erhielt z. B. *Becquerel* für zwei Platinplatten, die sich in verdünnter Salpetersäure befanden und durch eine poröse Thonplatte getrennt waren, an einem empfindlichen Galvanometer Ablenkungen bis zu 4°.5, wenn die eine Platte durch Sonnenlicht bestrahlt wurde. Bei den Versuchen, welche mir

1) *E. Becquerel.* Traité d'Electricité. T. VI. p. 56. 1840.
2) *Grove.* Phil. Mag. [4] T. XVI. p. 426. 1858.
3) *Hankel.* Diese Berichte. 13. Dec. 1875.

mein College *Hankel* zeigte, gingen die Ablenkungen bei gewöhnlichem Tageslicht oft bis zu 30°, zuweilen selbst bis 90°. — Ich halte es nicht für unwahrscheinlich, dass man unter denselben Bedingungen einer verschiedenen Bestrahlung auch elektrische Ströme wird beobachten können, wenn man die Flüssigkeit durch Dämpfe oder starkverdünnte Gase ersetzt.

In Betreff der Entwickelung statischer Elektricitätsmengen unter dem Einfluss einer Bestrahlung erlaube ich mir auf die früher citirten Abhandlungen und Versuche *Muncke's* zu verweisen. Bei diesen Experimenten war zuweilen die durch Bestrahlung erregte freie Elektricität an der Oberfläche des Glases so stark, dass *Muncke* sich für berechtigt hielt, die ganze Erscheinung für eine Wirkung der statischen Elektricität zu halten.[1] Aehnliche Erscheinungen beobachteten *Pfaff*,[2] *Barlocci*[3] und *Matteucci*[4] bei der Bestrahlung der Körper durch Wärme und Licht.

Es werden also, wie man sieht, die beiden Voraussetzungen, unter welchen die elektrodynamische Theorie des Lichtes eine einfache Erklärung der *Crookes*'schen Rotationsphänomene liefert, durch directe Beobachtungen bestätigt. Wenn man nun ferner die von *Kundt* und *Warburg* discutirten Einflüsse des Volumens und der Gestalt der Gefässe auf die erwähnten Vorgänge der in ihnen enthaltenen Gase berücksichtigt, so ergiebt sich, dass die gedachten Erscheinungen auch hiervon, ebenso wie von der Gestalt und Beschaffenheit der durch Licht bewegten Flächen, abhängen müssen, wodurch, wie leicht ersichtlich, mannigfache Complicationen eintreten können, die zuweilen den einfachen Character des von *Crookes* entdeckten Fundamental-Phänomens verdecken können. Der grossen Geschicklichkeit des Herrn Dr. *Geissler* wird es höchst wahrscheinlich gelingen, alle diese Verhältnisse empirisch zu entdecken, um nach Belieben bald diese, bald jene Wirkung bei den *Crookes*'schen Radiometern in den Vordergrund treten zu lassen. Es scheint mir jedoch für meine Theorie keine unwesentliche Stütze zu sein, dass sie wenigstens principiell derartige Modificationen im Voraus an-

1) *Muncke. Pogg.* Ann. Bd. XX. p. 417.
2) *Pfaff. Schweigger's* Journ. Bd. 66.
3) Quarterly Journ. of Sc. New Ser. N. II. p. 178.
4) *Schweigg.* Journ. Bd. 58. p. 67.

deutet, obschon die Erklärung derselben im concreten Falle nicht selten Schwierigkeiten darbieten wird.

Schliesslich erlaube ich mir darauf aufmerksam zu machen, dass gleichzeitig und gänzlich unabhängig von *Crookes* auch in Deutschland diese merkwürdigen Wirkungen des Lichtes und der strahlenden Wärme zum Gegenstande einer umfassenden Experimentaluntersuchung von *A. Bergner* gemacht und in einer kleinen Schrift von 42 Seiten beschrieben worden sind. [1]) Der Verfasser ist jedenfalls kein Physiker von Fach, [2]) aber im Besitze aller der Eigenschaften, welche ihn zu einem bedeutenden Physiker hätten machen können. Die Einfachheit der angewandten Mittel, die Geschicklichkeit in ihrer Verwendung und Combination und endlich die rationelle Speculation des Verfassers treten dem aufmerksamen Leser auf jeder Seite dieser Schrift in überraschender Weise entgegen. Zum Beweise dieser Behauptung erlaube ich mir nur anzuführen, dass *Bergner* aus seinen Versuchen mit voller Bestimmtheit die oben erwähnte Gleichartigkeit der Wirkung von Emission und Absorption, je nach der Beschaffenheit des umgebenden Raumes, richtig erkannt hat, indem er S. 25 a. a. O. wörtlich bemerkt:

> »Nach dem Vorstehenden wird man zu dem Schlusse berechtigt sein, dass in der That ein Körper unmittelbar sowohl durch Aufnahme, wie durch Abgabe von Wärme nach derjenigen Richtung, aus welcher resp. nach welcher hin die Wärme-Einwirkung stattfindet, angezogen wird.«

Ebenso wird von *Bergner* bereits die allgemeine Ursache dieses

---

1) Die Anziehung und Abstossung durch Wärme und Licht und die Abstossung durch Schall von *A. Bergner*. Boizenburg a/Elbe. Verlag von L. Herold. 1874.

2) So beschreibt z. B. der Verfasser S. 11 in folgenden Worten ganz schlicht und einfach die Art und Weise, wie er sich bei seinen Versuchen ein Vacuum hergestellt habe, ohne, wie es scheint, die Existenz der Quecksilberluftpumpe zu kennen:

»Um nämlich die Wirkung der Wärme bei Ausschluss der Luft zu beobachten, hängte ich in eine umgekehrte kleine Glasflasche vom Boden herab eine Drehwage mit einer 1 bis 2 Quadratcentimeter grossen Scheibe von doppeltem Druckpapier auf, befestigte im Halse eine Glasröhre, füllte das Gefäss mit Quecksilber und erhielt so beim Umkehren annähernd eine *Toricelli*'sche Leere in der Flasche.«

entgegengesetzten Verhaltens in der Verschiedenheit der durch Strahlung und Leitung abgegebenen Wärmemengen erkannt, indem er S. 29 bemerkt:

> »Der Grund dieser Erscheinungen dürfte nun folgender sein:
>
> Solange die geschwärzte Scheibe nicht mehr Wärme aufnimmt, als sie ohne zu grosse Erhitzung an die umgebende Luft ableiten kann, wird die Ausstrahlung im Verhältnisse zur Ableitung der Wärme zurücktreten, und es muss daher Anziehung erfolgen; ist die durch die Sonne zugeführte Wärmemenge aber so gross, dass die Scheibe trotz der Ableitung sehr heiss wird, prävalirt, in Folge der bezüglichen Eigenschaft des Kienrusses die Ausstrahlung der Wärme . . . . und es erfolgt deshalb die Abstossung.«
>
> »Wenn die Art der Bewegung, welche eine Versuchsscheibe durch die Sonnenstrahlen erhält, wirklich, wie oben angenommen worden, vom Verhältniss der Ausstrahlung zur Ableitung der aufgenommenen Wärme an das umgebende Medium abhängt, so muss nothwendig die Art des Stoffes, in welchem die Scheibe schwebt, für ihre Bewegung wesentlich in Betracht kommen. Dies bestätigt sich denn auch in der That.« (p. 32.)

Auf S. 31 wird dann die Anfertigung eines kleinen Apparates beschrieben, bei welchem ein aus leichten Federrippen verfertigtes Kreuz auf einer Achathülse wie eine Magnetnadel beweglich und an seinen Enden mit »vier Scheiben aus Rauschegold, welche je an einer Seite mit Kienruss überzogen sind,« versehen, durch Sonnenstrahlen in Rotation versetzt wird.

Dass aber der Verfasser auch eine hohe Anlage zu einer rationellen Generalisation besitzt, vermöge deren er befähigt ist, die Tragweite seiner Beobachtungen zu erkennen, ihren inneren Zusammenhang mit anderen Naturphänomenen zu vermuthen und auf diese Weise gleichsam den Weg zur Entdeckung ihrer wahren Ursache anzudeuten, dafür mögen die folgenden Schlussworte der kleinen Schrift den Beweis liefern:

»Nicht blos die Schwere, die Elektricität und der Magnetismus, sondern auch die Wärme, das Licht und der Schall,

also alle uns bekannten Kräfte, welche in Molecularbewegungen bestehen, die sich in die Ferne fortpflanzen, üben sonach auf diejenigen Körper, welche von denselben getroffen werden und resp. welche sie aufnehmen oder zurückwerfen, eine bewegende Wirkung aus. Sollte daraus nicht mit grosser Wahrscheinlichkeit der Schluss gezogen werden können, dass alle derartigen Kräfte überhaupt, auch die uns etwa noch nicht bekannten, eine solche Wirkung haben werden? Und wenn die Vermuthung nicht unberechtigt erscheint, dass es zwischen den schnellsten Schallschwingungen und den langsamsten Wärmeschwingungen — auch ausser vielleicht der Elektricität und dem Magnetismus — noch andere sich fortpflanzende Molecularbewegungen mittlerer Schnelligkeit giebt, die wir nur nicht direct wahrnehmen, weil uns die hierzu geeigneten Organe fehlen, sollte es vielleicht nicht möglich sein, durch eine von denselben bewirkte Anziehung oder Abstossung von ihrer Existenz Kenntniss zu erlangen?« —

17.

Bei der obigen Discussion der beiden Voraussetzungen, unter denen die elektrodynamische Theorie des Lichtes und der strahlenden Wärme eine befriedigende Erklärung der mechanischen Wirkungen des Lichtes zu geben im Stande ist, hatte sich durch directe Versuche ergeben, dass durch Licht- und Wärmestrahlung an der Grenzfläche zweier Körper, von denen wenigstens der eine durchstrahlbar sein muss, Molecularströme auflösen lassen, wobei elektrische Theilchen, welche vor der Bestrahlung sich in geschlossenen und widerstandslosen Bahnen planetarisch bewegten, von einem Molecül zum andern übergehen können, so dass es möglich war, unter geeigneten Umständen diese translatorische Bewegung direct in Form eines elektrischen Stromes am Galvanometer zu beobachten. Nach den früher auf Grund der *Weber*'schen Vorstellungen entwickelten Theorie, findet nun in den metallischen Leitern der Elektricität solche Auflösung von Molecularströmen, und folglich auch ein derartiger Uebergang von elektrischen Theilchen von einem Molecül zum andern, fortwährend nach allen Richtungen statt. In dieser Eigenschaft der elektrischen Theilchen, fortdauernd von Molecularbewegung in strömende Bewegung übergehen zu können, bestand nun aber, wie gezeigt, gerade ihre Fähigkeit, unter dem Einflusse elektrischer Scheidungskräfte, d. h. elektro-

motorischer Kräfte, vorzugsweise in Bewegung nach der Richtung dieser Kräfte zu gerathen und auf diese Weise eine strömende Bewegung der Elektricitätstheilchen, d. h. einen elektrischen Strom in ihrem Innern zu entwickeln. Auf dieser Eigenschaft beruht also der characteristische Unterschied zwischen Leitern und Nichtleitern der Elektricität, indem bei letzteren die elektrischen Theilchen stets in geschlossenen Bahnen in demselben Molecüle bleiben. Wenn es daher einen Körper gäbe, bei welchem die Kraft, mit welcher die elektrischen Theilchen gegenüber der Einwirkung elektromotorischer Kräfte in ihrer Molecularströmung zu beharren bestrebt sind, nur eine geringe ist, so würde bei einem solchen Körper durch den Einfluss von Licht- und Wärmestrahlen, (wenn dieselben vermöge einer theilweisen Durchstrahlbarkeit auch in's Innere des Körpers dringen können,) eine solche Auflösung von Molecularströmen bewirkt und gefördert werden, wie sie zur Leitung eines elektrischen Stromes in diesem Körper erforderlich wäre. Ein solcher Körper würde folglich durch Bestrahlung aus einem Isolator in einen Leiter, oder, wenn er bereits vorher etwas leitete, in einen besseren Leiter verwandelt werden können.

Auch diese Folgerung wird durch die vor Kurzem gemachte überraschende Entdeckung der Engländer *Smith* und *Sale*[1]) bestätigt, dass krystallisirtes Selen im beleuchteten Zustande die Elektricität besser zu leiten im Stande ist, als im Dunklen. *W. Siemens*[2]) hat diese Thatsache bestätigt und ist gegenwärtig damit beschäftigt, dieselbe für photometrische Zwecke nutzbar zu machen.

Es ist hierbei für die Richtigkeit der *Weber*'schen Anschauung von dem unterscheidenden Character der elektrischen Molecularconstitution bei Leitern und Nichtleitern der Elektricität jedenfalls von hoher Bedeutung, dass die erwähnte merkwürdige Eigenschaft sich gerade bei einem Körper zeigt, welcher auch in allen seinen übrigen chemischen und physikalischen Eigenschaf-

---

1) *Proceed.* of the Roy. Soc. Vol. XXI. p. 288. — *Pogg.* Ann. Bd. 150. S. 333.

2) Monatsber. d. K. Akademie d. W. zu Berlin. 1875. 13. Mai. *Pogg.* Ann. Bd. 156. p. 334. »Ueber den Einfluss der Beleuchtung auf die Leitungsfähigkeit des krystallisirten Selens; vorläufige Mittheilung von *W. Siemens*.«

ten den Uebergang von den nicht metallischen zu den metallischen Elementen bildet.

> »Das Selen zeigt 2 allotropische Zustände; das geschmolzene erkaltet regelmässig, wird immer consistenter und erhärtet bei 50° als amorphes Selen; als solches ist es in compacter Gestalt bleigrau, metallglänzend, spröd, fein vertheilt bildet es ein ziegelrothes Pulver, spec. Gewicht = 4.28; spec. Wärme = 0.0837, negativ idioelektrisch, leitet Wärme schlecht, schmilzt über 100°. Erwärmt man dieses Selen länger auf 125°, so steigt die Temperatur in demselben beträchtlich; es geht in den krystallinisch körnigen Zustand über, und schmilzt dann ohne vorher zu erweichen, bei 217°, leitet die Elektricität, besitzt ein spec. Gewicht von 4.80.« [1])

Chemisch steht das Selen dem Schwefel am nächsten, und wird durch Erhitzen des selenhaltigen Schwefels mit Braunstein gewonnen.

Ich gehe nun schliesslich noch zu einer neüen Classe von Thatsachen über, welche die elektrodynamische Natur der Licht- und Wärmestrahlung über jeden Zweifel erheben werden, nachdem zuvor noch einige theoretische Erörterungen vorausgeschickt sind.

E. Riecke hat in einer mit Scharfsinn durchgeführten mathematischen Untersuchung »zur Theorie der dielektrischen Mittel« [2]) gezeigt, dass sich auf Grund der *Ampère*'schen und *Weber*'schen Theorie der Molecularströme für die sogenannte dielektrische Polarisation ein Ausdruck ableiten lässt, welcher formell vollkommen identisch ist mit dem in der Theorie des inducirten Magnetismus für die magnetische Polarisation der Elemente gefundenen. Nach der elektrodynamischen Theorie der Materie müssen folglich alle Körper, — also auch der sogenannte Lichtäther, der nichts anderes ist, als der am einfachsten constituirte Körper — die eben erwähnten Eigenschaften besitzen, welche fundamental mit allen ihren übrigen Eigenschaften in Verbindung stehen. Bezüglich einer quantitativen Bestimmung dieser Fundamen-

---

1) Theoretische Chemie von *C. G. Lehmann*. Leipzig. 1854. p. 56.

2) *Poggendorff*'s Annalen, Jubelband p. 321—335. (1874.)

tal-Constanten durch Beobachtung der statischen Wechselwirkung zwischen elektrisirten und magnetisirten Körpern muss jedoch berücksichtigt werden, dass die dielektrische Polarisation der Molecüle nur so lange hierbei zum Ausdruck kommt, als die elektrischen Theilchen sich in Molecularströmen befinden, welche durch die angewandten elektrischen Scheidungskräfte nicht aufgelöst werden, wie dies bei Leitern durch den Uebergang elektrischer Theilchen von einem Molecüle zum andern geschieht; bei der magnetischen Polarisation fällt dieser Unterschied fort, da keine magnetischen Fluida existiren und es daher nur eine moleculare, durch Drehung von Molecularströmen erzeugte, magnetische Polarisation geben kann. Für die erwähnten beiden Constanten lassen sich nun durch einfache Versuche zwei Grössen bestimmen, durch welche jene beiden fundamentalen Eigenschaften für alle diejenigen Körper quantitativ gemessen werden können, bei welchen durch Einwirkung elektrisch inducirender Kräfte keine Auflösung von Molecularströmen stattfindet, d. h. also, bei den Nichtleitern der Elektricität.

Bezeichnet nämlich E eine Zahl, welche angiebt, um wie viel Mal eine leitende Kugel von einem elektrisirten Körper stärker angezogen wird als eine gleichgrosse dielektrische, d. h. nicht leitende Kugel, so ist die sogenannte Dielektricitäts-Constante D, welche ein Maass für jene Fundamentaleigenschaft des betreffenden Körpers liefert, durch folgende einfache Beziehung mit E verbunden:

$$E = \frac{D + 2}{D - 1}$$

Durch ganz analoge Versuche erhält man bei magnetischer Einwirkung die sogenannte magnetische Inductions-Constante M, wobei die magnetische Anziehung einer Kugel aus der betreffenden Substanz mit der magnetischen Anziehung einer gleich grossen Kugel aus weichem Eisen unter denselben Versuchsbedingungen verglichen wird.

Denken wir uns nun die träge Masse ε', welche mit den Eigenschaften eines elektrischen Theilchens $— e$ begabt ist, im Vergleich zur trägen Masse ε des positiv elektrischen Theilchens $+ e$ so gross, dass der Schwerpunct beider Theilchen in die

träge Masse ε' des negativen Theilchens fällt, so wird dieses Theilchen von dem positiven Theilchen in einer geschlossenen Bahn umkreist, ähnlich wie die Sonne von einem Planeten. Dieses Paar stellt dann einen *Ampère*'schen Molecularstrom von einfachster Constitution dar, also von derjenigen Constitution, welche wir bei den Molecularströmen des sogenannten Licht-Aethers voraussetzen. In den Molecülen eines dichteren und zusammengesetzteren Körpers dagegen, kann der Kern eines solchen Molecularstromes aus einer viel grösseren Menge negativer Elektricitätstheilchen mit träger Masse bestehen, wobei dann die positiven Theilchen diese Masse in Form eines Ringes umkreisen müssen, ähnlich wie den Saturn sein Ring, oder die Sonne der Ring der kleinen Planeten oder der Meteoriten als Centralkörper umkreisen. Die letztere Vorstellung hat *Riecke* in der oben erwähnten Abhandlung seinen Betrachtungen zu Grunde gelegt, und bemerkt über die von äusseren elektrischen oder magnetischen Kräften auf einen solchen Molecularstrom ausgeübten Wirkungen wörtlich Folgendes:

> »Wenn nun auf einen solchen Molecularstrom von aussen her, etwa von unveränderlich gegebenen elektrischen Massen, elektrische Kräfte ausgeübt werden, so kann die Wirkung derselben eine doppelte sein; einmal eine ponderomotorische, sofern die auf beide Bestandtheile des Molecularstromes ausgeübten Kräfte zusammengenommen eine Verschiebung oder Drehung des ganzen Stromes bewirken; andererseits wird die Wirkung eine elektromotorische sein, sofern durch die auf den Ring des Stromes allein ausgeübten Kräfte eine Verschiebung des letzteren gegen den Kern im Sinne der wirkenden Kraft bedingt wird.«

Die hier zuletzt erwähnte Verschiebung des Kernes ist nun gerade derjenige Process, durch welchen der betrachtete Molecularstrom eine dielektrische Polarisation erlangt, indem diejenige Seite der Ringebene, nach welcher diese Verschiebung stattfindet, elektro-negativ, die andere aber elektro-positiv wird. Es ist ersichtlich, dass die Grösse dieser Verschiebbarkeit, welche durch die Dielektricitätsconstante gemessen wird, ein Maass dafür liefert, wie viel von der lebendigen Kraft der inducirten elektrischen Molecularbewegung der Theilchen ε, bei der

Fortpflanzung dieser Bewegung auf die elektrischen Theilchen des Nachbarmolecüles, durch die ponderomotorische Verschiebung des negativen Kernes verloren geht. Da nun aber nach dem Früheren nur die schwingende Bewegung der elektrischen Theilchen diejenige Bewegung ist, welche transversal zu der Fortpflanzungsrichtung steht und von uns als Licht oder strahlende Wärme empfunden wird, nicht aber jene gleichzeitig damit verknüpfte *longitudinale* ponderomotorische Bewegung der Molecularkerne, so haben wir hier für die Fortpflanzung der Lichtschwingungen in verschiedenen Medien ganz analoge Verhältnisse wie für die Fortpflanzung des Schalles in verschiedenen Gasen. Bekanntlich spielt auch hier in der Formel für die akustische Fortpflanzungsgeschwindigkeit ein Factor eine Rolle, welcher das Verhältniss der specifischen Wärmen des Gases bei constantem Druck und Volumen ausdrückt, und diese Grösse bedeutet nichts anderes als das Verhältniss, in welchem sich die fortzupflanzende lebendige Kraft gleichzeitig noch in eine andere Art von Bewegung, nämlich in Wärmebewegung, umsetzt, ganz ähnlich wie dies die Dielektricitätsconstante für die Lichtfortpflanzung, nur im entgegengesetzten Sinne, ausdrückt, indem hier gerade die *transversalen* Bewegungen der elektrischen Theilchen als Licht empfunden werden.

Indessen will ich diese Betrachtungen nicht weiter fortsetzen, sondern nur kurz anführen, dass *Maxwell* ganz allgemein gezeigt hat, dass sich in allen Räumen, welche die erwähnten Eigenschaften der magnetischen und dielektrischen Polarisation besitzen, elektrische Bewegungen fortpflanzen müssen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wurzel aus dem Producte der Dielektricitäts- und magnetischen Inductionsconstante umgekehrt proportional ist. [1]) Wenn daher, der elektrodynamischen Moleculartheorie gemäss, nach den von *Lorenz* aufgestellten Behauptungen, diese elektrischen Bewegungen die Lichtschwingungen sind, so müssen sich die Lichtbrechungsquotienten der Körper in Bezug auf den Aether oder die Luft durch die Wurzeln aus dem erwähnten Producte, oder — bei gleicher magnetischer Inductionsconstante — aus der Dielektricitätsconstanten allein darstellen lassen. Diese interessante Folgerung hat

1) *Clerk Maxwell*, A dynamic theory of the Electromagnetic field. Phil. Trans. 1864. Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. II. p. 495 ff.

in neuester Zeit *Ludwig Boltzmann* durch zahlreiche und sorgfältig ausgeführte Beobachtungen bestätigt gefunden, von denen ich mir hier nur die auf Gase bezüglichen Werthe mitzutheilen erlaube. Die erste Reihe enthält die Wurzeln aus der Dielektricitätsconstante, die zweite die Brechungsindices der Gase in Bezug auf den leeren Raum. Beide Werthe beziehen sich auf den mittleren Barometerstand und die Temperatur des schmelzenden Eises.

Name des Gases	$\sqrt{D}$	Brech.-Index
Luft	1.000295	1.000294
Kohlensäure	1.000473	1.000449
Wasserstoff	1.000132	1.000138
Kohlenoxyd	1.000345	1.000340
Stickoxydul	1.000497	1.000503
Oelbild. Gas	1.000656	1.000678
Sumpfgas	1.000472	1.000443

Bezüglich der Beobachtungsmethoden sowie der andern, bei festen Isolatoren erhaltenen und nicht minder schön übereinstimmenden Resultate, erlaube ich mir, auf die Originalabhandlungen *Boltzmann*'s zu verweisen.[1])

Die in allen diesen Thatsachen hervortretende Identität der Lichtschwingungen mit den Bewegungen der elektrischen Theilchen ist nun wiederum ganz vor Kurzem durch ein neues Glied in der Kette dieser Phänomene gestützt worden, indem *John Kerr* in Glasgow durch statisch-elektrische Induction isotrope optische Medien in doppelt brechende verwandelt hat.[2])

Diese erfreulichen Uebereinstimmungen sind jedenfalls für die Realität jener der *Maxwell*'schen Theorie zu Grunde liegenden Fundamental-Eigenschaft aller Körper und auch des Aethers — nämlich der dielektrischen und magnetischen Polarisation — von hoher Bedeutung. Hierzu gesellt sich noch, ausser den bereits angeführten Thatsachen, der interessante Umstand, dass *Maxwell* in seinem mehrfach citirten neuesten Werke (II. 391) unter der Ueberschrift »*Energy and Stress of Radiation*«, auch bereits eine Repulsivkraft des Lichtes abgeleitet hat, welche,

1) *Ludwig Boltzmann*, Experimentelle Bestimmung der Dielektricitätsconstante einiger Gase. Sitzungsber. d. K. Akad. d. W. zu Wien. 23. April 1874.

2) *John Kerr*. A new relation between Electricity and Light. Philos. Magaz. [4.] December 1875. p. 446 — p. 458.

ebenso wie die oben von mir auf atomistischer Basis deducirte Kraft, elektrodynamischen Ursprunges ist. *Maxwell* gelangt zu dem Resultate, dass ein leichtbeweglicher Körper, welcher dem Sonnenlicht ausgesetzt wird, einen Druck durch das Licht erleiden muss, durch welchen er in Bewegung geräth. *Maxwell* scheint bei der Abfassung seines Werkes noch nicht von der wirklichen Existenz solcher Wirkungen unterrichtet gewesen zu sein; jedenfalls gebührt ihm die Priorität bezüglich der oben von mir gegebenen elektrodynamischen Erklärung der *Crookes*'schen Experimente, obschon ich selbst erst nachträglich die betreffende Stelle in *Maxwell*'s Buch gefunden habe. Die Wirkung der umgebenden Luft und die dadurch bewirkte Umkehr der Erscheinungen bleibt jedoch bei *Maxwell* gänzlich unberührt. Die betreffende Stelle lautet folgendermaassen:

> »*Thus, if in strong sunlight the energy of the light which falls on one square foot is 83.4 fout pounds per second, the mean energy in one cubic foot of sunlight is about 0.0000000882 of a foot pound, and the mean pressure on a square foot is 0.0000000882 of a pound weight. A flat body exposed to sunlight would experience this pressure on its illuminate side only, and would therefore be repelled from the side on which the light falls. It is probable that a much greater energy of radiation migh be obtained by means of the concentrated rays of the electric lamp. Such rays falling on a thin metallic disc, delicately suspended in a vacuum, might perhaps produce an observable mechanical effect.*« *(p. 391.)*

Wie man sieht, anticipirt hier *Maxwell* bereits die ihm (1873) noch unbekannten *Crookes*'schen Experimente aus seiner elektromagnetischen Lichttheorie, welche sogar im Stande ist, einen numerischen Werth für den Druck zu liefern, den ein Sonnenstrahl auf einen Quadratfuss ausübt. Vergleicht man diese Berechnung mit den Daten, welche Herr *Crookes* in seiner letzten Vorlesung in der Royal-Institution (Februar 1876) gegeben hat, so findet sich in einem Berichte der Times v. 14. Febr. 1876 die folgende Angabe:

> »*Mr. Crookes has made experiments on the sun's light, and has worked out some calculations on it. It is equal to a pressure of 32 grains on the square foot.*«

Setzt man daher 1 Pound = 5760 Grains, [1]) so erhält man für die von *Crookes* beobachtete Druckgrösse

$$\frac{32}{5760} = 0.00555 \text{ Pound.}$$

Wie man sieht, ist dieser Werth ungefähr 100000 Mal grösser als der von Herrn *Maxwell* aus seiner Theorie abgeleitete, woraus zu schliessen sein dürfte, dass wesentliche Momente bei dieser Theorie, z. B. die Oberflächenbeschaffenheit des Körpers, unberücksichtigt geblieben sind, obschon andrerseits, trotz der grossen Sorgfalt und Geschicklichkeit des Herrn *Crookes*, der empirisch gefundene Werth mit einer nicht unbeträchtlichen Unsicherheit — die bei so delicaten Versuchen unvermeidlich ist, — behaftet sein wird.

Dass übrigens die ganze *Maxwell*'sche Theorie nur als eine symbolische aufzufassen ist, welche in ähnlicher Weise gewisse Gebiete von Erscheinungen erklärt, wie die Hypothese magnetischer Fluida, geht auf's Deutlichste aus dem Umstande hervor, dass diese Theorie für die Wärmeleitung der festen Körper zu Folgerungen führt, welche direct mit der Erfahrung im Widerspruch stehen. *Wiedemann*, der in Gemeinschaft mit *Franz* zuerst die Proportionalität zwischen elektrischer und thermischer Leitungsfähigkeit durch sorgfältige Versuche bewiesen hat, bemerkt bei einer Reproduction der *Maxwell*'schen Theorie in der neuesten Auflage seines Werkes über Galvanismus II. 2. p. 614:

> »Hierbei ist die Leitungsfähigkeit *umgekehrt* proportional $4\pi\mu F$ zu nehmen, — während nach den Versuchen die elektrische Leitungsfähigkeit der thermischen *direct* proportional ist, — so dass also ein bestimmter Zustand des Mediums um so langsamer erreicht wird, je besser dasselbe leitet.«

Bei der atomistischen Auffassung dieser Processe fällt dieser Widerspruch von selbst fort, da nach den von *W. Weber* ausgesprochenen Anschauungen, welche sich in zahlreichen Erscheinungen bestätigt haben, beide Vorgänge ihrem Wesen nach identisch sind.

---

1) *Bremiker*. Logarithmen. (Maasse und Gewichte.)

18.

Es gebührt *Maxwell* unzweifelhaft das grosse Verdienst, den inneren Zusammenhang aller Naturerscheinungen, welcher in den verflossenen 25 Jahren im Principe von der Erhaltung einer unveränderlichen Quantität der Energie zum Ausdruck gelangt ist, zu einer Identität des materiellen Trägers der Energie verallgemeinert zu haben, indem er diese Identität zuerst mit solchem Erfolge analytisch zum Ausdruck brachte, dass die formellen Ergebnisse der Theorie zu quantitativen Vergleichungen mit den Ergebnissen der Beobachtung führen konnten.

Dass aber nun durch diese kaum geahnten und in der That überraschenden Uebereinstimmungen, welche sich hierbei auf *einzelnen Gebieten* von Erscheinungen ergeben haben, auch nicht das Geringste über die Constitution jener universellen Substanz bezüglich ihrer Continuität oder Discontinuität bewiesen ist, dies erlaube ich mir durch einige Worte Sir *William Thomson's* zu bekräftigen, welche derselbe, allerdings vor 20 Jahren, über ein solches Medium ausgesprochen hat[1]), die jedoch *Maxwell* selber in seinem oben erwähnten Werke[2]) in folgender Weise citirt:

> »*Whether this matter is or is not electricity, whether it is a continuous fluid interpermeating the spaces between molecular nuclei, or is itself molecularly grouped; or whether all matter is continuous, and molecular heterogeneousness consists in finite vortical or other relative motions of contiguous parts of a body; it is impossible to decide, and perhaps in vain to speculate, in the present state of science.*«

Während also Sir *W. Thomson* in diesen Worten den Standpunct einer vollkommen berechtigten wissenschaftlichen Scepsis vertritt, gerirt sich derselbe Autor 20 Jahre später als Vertreter eines wissenschaftlichen Glaubens. Denn in seinem neuesten Werke[3]) bemerkt er an derselben Stelle, an welcher

---

1) Proceed. of the Royal Society. June 1856.

2) Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. II. p. 416.

3) Papers on Electrostatics and Magnetism by Sir *William Thomson*. London 1872. p. 348.

von ihm aus elektrostatischen Beobachtungen eine Grenzbestimmung für »die Grösse der Atome« abgeleitet wird, wörtlich:

> »*This of course, will give a definite limit for the sizes of atoms, or rather, as I do not believe in atoms, for the dimensions of molecular structures.*«

Vollkommen entsprechend dem bei allen wahrhaft Gläubigen beobachteten Characterzuge der Intoleranz gegen anders Denkende, wird hierauf über die ganze physikalische Schule des 18. Jahrhunderts, welche nach *Newton*'s Lehre nur Fernewirkungen kannte und auf Grund der physikalischen Atomistik ganz consequent auch die Wirkungen bei der sogenannten Berührung oder dem Contacte zweier Körper auf Fernewirkungen zurückführte, in folgenden Worten der Stab gebrochen:

> »*The eighteenth century made a school of science for itself, in which, for the not unnatural dogma of the earlier shoolmen, »matter cannot act where it is not« was substituted the most fantastic of parodoxes, contact does not exist.*«

Ich glaube oben gezeigt zu haben, dass das Dogma, welches Sir *William Thomson* hier als »*not unnatural*« vom Standpuncte seines Glaubens verdammt, ein »*illogical dogma*« vom Standpuncte des Denkens ist, weil jenem Satze, dass ein Körper da nicht wirken kann, wo er nicht ist, zuerst die Frage vorangehen und beantwortet werden muss »wo ist ein Körper?« Auf diese Frage giebt es aber keine andere Antwort als: »da wo er wirkt«, d. h. da wo wir Wirkungen desselben auf uns oder einen andern Körper wahrnehmen.

Aber befangen in dem verhängnissvollen Irrthum jenes scholastischen *circulus vitiosus* fährt Sir *William Thomson* in poetisch erhobener Sprache in seiner Verketzerung der Idee einer unvermittelten Fernewirkung der Materie a. a. O. mit folgenden Worten fort:

> »*This strange idea took deep root, and from it grew up a barren tree, exhausting the soil and overshadowing the whole field of molecular investigation, on which so much unavailing labour was spent by the great mathematicians of the early part of our nineteenth century.*«

Dass Sir *William Thomson* mit diesen Worten auch seinen unsterblichen Landsmann *Newton* und dessen berühmten Zeit-

genossen *Roger Cotes*[1]) wissenschaftlich verdammt, ahnt er nicht, und dennoch werden die oben von mir mitgetheilten Stellen aus der Vorrede zu *Newton*'s Principien keinen Zweifel darüber lassen, dass *Newton* gerade das Gegentheil der *Thomson*'schen Principien für Wahrheit hielt. Wie schnell sich aber ein Irrthum in unserer Zeit verbreitet, wenn er einmal von hoher Zinne mit genügendem Nachdruck und einem Anfluge von gläubiger Unfehlbarkeit ausgesprochen worden ist, dies beweisen die folgenden Worte des beständigen Secretärs der Berliner Akademie *E. du Bois-Reymond* in seiner von einem »*unscientific people*« mit Beifall begrüssten Grenzrede[2]):

> »Durch den leeren Raum in die Ferne wirkende Kräfte sind an sich unbegreiflich, ja widersinnig, und erst seit *Newton*'s Zeit, durch Missverstehen seiner Lehre und gegen seine ausdrückliche Warnung, den Naturforschern eine geläufige Vorstellung geworden.«

Der geheime Zusammenhang aller dieser Aeusserungen von *Thomson, Maxwell, E. du Bois-Reymond* und vieler anderen Vertreter der modernen Naturforschung ist unverkennbar. Nachdem einmal jener oben angeführte Brief *Newton*'s an *Bentley* entdeckt und falsch interpretirt war, hielt man sich für berechtigt, mit offenem Visir gegen die längst unbequem gewordene Fernewirkung der Materie aufzutreten und hierdurch gleichzeitig der ganzen Atomistik den Boden zu rauben, obwohl bei jedem wahren Fortschritte unseres Naturerkennens seit 200 Jahren die Atomistik sich immer wieder von Neuem bewährt hatte.

Dass *Newton* durch *Cotes* ausdrücklich erklären lässt, er glaube zwar in der allgemeinen Gravitation der Materie die letzte und einfachste mechanische Ursache aller himmlischen Bewegungen entdeckt zu haben, dagegen befinde er sich noch in voller Unwissenheit über die dieser letzten mechanischen

---

1) Als *Newton* im Jahre 1716 die Nachricht von dem frühen Tode des 34jährigen *Cotes* erhielt, soll er schmerzlich bewegt in die klagenden Worte ausgebrochen sein: »*If Cotes had lived, we had known something!*« Vgl. *Whewell*'s Geschichte der inductiven Wissenschaften. Deutsche Ausgabe von *Littrow*. II. p. 102.

2) Ueber die Grenzen des Naturerkennens. Ein Vortrag in der zweiten öffentlichen Sitzung der 45. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Leipzig am 14. Aug. 1872 gehalten von *Emil du Bois-Reymond*. Leipzig 1872. (Zweite Auflage.) p. 10 ff.

Ursache zu Grunde liegende, fernere Ursache, dies kümmert jene falschen Interpreten des *Newton*'schen Briefes an *Bentley* nicht. *Cotes* aber hält es für selbstverständlich, dass von jener bisjetzt unbekannten Ursache der gravitirenden *actio in distans* überhaupt niemals eine mechanische Erklärung gegeben werden könne; er erklärt dies im Auftrage *Newton*'s in absolut unzweideutiger Weise in folgenden Worten:

> »Von der letzteren kann keine mechanische Erklärung gegeben werden; würde diese gegeben, so wäre die Ursache noch nicht die einfachste. Wird man deshalb diese einfachsten Ursachen verborgen nennen und dieselben verbannen wollen? Zugleich würden dann auch die unmittelbar von ihnen abhängenden und ebenso die weiter abhängenden Ursachen verbannt werden, bis die Naturlehre von allen Ursachen frei und gereinigt wäre.«[1])

Nur bei gänzlicher Ignorirung dieser ausdrücklichen Erklärung *Newton*'s, dass jeder Versuch, die Schwere oder überhaupt eine erfahrungsmässig bewiesene *elementare* Fernewirkung materieller Theilchen, durch mechanische Ursachen d. h. durch Vermittelung eines materiellen Mediums zu erklären, einen logischen Widerspruch involvire, ist es erklärlich, dass Herr *Helmholtz* eine Hypothese *Maxwell*'s für »sehr wichtig« hält, bei welcher

> »Herr *Cl. Maxwell* die Annahme von Fernkräften hat fallen lassen, und annimmt, dass die sämmtlichen magnetischen elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen durch Fortpflanzung molecularer Bewegungen und Kräfte, in einem den Raum ausfüllenden elastischen Medium in die Ferne übertragen werden.«[2])

Was aber nun für Vorstellungen und Annahmen über die Constitution dieses »den Raum ausfüllenden elastischen Mediums« erforderlich sein würden, um jenen »sehr wichtigen« wissenschaftlichen Fortschritt möglich zu machen, darüber mögen uns gleichfalls die folgenden Worte von *Helmholtz* Aufschluss geben, in denen er die erwähnten Annahmen der *Maxwell*'schen Hypo-

---

1) *Newton*'s Principien. Deutsche Ausgabe. p. 12.

2) Monatsberichte d. K. Akad. zu Berlin. Sitzung vom 18. April 1872. p. 243.

these, die im Original sogar durch Abbildungen verdeutlicht sind, reproducirt:

»Es würde dazu ein System von Zellen mit elastischen Wänden und kugeligen Hohlräumen angenommen werden müssen, in denen elastische Kugeln rotiren können, die durch die Centrifugalkraft abgeplattet werden. Zwischen ihnen müssten in den Wänden der Zellen selbst, wie Frictionsrollen, andere Kugeln von unveränderlichem Volumen liegen. Diese würden frei rotiren können, ihr Schwerpunkt aber in isolirenden Medien sich nur durch elastisches Nachgeben der Zellenwand verschieben, in leitenden Medien dagegen bei jeder Verschiebung einen einer Reibung in einer zähen Flüssigkeit ähnlichen Widerstand erleiden müssen. Die Uebertragung der Bewegung zwischen diesen Kugeln würde nur durch Adhäsion ihrer Oberflächen aneinander geschehen. Verschiebung der zuletzt genannten Kugeln giebt dielektrische Polarisation des Medium, Fortströmen derselben einen elektrischen Strom; Rotation der elastischen Kugeln entspricht der Magnetisirung des Medium, die Rotationsaxe ist die Richtung der magnetischen Kraft.«[1])

»In der That« fährt Hr. *Helmholtz* fort, »lässt sich aus der Annahme derjenigen Reactionen der Volumenelemente des Aethers gegeneinander, welche Hr. *Maxwell* angenommen hat, eine vollständige, und mathematisch sehr elegante Theorie der sämmtlichen elektrischen, magnetischen, elektrodynamischen und Inductionserscheinungen entwickeln, und dieselbe Theorie giebt auch noch von den Erscheinungen des Lichtes Rechenschaft.«

Derartige Vorstellungen sind es also, welche das wissenschaftliche Verständniss von Erscheinungen besser vermitteln sollen als die Annahme von fernwirkenden Kräften, die nach dem *Weber*'schen Gesetze »nicht blos von der Lage der betreffenden Massen, sondern auch von ihrer Bewegung abhängen«, als ob die »Reibung in einer zähen Flüssigkeit« nicht gleichfalls eine Kraft wäre, welche nicht blos von der Lage der betreffenden Massen, sondern auch von ihrer Bewegung abhinge! Um aber solche Annahmen, wie

1) Monatsberichte d. Kgl. Akademie zu Berlin. p. 249. p. 247.

sie der obigen von *Maxwell* aufgestellten Hypothese zu Grunde liegen, für »sehr wichtig« zu halten, dazu ist es nothwendig, alle seit *Newton* in der Astronomie, Physik und Chemie gemachten Errungenschaften einfach zu ignoriren und sich in das Zeitalter der *Cartesianischen* Wirbel-Theorien zu versetzen.

Ueber solche Hypothesen hat bereits *Newton* vor 163 Jahren den Stab gebrochen, indem er durch *Cotes* in der Vorrede zu seinen Principien wörtlich erklärt: »*Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesibus, etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissime procedant, fabulam quidem elegantem forte et venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.*« (p. XVI.)

Dass solche physischen Hypothesen die Erkenntniss direct nicht fördern, sondern nur verwirren, trotzdem aber in mathematisch hoch begabten Köpfen ausgebrütet werden können, beweisen gerade die Wirbeltheorien des *Cartesius*, des berühmten Erfinders der analytischen Geometrie. Aber schon die nächste Generation der heranwachsenden Physiker wird über die Erzeugnisse unseres modernen Cartesianismus ebenso urtheilen, wie *Whewell* über das System der alten Cartesianer, indem er sagt:

> »Es wird unnöthig sein, hier von der völligen Grundlosigkeit dieses Systems in Beziehung auf dessen mechanische Haltbarkeit und auf die Uebereinstimmung desselben mit den Beobachtungen zu sprechen. Seine allgemeine Aufnahme, und sein zeitliches Ansehen, selbst zuweilen bei sehr verständigen, der Mathematik wohlkundigen Männern, sind die merkwürdigsten Ereignisse, deren es sich rühmen kann.« [1])

Dass das verhängnissvolle Missverständniss des *Newton*'schen Briefes an *Bentley* kein nothwendiges ist und folglich *Newton* auch nicht dafür verantwortlich gemacht werden darf, dass einige seiner späteren Epigonen die beiden Attribute »*inanimate*« und »*brute*« übersehen haben, — dafür mögen hier die Worte Sir *John Herschel*'s den Beweis liefern, durch welche dieser grosse Astronom jene nicht materielle Ursache, welche vielleicht der Schwere zu Grunde liegen mag, zu erläutern sucht.

---

1) *Whewell.* Geschichte der inductiven Wissenschaften II. p. 137. (Deutsche Ausgabe v. *Littrow.*)

In seinem *Treatise on Astronomy*, welcher 1833 erschienen ist, spricht sich Sir *John Herschel* folgendermaassen hierüber aus: (§. 371.)

»*All bodies with which we are acquainted, when raised into the air and quietly abandoned, descend to the earth's surface in lines perpendicular to it. They are therefore urged thereto by a force or effort, which it is but reasonable to regard as the direct or indirect result of a* ***consciousness*** *and a* ***will*** *existing* ***somewhere,*** *though beyond our power to trace, which force we term* ***gravity.***«

Dass Sir *John Herschel* den hier in einem Alter von 41 Jahren geäusserten Anschauungen von dem möglicherweise psychischen, d. h. nicht mechanischen, Ursprunge der allgemeinen Gravitation sein ganzes Leben hindurch treu geblieben ist, und gleichzeitig die bereits von *Cotes* im Auftrage *Newton*'s ausgesprochene logische Unmöglichkeit einer *mechanischen* Erklärung der gravitirenden Fernewirkung durch Vermittelung eines materiellen Mediums durch Druck und Stoss klar erkannt hat, dafür mögen die folgenden 25 Jahre später niedergeschriebenen Worte *Herschel*'s den Beweis liefern:

»*That such an effort should be exerted with success through an interposed space, is no doubt difficult to conceive. But the difficulty is no way alleviated by the interposition of any kind of material communication. The action of mind on matter admits of no explanation in words or elucidation by parallels. We know it as a fact, but are utterly incapable of analysing it as a process.*« [1])

Hierauf folgen alsdann unmittelbar wieder jene bereits oben citirten und 25 Jahre früher ausgesprochenen Worte.

Es ist klar, dass alle diese Argumente von *Newton*, *Cotes* und Sir *John Herschel* sich auf Fernewirkungen überhaupt beziehen und daher allgemein auch auf solche Bestrebungen Anwendung finden, welche darauf gerichtet sind, *Bewegungs*-Gesetze der Wechselwirkung zweier Theilchen durch Vermittelung eines materiellen Mediums zu erklären, wie

1) Outlines of Astronomy by Sir John *F. W. Herschel*. 5. Edition, London 1858. p. 291.

dies z. B. *Clausius* bei Aufstellung seines neuen Grundgesetzes der Elektrodynamik zu beabsichtigen scheint. [1])

Eine neuere Hypothese *Maxwell*'s, welche den oben erwähnten Folgerungen und seinem Werke zu Grunde liegt, besteht in der Annahme eines continuirlichen Fluidums von höchst eigenthümlichen Eigenschaften. Der ausgesprochene Zweck desselben ist derjenige, den *Faraday*'schen Kraftlinien *(»lines of force«)*, deren sich *Faraday* in Ermangelung analytisch-mathematischer Fähigkeiten zur Veranschaulichung complicirter Vorgänge im Gebiete der Elektricität und des Magnetismus bediente, eine physikalische und reale, nicht blos symbolische Bedeutung zu geben.

Jenes *Maxwell*'sche Medium muss daher in einen Zustand von Spannung gerathen können *»a state of stress, consisting of a tension like that of a rope in the direction of the lines of force, combined with a pressure in all directions at right angles to them«*. [2])

> *»And these lines must not be regarded as mere mathematical abstractions. They are the directions in which the medium is exerting a tension like that of a rope, or rather like that of our own muscles.«*
>
> *»These are some of the already discovered properties of that which has often been called vacuum, or nothing at all. They enable us to resolve several kinds of action at a distance in actions between contiguous parts of a continuous substance«. (p. 54.)*

Wenn uns aber die Hypothese eines solchen *»wonderful medium«* [3]) beim Verständniss der Wechselwirkung zweier Kör-

---

1) *Clausius*, Ueber ein neues Grundgesetz der Elektrodynamik. *Pogg.* Ann. Bd. 156. p. 657. Es heisst hier wörtlich:

> »Wenn man von der Vorstellung ausgeht, dass die elektrodynamische Einwirkung zweier bewegter Elektricitätstheilchen aufeinander durch einen zwischen ihnen befindlichen Stoff vermittelt werde, so braucht man von ihr nicht anzunehmen, dass sie nur von der relativen Bewegung der Theilchen abhänge, sondern kann auch den absoluten Bewegungen der beiden einzelnen Theilchen einen Einfluss auf sie zuschreiben.«

2) Proceed. Roy. Instit. Vol. VII. Part. I. No. 58. p. 52. (1873.)

3) »The vast interplanetary and interstellar regions will no longer be regarded as vast places in the universe, which the Creator has not seen fit,

per *mehr* als die Annahme einer unvermittelten Fernewirkung der Körper befriedigen soll, so muss doch offenbar irgend ein Umstand nachgewiesen werden, wodurch bei diesem Medium die vorausgesetzte Zahl von unbekannten Eigenschaften geringer ist, als bei der directen *actio in distans*; vor Allem muss man sich fragen, ob denn jene merkwürdigen »*stress*« begreiflicher als Fernewirkungen sind und ob wir uns eine »construirbare Vorstellung« von dieser wesentlichen Eigenschaft jenes *unsichtbaren* und *untastbaren* Mediums machen können, welches die Stelle der astronomisch so fruchtbar sich erweisenden *actio in distans* vertreten soll? Auf alle diese Fragen giebt uns Herr *Maxwell* die folgende Antwort:

> »*we may regard Faraday's conception of a state of stress as a method of explaining action at a distance by means of the continuous transmission of force, even though we do not know how the state of stress is produced.*« *(p. 52.)*

Da also, wie man sieht, die Ursache dieser »*stress*« des *Faraday-Maxwell*'schen Mediums den Urhebern dieser Hypothese gerade ebenso unverständlich ist, wie die Ursache einer unvermittelten »*actio in distans*«, so wird es uns, — um mit *Roger Cotes* zu reden — »erlaubt sein, *Newton*'s System, welches uns wahrer erscheint, bei zu behalten und zu umfassen, wie auch den durch Erscheinungen dargethanen Ursachen lieber zu folgen, als gänzlich erdichteten und noch nicht erwiesenen. Zur wahren Forschung gehört die Natur der Dinge aus wirklich existirenden Ursachen abzuleiten und die Gesetze aufzusuchen, nach denen der hohe Weltschöpfer die schönste Ordnung herstellen wollte, nicht aber die, nach denen er es konnte, wenn es ihm beliebt hätte.«[1])

---

to fill with symbols of the manifold order of His Kingdom. We shall find them to be already full of this *wonderfull medium.*« (Ibid. p. 53.)

1) *Newton*'s Principien, Vorrede von *Cotes*. Deutsche Ausgabe von *Wolfers*. p. 12.

Der Originaltext dieser Stelle ist bereits oben bis auf den hier noch hinzugefügten Schlusssatz mitgetheilt worden. Der lesztere lautet im Original (p. XXIV) wie folgt:

> »Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis vere existentibus derivare: eas vero leges quaerere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset.«

19.

Betrachtet man die Gesammtheit aller der bisher vom Standpuncte der atomistischen Theorie der Materie behandelten Erscheinungen, so ergiebt sich, dass hierzu die Annahme zweier Gattungen von Theilchen erforderlich war, welche die durch das *Weber*'sche Grundgesetz der Elektrodynamik definirten Eigenschaften besitzen. Diese Annahme war nothwendig und ausreichend, um uns sowohl von den Eigenschaften als auch den allgemeinen Gesetzen der Reibung, Cohäsion, Adhäsion, der chemischen Wechselwirkung in ihrer Beziehung zum Licht, zur Wärme und Elektricität so wie aller dieser verschiedenartigen Formen der Naturkräfte zur Massenbewegung und zu den mechanischen Druckkräften im Allgemeinen Rechenschaft zu geben. Die zuerst von *Wilhelm Weber* für die Theorie des Diamagnetismus als nothwendig erkannte Hypothese von der Existenz beharrlicher Molecularströme und frei beweglicher Elektricitätstheilchen in den Moleculen aller Körper hat uns durch das ganze Labyrinth scheinbar unzusammenhängender und heterogener Phänomene als sicherer Führer gedient; bei allen diesen Betrachtungen blieb jedoch bisher eine Eigenschaft der Materie unberücksichtigt, welche zwar gegenüber der Intensität elektrischer und molecularer Kräfte als verschwindend betrachtet werden durfte, die aber um so grossartiger unter kosmischen Verhältnissen auftritt und hier als *Newton*'sche Gravitation die Bewegungen aller Gestirne beherrscht.

Es handelt sich jetzt darum, zu untersuchen, ob diese *Newton*'sche Fernewirkung der Materie den letzten Elementen derselben (ε und ε') noch als eine besondere specifisch von ihren elektrischen Eigenschaften verschiedene Eigenschaft beigelegt werden müsse, um die an den Körpern zu Tage tretende Erscheinung der allgemeinen Gravitation hierauf zurückzuführen.

Ich glaube zeigen zu können, dass diese Hypothese nicht erforderlich und daher überflüssig ist, indem ich nachweisen werde, dass die elektrischen Eigenschaften, welche den letzten physikalisch untheilbaren Elementen der Materie, d. h. den elektrischen Atomen ($+e$ und $-e$) — (die zwar mit Trägheit [ε und ε'] aber einzeln für sich noch nicht mit Gravitation begabt zu sein brauchen) — beigelegt worden sind, vollkommen ausreichen, um hieraus ohne Widerspruch mit

beobachteten Thatsachen, das allgemeine Gravitationsgesetz *Newton's* abzuleiten. Es ist hierzu nichts weiter erforderlich, als diejenigen hypothetischen Beschränkungen in der bisherigen Definition der elektrischen Eigenschaften der beiden Massentheilchen ε und ε' aufzuheben, welche für die Erklärung der elektrischen Phänomene unwesentlich sind, und daher, ohne den beobachteten Thatsachen zu widersprechen, beseitigt werden können.

Bekanntlich kommen bei der Wechselwirkung der elektrischen Theilchen $+ e$ und $- e$ im Ganzen drei statische Potentiale in Betracht, nämlich *zwei* repulsive zwischen gleichartigen Theilchen, und *ein* attractives Potential zwischen ungleichartigen Theilchen. Man hat nun bisher stillschweigend allgemein die Annahme gemacht, diese drei statischen Potentiale seien quantitativ absolut gleich, offenbar aus dem Grunde, weil die Beobachtungen uns gelehrt haben, dass zwei gleiche aber entgegengesetzte Elektricitätsmengen sich neutralisiren, d. h. gemeinsam in einem Körper vereinigt, jede statische Fernewirkung desselben aufheben. Die Richtigkeit dieser Hypothese ist jedoch empirisch nur innerhalb solcher Grenzen verbürgt, welche durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler unserer Instrumente von allen empirischen Quantitätsbestimmungen unzertrennlich sind. Indem ich vorläufig von einer Verschiedenheit der beiden repulsiven Potentiale unter denselben räumlichen Verhältnissen absehe, lässt sich nun zeigen, dass die Annahme einer solchen Verschiedenheit zwischen dem attractiven und dem repulsiven Potentiale zweier ungleichartigen ($+ e$ und $- e$) und zweier gleichartigen ($+ e$ und $+ e$ oder $- e$ und $- e$) Elektricitätstheilchen mit ihren trägen Massen ε und ε' ausreichend ist, um das Grundgesetz der allgemeinen Gravitation der Körper als unmittelbare Folge aus dieser Verschiedenheit hervorgehen zu lassen; und zwar wird sich zeigen, dass dieser Unterschied nur ein so geringer zu sein braucht, dass die empfindlichsten unserer elektroskopischen Hülfsmittel, weder jetzt noch in der Zukunft, im Stande sein können, diesen Unterschied durch directe Maassbestimmungen statisch-elektrischer Potentiale zu ermitteln.

Ich nehme also an, es sei der elektrostatische Druck, welchen zwei ruhende Elektricitätstheilchen $+ e$ und $- e$ in der Einheit der Entfernung attractiv auf einander ausüben, um

die Grösse Δg grösser als der unter gleichen Verhältnissen von zwei gleichartigen Theilchen z. B. von $+ e$ und $+ e$ repulsiv erzeugte Druck.

Aus dieser Annahme ergiebt sich, wie unmittelbar ersichtlich, für jede binäre Verbindung von zwei entgegengesetzt elektrischen Theilchen $+ e$ und $- e$ eine attractive Fernewirkung sowohl auf ein einzelnes positives Theilchen $+ e$ als auf ein einzelnes negatives Theilchen $- e$, folglich auch auf die Verbindung zweier solcher Theilchen, d. h. auf das binäre Aggregat eines *Ampère*'schen Molecularstromes. Bei der statischen Wechselwirkung zweier binären Verbindungen, oder zweier Paare von entgegengesetzt elektrischen Theilchen, sind im Ganzen vier Combinationen von Potentialen zu unterscheiden, von denen zwei eine attractive und zwei eine repulsive Fernewirkung zwischen diesen beiden binären Verbindungen erzeugen. Da nun unserer Annahme gemäss die attractive Fernewirkung zweier einzelnen entgegengesetzt elektrischen Theilchen die repulsive Wirkung zweier einzelnen gleichartigen Theilchen in der Einheit der Entfernung um die Grösse Δg übertrifft, so ergiebt sich allgemein für die statische Wechselwirkung zweier *Ampère*'scher Molecularströme in der Einheit der Entfernung eine Attraction von der Grösse $2\,\Delta g$. Da diese Grösse eine statische Resultante elektrischer Kräfte ist, so muss sie nothwendig auch den allgemeinen Gesetzen der statisch elektrischen Fernewirkungen unterworfen sein, d. h. sie muss proportional dem Producte aus der Zahl der Elemente (der Molecularströme) und umgekehrt proportional den Quadraten ihrer Entfernung sein. Diese Eigenschaften jener attractiven Resultanten der statischen Elektricität sind aber identisch mit den Eigenschaften der allgemeinen Gravitation der Materie, was gezeigt werden sollte.

Um Missverständnisse zu vermeiden, erlaube ich mir hier ausdrücklich zu bemerken, dass ich durch diesen Beweis nicht etwa beanspruche eine mechanische Erklärung der *Newton*schen Gravitationskraft geliefert zu haben, sondern ich behaupte nur, dass diese den materiellen Körpern eigenthümliche gravitirende Fernewirkung auf eine statische Resultante zweier elektrischen Fernewirkungen zurückgeführt werden kann, in ähnlicher Weise wie *Wilhelm Weber* die magne-

tische Fernewirkung der Körper auf eine dynamische Resultante derselben beiden elektrischen Fernewirkungen zurückgeführt hat. Zwischen diesen beiden Resultanten findet der bemerkenswerthe Unterschied statt, dass bei der statischen Resultanten (der Gravitation) die polaren Eigenschaften der elektrischen Componenten verschwunden sind, während bei der dynamischen Resultanten (dem Magnetismus) diese polaren Eigenschaften in modificirter Gestalt wieder zum Vorschein kommen. Beide Resultanten repräsentiren jedoch den Grundcharacter aller chemischen Verbindungen, bei welchen die Eigenschaften der verbundenen Bestandtheile verschwinden oder so modificirt wieder zu Tage treten, dass wir in der Verbindung einen neuen Körper, d. h. ein mit neuen Eigenschaften begabtes Aggregat materieller Theilchen zu besitzen glauben. Es liegt daher in dieser Eigenschaft, welche bisher als unterscheidender Character aller chemischen Wechselwirkungen der Körper betrachtet wurde, hinfort kein Grund mehr, die chemische Wechselwirkung als eine specifisch von der elektrischen Wechselwirkung der letzten Elemente der Materie verschiedene Wirkung aufzufassen.

Bevor ich dazu übergehe für den Ueberschuss $2\Delta g$ des attractiven Potentials zweier elementaren Molecularströme einen bestimmten Grenzwerth abzuleiten, seien mir noch einige Bemerkungen gestattet, welche sich auf zwei allgemeine aber bis jetzt wesentlich nur empirisch bewiesene Eigenschaften aller materiellen Körper beziehen.

Die erste dieser Eigenschaften ist die bereits von *Newton* durch Versuche ermittelte Thatsache, dass alle Körper gleich schwer sind, oder anders ausgedrückt, dass alle Körper unabhängig von ihren sonstigen Eigenschaften, in gleichen Zeiten eine gleiche Beschleunigung durch die Schwere im widerstandslosen Raume erhalten. Die Genauigkeit der *Newton*'schen Versuche geht bis auf $\frac{1}{1000}$ der gemessenen Quantitäten. [1]) Diese Versuche hat bekanntlich in unserer Zeit *Bessel* mit der grössten Gewissenhaftigkeit und Präcision und unter Anwendung der

---

1) *Newton*, Principia Lib. III prop. VI Theor. 6.
»In corporibus ejusdem ponderis differentia materiae, quae vel minor esset quam pars millesima materiae totius, his experimentis manifesto deprehendi potuit.«

feinsten Hülfsmittel der neueren Beobachtungskunst wiederholt. Das erlangte Resultat war jedoch dasselbe, nur innerhalb viel engerer Grenzen der Unsicherheit eingeschlossen. [1] Aus den Bemühungen zweier Männer wie *Newton* und *Bessel*, denen sich noch eine grosse Anzahl anderer hervorragender Physiker beigesellt, geht deutlich hervor, dass die erwähnte Eigenschaft *aller* Körper keine solche ist, die aus dem Begriffe oder der Definition der *Newton*'schen Gravitation resultirt, sondern eine rein empirische, die jedoch eine vollendete Theorie der Materie aus ihren Prämissen als eine logisch nothwendige Consequenz abzuleiten gestatten muss.

Aus der oben entwickelten Anschauung von dem elektrischen Ursprunge der Gravitation und der Constitution der einfachsten materiellen Molecüle aller Körper ergiebt sich aber jene von *Newton*, *Bessel* u. A. empirisch bewiesene Thatsache der gleichen Schwere, d. h. der gleichen Beschleunigung aller Körper, von selbst. Denn hiernach wächst die Quantität von träger Substanz, nämlich die Summe der beiden trägen Massen ε und ε', in jeder binären Verbindung der beiden elektrischen Theilchen $+e$ und $-e$ proportional ihrer attractiven Resultanten, d. h. ihrer gravitirenden Fernewirkung, d. h. es wächst die zu bewegende träge Masse proportional der sie bewegenden Kraft, woraus die Constanz der Beschleunigung folgt.

Bezog sich die soeben besprochene allgemeine Eigenschaft der Körper auf eine Veränderung der lebendigen Kraft ihrer translatorischen Bewegung durch die statische Resultante der elektrischen Molecularströme, welche man bisher *Schwere* genannt hat, so giebt es nun noch eine zweite allgemeine Eigenschaft der Körper, welche sich auf eine Veränderung der lebendigen Kraft ihrer molecularen Bewegung durch die dynamische Resultante der elektrischen Molecularströme bezieht, nämlich die Constanz des Productes aus dem Atomgewichte und der specifischen Wärme. Auch diese Thatsache ergiebt sich nothwendig aus unserer Theorie der Materie, nach welcher die einfachsten materiellen Elemente der Körper *Ampère*'sche Molecularströme mit den trägen Massen ε und ε' sind, durch deren Zuwachs an lebendiger Kraft ihrer rotirenden Bewegung um einander wir den

1) Astron. Nachrichten Bd. X. No. 223. 1832.

Zuwachs der Wärmemenge messen, welche einem gegebenen Aggregat von Molecularströmen zugeführt wird. Da sich nun die Atomgewichte der Körper dieser Anschauung gemäss wie die Anzahl der in jedem Atome vorhandenen Molecularströme verhalten müssen, so folgt hieraus unmittelbar auch die zweite der erwähnten allgemeinen Eigenschaften der Materie. Gleichzeitig werden aber auch die Ursachen scheinbarer Ausnahmen von diesem allgemeinen Gesetze begreiflich, indem diese Beziehung offenbar nur unter der Bedingung gültig sein kann, dass sich die zugeführte Wärme bei den Atomen verschiedener Körper in *gleichem Verhältniss* in lebendige Kraft der Molecularströme verwandelt.

Die Erfüllung dieser Bedingung kann jedenfalls nicht absolut unabhängig von der Constitution, d. h. von der Art und Weise der mechanischen Gruppirung und Wechselwirkung der elementaren Molecularströme betrachtet werden, wodurch bei verschiedenen Molecülen die Verwandlung der in Form von Wärme zugeführten Arbeitsgrösse eine etwas verschiedene sein kann. Die Nothwendigkeit der Erfüllung dieser Bedingung drückt sich in der Thatsache aus, dass die einzelnen Molecüle der Körper ihrer Wechselwirkung unter einander möglichst entzogen sein müssen, um jene Beziehung zwischen Atomgewicht und spec. Wärme durch Versuche zu beweisen. Deshalb müssen die Körper hierbei in den Gaszustand versetzt werden; ähnlich wie bei den oben erwähnten Pendelversuchen *Newton's* und *Bessel's* gleichfalls die Wechselwirkung der bewegten Körper mit andern vermieden sein muss, um jene Thatsache der constanten Beschleunigung zu constatiren. Deshalb müssen hierbei die Körper in einen möglichst widerstandslosen Raum versetzt werden.

Um nun schliesslich zu zeigen, wie geringfügig und für alle unsere elektrostatischen Messapparate vollkommen verschwindend der Unterschied zu sein braucht, welcher bei den obigen Betrachtungen zwischen den beiden attractiven und repulsiven elektrischen Potentialen zweier elementaren Molecularströme vorausgesetzt wurde, diene Folgendes.

Es bezeichnen $+ n.e$ und $- n.e$ die beiden Quantitäten positiver und negativer Elektricität, gemessen in elektrostatischen Einheiten, welche in einem gegebenen Quantum ponderabler Materie, z. B. in einem Milligramm, zu einem bestimmten Körper, z. B. Wasser mit einander verbunden sind. Denkt

man sich nun ein gleiches Quantum ponderabler Masse d. h. 1 Milligramm Wasser, so findet zwischen diesen beiden gleichen Massen eine gravitirende Fernewirkung statt, deren Grösse sich leicht aus den bekannten Versuchen von *Cavendish, Reich, Baily* u. A. berechnen lässt.

Denken wir uns daher die Massen dieser beiden Milligramme Wasser in zwei Puncten concentrirt, und versetzen dieselben in die Einheit der Entfernung von 1 Millimeter, so muss unserer Hypothese gemäss die Summe der beiden attractiven Potentiale d. h. $2n^2[+e.-e]$ plus der Summe der beiden repulsiven Potentiale d. h. $n^2[+e.+e]+n^2[-e.-e]$ einen Ueberschuss von Attraction ergeben, welcher der früheren Bezeichnung gemäss gleich sein muss $n^2.2\Delta g$.

In diesen Ausdrücken bedeutet n nichts anderes als die Anzahl von Molecularströmen, von denen jeder das Quantum $+e$ und $-e$ an positiver und negativer Elektricität, gemessen in elektrostatischem Maasse, besitzt. Da vorläufig noch die beiden repulsiven Potentiale ihrem absoluten Werthe nach als gleich betrachtet werden, so würde das Verhältniss der gesuchten Potentialdifferenz zu einem der Potentiale der in dem Milligramm Wasser vorhandenen Gesammtmenge von statischer Elektricität, z. B. der positiven Elektricitätsmenge, ausgedrückt durch:

$$\frac{2.n^2\Delta g}{2n^2[+e.+e]}=\frac{\Delta g}{[+e.+e]}$$

Die in den Klammern befindlichen Grössen $+e$ und $+e$ deuten nur an, welches Potential der in einem Milligramm zu gleichen Quantitäten vorhandenen Elektricitätsmengen $+e$ und $-e$ mit dem Ueberschuss der attractiven Potentiale $2n^2\Delta g$ verglichen werden soll. Wäre es daher möglich, experimentell die in einem Milligr. Wasser vorhandene Quantität an positiver oder negativer Elektricität in absoluten, elektrostatischen Maasseinheiten zu bestimmen, so wäre hiermit eine Vergleichung des in demselben Maasse ausgedrückten gravitirenden Potentiales Δg ermöglicht, und somit die gesuchte Potentialdifferenz zwischen attractiver und repulsiver Fernewirkung der elektrischen Theilchen numerisch bestimmbar. *Wilhelm Weber*[1]) hat nun in Gemeinschaft

1) Abhandl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. W. III. p. 281. (1857.)

mit *F. Kohlrausch* vor 20 Jahren gefunden, dass *mindestens* »in 1 Milligramm Wasser $106.7 \times 155370 \times 10^6$ elektrostatische Einheiten positiver und gleichviel negativer Elektricität enthalten sein müssen.«

In einer soeben in den Astronomischen Nachrichten von mir publicirten Abhandlung [1]) habe ich die absolute Masseneinheit der ponderablen Materie, d. h. diejenige Quantität von Materie, welche eine ihr gleiche Quantität, (beide in Puncten concentrirt gedacht) aus der Entfernung eines Millimeters in einer Secunde, die Beschleunigung von einem Millimeter ertheilt, zu

15188200 Milligramm

oder 15.188 Kilogrammen bestimmt. Hieraus folgt, dass eine Masse von 15188200^2 Milligrammen die Masse von einem Milligramm (anstatt wie oben von 15188200 Milligramm) dieselbe Beschleunigung ertheilt, wie die elektrostatische Einheit unter denselben räumlichen und zeitlichen Verhältnissen, wenn mit jenem Milligramm eine elektrostatische Einheit fest verbunden gedacht wird. Folglich würde die Bewegungsgrösse, welche sich zwei Milligramme Wasser aus der Entfernung eines Millimeters in einer Secunde vermöge ihrer Gravitation zu ertheilen im Stande sind, nur $\frac{1}{15188200^2}$ von derjenigen Bewegungsgrösse betragen, welche sie sich ertheilen würden, wenn jedes Milligramm fest mit einer elektrostatischen Einheit verbunden wäre. Da nun aber in jedem dieser beiden Milligramme, den obigen Angaben gemäss, nicht nur eine sondern *mindestens* $K = 106.7 \times 155370 \times 10^6$ positive elektrostatische Einheiten vorhanden sind, so würden sich diese beiden Milligramme Wasser vermöge ihrer positiven Elektricitätsmengen mit einer Kraft abstossen, welche K^2 mal grösser ist als die Kraft, mit welcher sie sich im Besitze von je einer elektrostatischen Einheit abstossen, d. h. mit einer Kraft, welche $15188200^2 \cdot K^2$ mal grösser ist als diejenige, vermöge deren sich beide Milligramme gravitirend anziehen. Hieraus folgt, dass das Verhältniss der gesuchten Potentialdifferenz zu einem der repulsiven Potentiale der Elektricitätstheilchen nur $\frac{1}{15188200^2 K^2} = \frac{1}{6.34 \times 10^{40}}$ zu be-

1) Astr. Nachr. No. 2082 ff. Ueber die physische Beschaffenheit der Cometen (2. Abhandlung.)

tragen braucht, um aus einer so geringfügigen Verschiedenheit zweier potentiellen Energieen die ganze Mannigfaltigkeit der himmlischen Bewegungen in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen berechnen zu können. Dass an eine directe elektroskopische Beobachtung solcher Differenzen nicht gedacht werden kann, bedarf keiner weiteren Erörterung. Dagegen wird es zur Veranschaulichung der ungeheuren Summe von Energie, welche nach der entwickelten Hypothese in Form von elektrischer Energie in den Elementen aller materiellen Körper schlummert, von Interesse sein, die oben aus den Maassbestimmungen von *Weber* und *Kohlrausch* abgeleitete Energie eines Cubikmillimeters Wasser mit den durch Explosion von Pulver oder Dynamit erzeugten Bewegungsgrössen zu vergleichen.

Nach einer Mittheilung der in Leipzig erscheinenden Illustrirten Zeitung vom 22. Jan. 1876 soll gegenwärtig das grösste Geschütz der Welt eine von *Krupp* verfertigte Kanone sein, welche eine Oeffnung von 35 Centimetern im Durchmesser besitzt.

Ueber die Leistungsfähigkeit des Geschützes befinden sich a. a. O. wörtlich die folgenden Angaben:

> »Das Stahl- oder Hartgussgeschoss, dem bei angemessener Entfernung kein gegenwärtig existirender Panzer zu widerstehen vermag, hat ein Gewicht von 320 Kilo und erhält durch die Dienstladung von 125 Kilo prismatischen Pulvers eine Anfangsgeschwindigkeit von 475 Meter.«

Die Bewegungsgrösse, welche hier dem Geschosse durch die Explosivkraft des Pulvers ertheilt wird, betrüge also in den früheren Einheiten des Milligrammes und Millimeters ausgedrückt:

$$320000000 \times 475000 = 247 \times 10^{12} \text{ Milligramm-Millimeter.}$$

Nach den oben angeführten Maassbestimmungen würde nun ein Milligramm Wasser aus der Entfernung eines Millimeters vermöge seiner positiven Elektricitätsmenge eine Bewegungsgrösse von K Milligramm-Millimeter erzeugen können, und die gleiche Bewegungsgrösse vermöge seiner negativen Elektricitätsmenge, also im Ganzen eine Bewegungsgrösse von $2K$ Milligramm-Millimeter. Da nun mit Anwendung des obigen Werthes von K:

$$2K = 33 \times 10^{12},$$

so ergiebt sich, dass die in einer Masse von 1 Milligramm

Wasser vorhandene elektrische Energie, im Stande wäre, wenn sie plötzlich in Freiheit gesetzt werden könnte, eine Bewegungsgrösse zu erzeugen, welche die Explosion einer Pulverladung von 16.7 Kilogr. in dem grössten aller gegenwärtig existirenden Geschütze einem Geschosse von 520 Kilogr. zu ertheilen vermag.

Es soll nun die bisher noch gemachte Annahme einer absoluten Gleichheit der beiden repulsiven elektrischen Potentiale gleichfalls verallgemeinert werden, und bei gleicher Trägheit der Theilchen $+ e$ und $- e$ vorausgesetzt werden, es existire auch zwischen diesen beiden Potentialen eine Differenz, wie zwischen dem attractiven und repulsiven Potentiale. Wenn alsdann die von *Weber* und *Kohlrausch* in einem Cubikmillimeter Wasser, d. h. in einem Milligramm ponderabler Materie, gefundene Quantität eine *untere* Grenze für die in sämmtlichen Molecularströmen dieser Masseneinheit enthaltenen *Gesammtmenge* von Elektricität darstellt, so muss dieselbe nach meiner Theorie der Gravitation in *allen* Körpern, unabhängig von ihrer physikalischen und chemischen Beschaffenheit, proportional der *ponderablen* Masse sein, d. h. bei Gleichheit der Volumina, proportional dem specifischen Gewichte der Körper. Da nun das spec. Gewicht der Erde nach *Reich* 5.58 ist, so muss unsere Erde durchschnittlich in jedem Cubikmillimeter ihres Volumens 5.58 Mal mehr elektrostatische Einheiten besitzen, als nach den Maassbestimmungen von *Weber* 1 Cub. Millimeter Wasser. Bezeichnet man daher, wie oben, die hierin enthaltene Zahl von elektrostatischen Einheiten mit K, und den Erdradius in Millim. mit r, so enthielte die Erde:
$E = 5{,}58 \,.\, K \,.\, \frac{4}{3} r^3 \pi = 10^{44}$ elektrost. Einheiten von positiver Elektricität und ebensoviel von negativer Elektricität.

Nimmt man nun zwischen den Potentialen dieser beiden entgegengesetzten Elektricitätsmengen eine constante Differenz an, wie oben für das repulsive und attractive Potential, so dass also z. B. das Potential der negativen Elektricitätsmenge der Erde nur *um Weniges* das Potential der positiven Elektricitätsmenge übertrifft, so würde offenbar die Erde eine unveräusserliche negativ elektrische Eigenschaft besitzen, deren Dasein sich in einer scheinbaren negativen Ladung an ihrer Oberfläche bemerklich machen müsste. Unter den gemachten Annahmen lässt sich nun aus der elektrischen Dichtigkeit δ der Erdoberfläche, d. h. aus der auf jedem Quadratmillimeter ihrer Ober-

fläche vorhandenen Zahl von elektrostatischen Einheiten, jene Differenz der repulsiven Potentiale leicht berechnen. Sie wäre nämlich einfach mit Einsetzung des obigen Werthes von E:

$$\frac{4r^2\pi\delta}{E} = \frac{3\delta}{5{,}58\,Kr}$$

Drückt man den Erdradius in Millimetern aus, so hat man:

$$r = 6370300000.$$

Mit Einsetzung des oben gegebenen numerischen Werthes von K und des von *Dellmann* als Mittel aus *zweijährigen* Beobachtungen [1]) für die elektrische Dichtigkeit der Erdoberfläche gefundenen Werthes

$$\delta = 0.03259 \text{ elektrost. Einheiten}$$

ergiebt sich die gesuchte Potentialdifferenz

$$\frac{3\delta}{5{,}57\,Kr} = \frac{1}{6.10^{24}}.$$

Der von *Hankel* aus einer *einmaligen* Beobachtung in der Nähe des Erdbodens für δ gefundene Werth beträgt:

$$\delta = 0.005644.$$

Dagegen beobachtete *Dellmann* in beträchtlicher Höhe über dem Erdboden am Ende einer 22 Fuss langen Stange und fand als Mittel aus zweijährigen Beobachtungen den c. 6 Mal grösseren Werth $\delta = 0.03259$.

Es ist klar, dass dieser Unterschied für eine empirische Prüfung der von mir gegebenen Theorie einer sehr schwachen negativ elektrischen Fernewirkung der ponderablen Massen irrelevant ist. Jedenfalls scheint es mir von Wichtigkeit, dass auf dem angedeuteten Wege die Existenz einer elektrischen Fernewirkung der Weltkörper, die bei den Erscheinungen der Cometenschweife so deutlich zu Tage tritt, aus einer allgemeinen Theorie der Materie auch quantitativ in genügender Uebereinstimmung mit der Erfahrung abgeleitet werden kann, ohne hierbei mit bekannten Beobachtungen im Gebiete der Elektricität in Widerspruch zu gerathen.

Schliesslich erlaube ich mir noch darauf hinzuweisen, dass in den mannigfachen Unterschieden, welche sich zwischen den Erscheinungen positiver und negativer elektrischen Entladungen zeigen, sehr deutlich auch eine quantitative Differenz der beiden Elektricitätstheilchen $+e$ und $-e$ zum Ausdruck gelangt.

Vergleicht man die zwischen dem attractiven und repulsiven

1) Vgl. meine oben citirte 2te Abhandlung in den Astr. Nachrichten, Bd. 87. No. 18—22 »Ueber die physische Beschaffenheit der Kometen.«

Potentiale gefundene Differenz von $\frac{1}{6{,}34 \cdot 10^{40}}$ mit der zwischen den beiden repulsiven Potentialen stattfindenden von $\frac{1}{6 \cdot 10^{24}}$ so ergiebt sich, dass die letztere im Vergleich zur ersteren ungefähr 10^{16} Mal grösser ist.

Um also das wesentliche Resultat meiner vorliegenden Abhandlung noch einmal kurz auszusprechen, so glaube ich behaupten zu dürfen, dass alle Körper aus den trägen Massen der beiden elektrischen Theilchen $+e$ und $-e$ zusammengesetzt sind, deren *mechanische* Eigenschaften durch das *Weber*'sche Grundgesetz der Elektrodynamik definirt sind. Bei der binären Combination dieser letzten, *physikalischen* Atome erzeugen sich drei Resultanten: eine dynamische Resultante, welche in den magnetischen Fernewirkungen der Körper zur Erscheinung kommt, und zwei statische Resultanten, von denen die eine die allgemeine Gravitation, die andere die elektrische Fernewirkung der Weltkörper erzeugt.

20.

Meine Bemühungen, in der physikalischen und astronomischen Literatur den Ausspruch ähnlicher Ideen von dem Zusammenhange der statischen Elektricität mit der allgemeinen Gravitation zu finden, waren lange erfolglos geblieben und ich hatte fast die Hoffnung aufgegeben, meinen eignen Conceptionen dadurch ein grösseres Gewicht und eine beifälligere Aufnahme schon in der Gegenwart verschaffen zu können, dass ich nachwies, wie bereits ein Anderer, gänzlich unabhängig von mir, zu gleichen oder ähnlichen Ideen geführt worden sei.

Ein glücklicher Umstand liess mich jedoch bei einer für andere Zwecke erneuerten Durchsicht von *Sir John Herschel*'s berühmter Capreise in einer Anmerkung auf S. 410 das lange Gesuchte entdecken. *Herschel* spricht hier von der Repulsivkraft der Sonne auf die Cometenschweife, und hält es in hohem Grade für wahrscheinlich, dass diese Repulsivkraft durch freie Elektricität an der Oberfläche der Sonne erzeugt werde. Indem er alsdann, seiner Zeit im Geiste vorauseilend, die Bedeutung einer »elektrischen Meteorologie« der Zukunft discutirt, bemerkt er wörtlich Folgendes:

> »*A Sun so electrical charged, would induce opposite electrical states in the two hemispheres of day and night,*

the intensity of those states depending greatly on the degree of conductibility to be attributed to the earth as a mass. The electrical meteorology of day and night, indeed all electrical meteorology is in a state too little advanced to admit of statisfactory answers to a crowd of queries which here suggest themselves.«

Hieran schliessen sich nun die folgenden, für mich so hoch interessanten Worte:

»*Without at all going into the question raised by Prof. Mosotti, wether gravitation be not a manifestation of statical electrical action (or rather, without here explaining the arguments, which seem to me apposed to such an idea) one thing is physically certain, viz.: That, the laws of the two powers being the same . . . .*«

Ich wusste nun wenigstens, dass *Mosotti* eine solche Idee ausgesprochen hatte. Derselbe ist im Jahre 1791 geboren, seit 1811 Professor der Physik, Mathematik, theoretischen Astronomie und Geodäsie an der Universität zu Pisa und Mitglied der Soc. Italiana.[1]) Dass *Mosotti* ein bedeutender und scharfsinniger Mann war (oder ist?) habe ich aus einigen Abhandlungen in den Memoirs of Roy. Astr. Society über den *Encke*'schen Cometen und ein widerstehendes Mittel ersehen. Aber gerade diejenige Abhandlung, in welcher ich die von *Herschel*, ohne nähere Angabe der Quelle, citirte Stelle zu finden hoffte, nämlich die Abhandlung: »*Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps*« habe ich weder in den hiesigen noch in anderen Bibliotheken aufzufinden vermocht. Indessen sollten auch hier meine bereits aufgegebenen Hoffnungen in unerwarteter Weise erfüllt werden. Als ich mich im Sommer vorigen Jahres der Gastfreundschaft Lord *Lindsay*'s auf seiner Besitzung in *Dun Echt* bei *Aberdeen* zu erfreuen hatte, fand ich in dessen überaus reichhaltiger und kostbarer Bibliothek in einem grossen Quartbande, mit vielen Abhandlungen zusammengebunden, auch die lange gesuchte Schrift von *Mosotti*. Lord *Lindsay* forderte mich in liebenswürdiger Weise auf, den betreffenden Band zu einem genaueren Studium mit nach Leipzig zu nehmen, und hierdurch bin ich in den Stand gesetzt, Folgendes über den Inhalt jener Abhandlung von *Mosotti* mitzutheilen.

Dieselbe ist in Turin 1836 in der Königl. Druckerei gedruckt

1) Vgl. *Poggendorff*'s Biogr.-Liter. Handwörterbuch II. p. 216.

und einem Freunde *Mosotti*'s, dem berühmten Italienischen Mathematiker *Plana* gewidmet. Der Verfasser steht vollkommen auf dem Boden der physikalischen Atomistik, wie der folgende Eingang der Abhandlung beweist:

> »*L'étude des phénomènes naturels a conduit les physiciens à considérer les corps comme composés de molécules, qui se tiennent en équilibre stable à une certaine distance entre elles. Cet état d'équilibre exige qu'elles soient douées d'une certaine action, dont on sait déjà assigner quelques particularités, mais dont les caractères complets ne sont pas encore bien définis.*« (p. 5.)

Hieran schliesst sich nun der folgende bemerkenswerthe Satz, in welchem *Mosotti* schon ganz bestimmt die Ansicht ausspricht, dass uns die Natur in den elektrischen Kräften ihre einfachsten und ursprünglichsten Kräfte enthüllt:

> »*Il y a une classe de phénomènes, assez singuliers au premier abord, dans lesquelles néanmoins il parait que la nature, en séparant les forces qu'elle emploie, a voulu se montrer dans tout sa simplicité. Tels sont les phénomènes qu'on classe sous la dénomination d'électricité statique.*«

Hierauf folgt dann eine kurze Erörterung über die analytische Behandlung der elektrischen Phänomene nach der sogenannten unitarischen Hypothese *Franklin*'s, bei welcher nur die positive Elektricität als beweglich betrachtet wird und gleichzeitig der ponderablen Masse der Körper, neben ihrer gravitirenden Fernewirkung, alle Eigenschaften eines negativ elektrischen Körpers ertheilt werden, dessen Elemente fest mit dieser Elektricität verbunden sind. *Mosotti* zeigt, dass diese unitarische Anschauungsweise *Franklin*'s theoretisch und analytisch zu denselben Resultaten wie die dualistische Hypothese von *Dufay* und *Coulomb* führt. Der einzige Unterschied, welcher zwischen beiden Hypothesen existirt, wird von *Mosotti* mit folgenden Worten erläutert:

> »*Une seule circonstance met de la différence entre l'hypothese de Dufay ou Coulomb et celle de Franklin; elle consiste en ce, que selon l'une, les deux fluides sont mobiles dans le corps, tandis que selon l'autre le fluide électrique seulement peut se mouvoir, et non pas la matière; mais comme pour l'équilibre il ne faut que tenir compte de la position relative, la mobilité de fluide électrique est suffisante pour qu'il s'établisse de la même manière.*«

Bei der unitarischen Hypothese hat man also, wie leicht ersichtlich, im Ganzen noch vier Potentiale der angenommenen Wechselwirkungen, nämlich:

1. Das *attractive* Potential der *Newton*'schen Gravitation zwischen zwei Massentheilchen der ponderablen Träger des elektrischen Fluidums.
2. Das *attractive* Potential zwischen einem elektrischen Theilchen und dem negativen ponderablen Träger.
3. Das *repulsive* Potential zwischen zwei Theilchen des positiven elektrischen Fluidums.
4. Das *repulsive* Potential zwischen zwei Theilchen der mit negativ elektrischen Eigenschaften begabten ponderablen Masse der Körper.

Mosotti vindicirt nun in den folgenden Sätzen *Aepinus*[1]) das Verdienst, zuerst den Gedanken ausgesprochen zu haben, dass man diese vier Potentiale auf *drei* reduciren könne, von denen zwei eine Attraction und nur eine einzige eine Repulsion erzeugen.

Die Worte *Mosotti*'s hierüber sind die folgenden:

»*Aepinus, qui a réduit sous la forme d'une théorie mathematique l'hypothese de Franklin, a remarqué le premier; que si la condition de l'équilibre des fluides électriques des deux corps à l'état naturel est, que l'attraction de la matière et la répulsion du fluide du premier sur le fluide du second soient égales, et réciproquement, il n'y a en jeu que trois forces dont deux d'attraction et une seule de répulsion.*«

Von dieser Conception des *Aepinus* versucht nun *Mosotti* in seiner Abhandlung eine Anwendung auf die Molecularkräfte, besonders auf die hydrodynamischen Kräfte zu machen, durch welche das Gleichgewicht der Flüssigkeiten bedingt ist. Indessen ist er sich vollkommen klar bewusst, dass eine solche Annahme bei seinen Zeitgenossen auf Widerstand stossen werde — nicht etwa aus physikalischen Gründen — sondern nur, weil man sich daran gewöhnt hat, die von *Newton* als beobachtete Thatsache hingestellte Anziehung aller Körper gleichzeitig auch bezüglich ihres Ursprunges als die einfachste, nicht weiter in primitivere Componenten zerlegbare Kraft aufzufassen. Indem aber *Mosotti* solche Argumente gegen seine Hypothese

1) Tentamen theoriae Electricitatis et Magnetismi, Auctore *T. V. T. Aepino*, Petropoli. Typis Academiae scientiarum. 1759.

zurückweist und der Ansicht ist, dass nur »*un peu de réflexion*« dazu erforderlich sei, um sich das Ungereimte derartiger Einwendungen gegen seine Anschauungen zum Bewusstsein zu bringen, spricht er ganz bestimmt den unabhängig auch von mir concipirten und in vorliegender Abhandlung weiter durchgeführten Gedanken aus, dass die allgemeine Gravitation aus denjenigen Principien abgeleitet werden könne, welche das Gesetz der elektrischen Kräfte bestimmt. Diese interessante Stelle lautet wörtlich wie folgt:

»*L'admission d'une telle force de répulsion entre les molécules matérielles le choqua d'abord, comme contraire à l'idée que l'on avait d'une attraction entre elles, dont l'existence était si bien prouvée d'après les principes de Newton. Mais un peu de réflexion lui a suffi pour se convaincre que cette admission n'avait rien qui fût opposé aux faits, ou plutôt, on pourrait ajouter, qui ne soit confirmée par les faits.*

L'attraction universelle elle même peut découler comme une déduction des principes qui règlent les forces électriques.

En effet il suffit de supposer que, à égalité de masses, la répulsion des molécules de la matière est un peut moindre que leur attraction pour les atomes de l'éther, ou que la répulsion réciproque entre ceux ci, pour laisser subsister un excès d'attraction, qui étant dans la proportion du produit des masses, et en raison inverse du carré de la distance, pourrait justement représenter l'attraction universelle.« — (p. 8.)

»*Voilà dans ces molécules une image des atomes crochus d'*Épicure, *engendrés par l'amour et la haine de deux matières différentes d'*Empédocle.« (p. 32.)

Der nun folgende, mathematische Theil der Abhandlung enthüllt die grossen Schwierigkeiten, mit denen die Statik der Molecüle bei einer atomistischen Constitution der Körper zu kämpfen hat, wenn die den Molecülen beigelegten Kräfte nur statische d. h. solche sind, bei welchen das im *Weber*'schen Gesetze enthaltene dynamische Glied fehlt. Letzteres macht die Potentiale aller Centralkräfte nicht nur von der Entfernung sondern auch von dem Quadrate der Geschwindigkeit abhängig. Ich glaube oben in § 12 gezeigt zu haben, wie einfach diese Schwierigkeiten beseitigt werden können, wenn man die bisherige Statik der Atome durch das *Weber*'sche Gesetz

in eine Dynamik der Molecüle verwandelt, zu welcher die Fortschritte der mechanischen Wärme- und Gastheorie den natürlichen und historisch bedingten Uebergang gebildet haben.

Diese Erwägungen sind es gewesen, welche mich vor fünf Jahren veranlassten, in meinem Buche: »Ueber die Natur der Cometen« die Behauptung auszusprechen:

»dass sich dem menschlichen Geiste das *Weber*'sche Gesetz als ein Universalgesetz der Natur zu entschleiern beginnt, welches ebensowohl die Bewegungen der Gestirne als auch diejenigen der Elemente der Materie beherrscht.« (Vorrede p. LII.)

Dass die Anwendung des *Weber*'schen Gesetzes auf die Bewegungen der Himmelskörper nicht zu Widersprüchen mit den Beobachtungen führt, habe ich gleichfalls a. a. O. auf S. 334 durch folgende Mittheilung dargethan, deren numerische Angaben ich der Güte meines Freundes und Collegen *Scheibner* verdanke:

> »Unter Beibehaltung des numerischen Werthes der *Weber*'schen Constante c könnte ein Unterschied höchstens in der Bewegung des Merkur beobachtet werden, indem hier eine säculare Aenderung des Perihels von 6.73 Bogensecunden hervorgebracht würde. Bei der Venus betrüge dieser Einfluss nur noch 1.43 Secunden.«

Diese Angaben, welche sich auf die Bewegungen der Planeten beziehen, haben nach Verlauf kaum eines halben Jahres nach dem Erscheinen meines Buches eine vollkommen unabhängige Bestätigung in Frankreich erhalten, indem Hr. *Tisserand* am 30. September 1872 der französischen Akademie eine Abhandlung mittheilte, die den folgenden Titel trägt:

> »*Sur le mouvement des planètes autour du Soleil d'après la loi électrodynamique de Weber.*«

Tisserand findet in dieser Abhandlung für die säculare Aenderung des Periheles beim Merkur den Werth 6.28 Bogensecunden, bei der Venus den Werth 1.32 Secunden, also zwei Werthe, welche fast genau mit den oben mitgetheilten übereinstimmen.

Ich erlaube mir im Anschluss hieran noch den Inhalt einer mündlichen Mittheilung der Oeffentlichkeit zu übergeben, welche ich vor 4 Jahren von einem der grössten Astronomen und gründlichsten Kenner der Mondbewegung empfangen habe. Als ich am 1. Juli 1872 in einer öffentlichen Gesammtsitzung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften meine Abhandlung

»über die elektrische und magnetische Fernewirkung der Sonne« vortrug, hatte ich in der Versammlung meinen Platz zur Seite unseres inzwischen verstorbenen Mitgliedes *P. A. Hansen*. Noch während der Sitzung bemerkte nun *Hansen* mir gegenüber, dass die gegenwärtige auf dem *Newton*'schen Gesetze basirte Theorie der Mondbewegung noch Abweichungen enthalte, deren Ursachen er vorläufig in einer magnetischen oder elektrischen Wechselwirkung zwischen Sonne, Mond und Erde suche. Vgl. *De motu perturbationibusque planetarum secundum legem electrodynamicam Weberianam solem ambientium. Scripsit C. Seegers. Gottingae 1864.*

21.

Aus den angestellten Erörterungen erhellt nun zur Genüge, dass die ganze in der vorliegenden Arbeit entwickelte elektrodynamische Theorie der Materie in sich zusammenbrechen würde, wenn dasjenige Gesetz, welches ich als ein Grundgesetz für jede dynamische Wechselwirkung zweier, durch eine *actio in distans* verbundener, beweglicher und mit Trägheit begabter Massen betrachte, in irgend welcher Hinsicht mit Principien im Widerspruch stände, welche logisch und empirisch als die Grundlagen unserer ganzen Naturerkenntniss betrachtet werden müssen. Bekanntlich sind nun solche Einwendungen gegen das *Weber*'sche Gesetz in der That erhoben worden, und zwar zuerst *indirect* von *Helmholtz*[1]) bereits im Jahre 1847, nachdem ein Jahr früher jenes Grundgesetz von *Weber* aufgestellt und durch atomistische Interpretation des *Ampère*'schen Gesetzes abgeleitet worden war.[2]) *Direct* sind diese Einwendungen zuerst von *Tait*[3]) im Jahre 1868 ausgesprochen worden und alsdann noch bestimmter in Gemeinschaft mit *W. Thomson* in dem von diesen Physikern herausgegebenen »Handbuche der theoretischen Physik«, welches im Jahre 1871 unter diesem Titel von *H. Helmholtz* und *G. Wertheim* in einer deutschen Uebersetzung erschienen ist.

Was zunächst das unterscheidende Merkmal zwischen dem

1) *Helmholtz*, Ueber die Erhaltung der Kraft, eine physikalische Abhandlung, vorgetragen in der Sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 23. Juli 1847. Berlin, *Reimer*. 1847.

2) *W. Weber*, Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächs. Ges. der Wissenschaften. Leipzig. 1846. *(Hirzel.)*

3) *T. G. Tait*, Sketsch of Thermodynamics. Edinburgh 1868.

Weber'schen Gesetze und dem *Newton*'schen Gesetze betrifft, so ist das Potential des *Newton*'schen Gesetzes unabhängig von der relativen lebendigen Kraft, das Potential des *Weber*'schen Gesetzes aber abhängig von der lebendigen Kraft, also auch von der Geschwindigkeit, und zwar in folgender Weise. Bezeichnen m und m' die beiden durch eine *actio in distans* in Wechselwirkung stehenden trägen Massen, r ihre Entfernung, und v ihre relative Geschwindigkeit in der Richtung ihrer Verbindungslinie, so wird die Wechselwirkung zwischen diesen beiden Massen durch folgende *Potentiale* ausgedrückt:

nach *Newton*: $$\frac{m \cdot m'}{r}$$

nach *Weber*: $$\frac{m \cdot m'}{r}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Wenn man über die Dimensionen der beiden Massen m und m' keine besondere Annahme macht, sondern dieselben wie in der mathematischen Theorie allgemein üblich ist, als Puncte d. h. als Kraftcentra betrachtet, die sich principiell bis zu jedem beliebigen Abstande (r) einander nähern können, so dass also z. B. principiell auch $r = o$ werden kann, so ist klar, dass das *Newton*'sche Potential zu Widersprüchen mit der Erfahrung führen muss. Dasselbe würde nämlich ausdrücken, dass in einer begrenzten Menge von atomistisch constituirter Materie, z. B. in einem Cubikmillimeter Wasser, eine unbegrenzte, d. h. jeden beliebigen *endlichen* Werth überschreitende, Summe von potentieller Energie vorhanden sein könne. Denn *formell* liegt in dem mathematischen Ausdruck des *Newton*'schen Potentiales keine Beschränkung für die Annäherung zweier in Puncten concentrirten trägen Massen, so dass es für die Grösse der durch die Wechselwirkung zweier solcher Massenpuncte geleisteten Arbeit (indem sie sich z. B. anziehen,) ganz gleichgültig wäre, ob wir uns in jenen Puncten die trägen Massen zweier Weltkörper oder diejenigen zweier Milligramme concentrirt dächten. Trotzdem die *Newton*'schen Potentiale bei beiden Paaren von Massenpuncten in einem bestimmten Abstande, z. B. von 1 Meter, einen ungeheuren Unterschied der Arbeitsgrösse repräsentiren, welche bei einer *gleichen* Abstandsveränderung von ihnen geleistet wird, so würde doch dieser Unterschied in Bezug auf die Summe der überhaupt bei ihrer Annäherung erzeugbaren Arbeitsgrösse, die in Form von lebendiger Kraft auftritt, gänzlich

verschwinden; denn auf ihrem Wege von einem endlichen Abstande r bis zu einem Abstande $r = o$, würde die lebendige Kraft jener Weltkörpermassen ebenso gut wie die jener beiden Milligramme nothwendig unendlich gross werden, d. h. ein unendlich grosses Arbeitsäquivalent repräsentiren müssen. Wie man sieht, würden solche Folgerungen mit unseren physikalischen Erfahrungen in directen Widerspruch treten, welche uns zu der Annahme zwingen, dass in den atomistisch gruppirten Elementen eines Körpers von endlicher Masse und endlichem Raume auch nur ein endliches Quantum von leistungsfähiger Energie vorhanden sein könne, welches durch Wechselwirkung dieser Elemente bei ihrer Annäherung in lebendige Kraft verwandelt werden muss. Es würde also, wie man sieht, diese Eigenschaft des *Newton*'schen Potentiales jede Anwendung des Principes von der Erhaltung der Kraft auf reale d. h. physische Verhältnisse illusorisch machen.

Denn jenes Princip verlangt, dass die Summe der verbrauchten, d. h. in lebendige Kraft verwandelten, Spannkräfte, *plus* der noch vorhandenen Summe von potentieller Energie, welche sich bei fernerer Annäherung der Körper noch in lebendige Kraft verwandeln kann, stets eine constante Grösse sei. Diese constante Grösse würde aber, wie gezeigt, nach dem *Newton*'schen Potentiale eine unendlich grosse sein, d. h. eine solche, die sich durch keinen noch so grossen endlichen Verlust irgendwie veränderte. Da uns nun im vorliegenden Falle diese Grösse ein gewisses Arbeitsquantum repräsentirt, d. h. eben jene Summe von Kraft, welche nach dem von *Helmholtz* ausgesprochenen Principe von der Erhaltung der Kraft constant sein soll, so würde, bei Voraussetzung des *Newton*'schen Potentiales für die Wechselwirkung atomistisch constituirter Elemente, ein jeder beliebige Körper, ein Milligramm ebenso gut wie unsere ganze Erde, ein Reservoir eines unendlich grossen, d. h. niemals zu erschöpfenden Kraftvorrathes sein.

Helmholtz spricht das erwähnte Princip S. 17 a. a. O. mit folgenden Worten aus:

»Es ist also stets die Summe der vorhandenen lebendigen und Spannkräfte constant. In dieser allgemeinsten Form können wir unser Gesetz als das Princip von der Erhaltung der Kraft bezeichnen.«

Wie man sieht, würde der *analytische* Ausdruck des *Newton*'schen Potentiales mit diesem Principe in directen Wider-

spruch treten, denn bei den Veränderungen und der Constanz physischer und realer Grössen, haben wir es stets nur mit endlichen Quantitäten zu thun und nur für diese hat das oben von *Helmholtz* in seiner »allgemeinsten Form« ausgesprochene Princip einen Sinn, im entgegengesetzten Falle drückt es aber einen — Widersinn aus.

Da *Newton* sein Gesetz nur aus der Wechselwirkung von Körpern in directmessbarem Abstande empirisch abgeleitet hat, und daher ganz folgerichtig auch nur auf Körper in directmessbaren Abständen angewandt hat, so konnte der oben nachgewiesene physikalische Widerspruch seines Gesetzes nicht zu Tage treten und verlor auch in der That practisch jede Bedeutung.

Anders verhält es sich jedoch, wenn man das *Newton*'sche Gesetz auf die Bewegungen solcher Massen anwenden will, welche man nicht direct wahrnimmt, und deren Entfernungen daher auch nicht directmessbarsind. Dann ist es offenbar nothwendig, dass jene oben erörterte *physikalische* Bedingung — (nämlich dass die durch Wechselwirkung zweier Massenelemente in Form von lebendiger Kraft erzeugte Arbeitsgrösse nur eine *endliche* und von der Quantität der wirkenden Massen abhängige sein soll) — auch *analytisch* in den Ausdruck jenes Potentiales von *Newton* mit aufgenommen werde. Man überzeugt sich nun leicht, dass diese Forderung beim *Weber*'schen Potentiale in einfachster Weise erfüllt ist. Denn sobald die relative Geschwindigkeit v, welche sich die beiden Massen m und m' durch ihre Wechselwirkung ertheilen, den Werth c erreicht hat, welchen *Weber* aus elektrodynamischen Versuchen zu 59320 geograph. Meilen bestimmt hat, wird der Werth

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 0$$

d. h. von nun an sind die beiden Massen nicht mehr im Stande, sich durch gegenseitige Einwirkung aufeinander eine grössere Beschleunigung zu ertheilen, so dass hierdurch die von ihnen überhaupt erzeugbare Arbeitsgrösse eine *endliche* und *nicht überschreitbare* wird. Das *Weber*'sche Gesetz drückt daher nur analytisch diejenige Bedingung aus, welche jedes Kraftgesetz erfüllen muss, wenn es physikalisch nicht in Widerspruch mit dem von *Helmholtz* formulirten Ausdruck des Principes von der Erhaltung der Kraft treten soll.

Wenn man diese einfachen Betrachtungen erwägt, so macht es in der That einen merkwürdigen Eindruck, dass das *Weber*'sche Gesetz gerade von diesem allgemeinen Principe aus hat Anfechtungen erleiden müssen, und zwar gerade wieder von denjenigen Männern, welchen wir sehr fruchtbare Anwendungen jenes Principes in der Physik zu verdanken haben.

Helmholtz hatte nämlich in seiner oben erwähnten Abhandlung den Irrthum begangen, die Gültigkeit seines Principes wesentlich an die Bedingung zu knüpfen, dass die Intensität der Kräfte, welche dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft genügen sollen, »*nur* von der Entfernung der auf einander wirkenden Puncte abhängt.« Wie man aus dem obigen Potentiale des *Weber*'schen Gesetzes sofort sieht, ist diese Bedingung bei diesem Gesetze nicht erfüllt. Dass aber dessen ungeachtet durch das *Weber*'sche Gesetz nicht »Zusammenstellungen solcher Körper möglich sein würden, in denen entweder in das Unendliche Kraft verloren geht, oder gewonnen wird« geht deutlich aus dem Umstande hervor, dass *Weber* bereits ein Jahr nach dem Erscheinen der *Helmholtz*'schen Abhandlung, bei Gelegenheit eines Auszuges seiner früheren Arbeit in *Poggendorff's* Annalen Bd. 73. p. 229 darauf aufmerksam gmacht hat,

»dass das *Potential* der Masse ε in Beziehung auf den Ort der Masse ε'

$$= \frac{\varepsilon}{R}(1 - [R])$$

sei; denn die partiellen Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach den drei Coordinaten x, y, z geben die Componenten der nach den Richtungen der drei Coordinatenaxen zerlegten beschleunigenden Kraft.«[1])

Bisher haben alle Mathematiker und Physiker die Existenz eines solchen Potentiales als Beweis dafür betrachtet, dass ein Kraftgesetz dem Princip von der Erhaltung der Energie genüge. Dies beweist u. A. der letzte Aufsatz von *Clausius* über sein *neues* elektrodynamisches Grundgesetz.[2]) Hier bemerkt nämlich *Clausius* zum Beweise, dass sein neues Gesetz dem erwähnten Principe genüge, ausdrücklich:

»Die durch diese Gleichungen bestimmte auf das Theil-

1) In der obigen Formel ist zur Abkürzung $[R]$ für die erforderliche Function von R gesetzt.

2) *Pogg.* Ann. Bd. 157. p. 498.

chen e wirkende Kraft und die ihr entsprechende auf das Theilchen e' wirkende Kraft genügen schon für sich allein dem Princip von der Erhaltung der Energie. Die während eines Zeitelementes von ihnen gethane Arbeit wird nämlich durch das folgende vollständige Differential dargestellt:

$$- d \frac{e e'}{r} (1 + k v v' \cos \varepsilon)«$$

Dieser Ausdruck, in welchem v und v' die absoluten Geschwindigkeiten der bewegten Theilchen e und e' darstellen und ε den Winkel, welchen die Richtungen dieser Geschwindigkeiten mit einander machen, verwandelt sich für die relative Bewegung, wo $\varepsilon = o$ und $+ v = - v$ ist, in den folgenden:

$$d \frac{e e'}{r} (1 - k v^2)$$

Wie man sieht, ist dieser Ausdruck *identisch* mit dem *Weber*'schen Potentiale, wenn $k = \frac{1}{c^2}$ gesetzt wird.

Ebenso erklärte im Jahre 1873 Hr. *Maxwell* in seinem mehrfach citirten Werke II. p. 432 ausdrücklich:

»*Weber's law is also consistent with the principle of the conservation of energy in so far that a potential exists, and this is all that is required for the application of the principle by Helmholtz and Thomson.*«

Hr. *Helmholtz* hat nun zwar selber bald nach dem Erscheinen meines Buches »über die Natur der Kometen« in einer Gesammtsitzung der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin seinen 25 Jahre früher begangenen Irrthum verbessert, indem er wörtlich bemerkt:

»Dagegen diesen noch complicirteren Fall, welchen das *Weber*'sche Gesetz aufstellt, wo die Kräfte von den Coordinaten und von den ersten und zweiten Differentialquotienten derselben nach der Zeit abhängen, hatte ich damals nicht berücksichtigt, und dieser Fall ist mit einer etwas erweiterten Form des Gesetzes von der Erhaltung der Energie allerdings vereinbar.«[1])

Leider ist jedoch diese Selbst-Berichtigung von Herrn *Helmholtz* zu spät gekommen, um alle diejenigen Folgen zu ver-

1) Monatsber. d. K. Akad. d. W. zu Berlin. April 1872. p. 250.

hüten, welche aus jenem Irrthume während seiner 25jährigen ungehinderten Verbreitung entsprungen sind.

So bezeichnet z. B. Herr *Tait* in seinem oben citirten Werke p. 57 das *Weber*'sche Gesetz als die beste aller bisher zur Erklärung der elektrischen Phänomene aufgestellten Hypothesen (»*the best known complete hypothesis that of Weber*«). Indessen sei diese Hypothese unzulässig, weil sie Kräfte zwischen den sich bewegenden Theilchen voraussetze, die nicht, wie Hr. *Helmholtz* 1847 verlangt hat, »*nur von der Entfernung der auf einander wirkenden Puncte abhängen.*« Hr. *Tait* citirt nämlich a. a. O. die *Helmholtz*'sche Schrift mit folgenden Worten:

> »*In an admirable tract by Helmholtz*[1] (*who must be classed as one of the most successful of the early promoters of the science of energy on legitimate principles*), *the whole subject is based upon Newton's principle, with one or other of the following postulates, from either of which the other is shown to follow.*
>
> (a) *Matter consists of ultimate particles which exert upon each other forces whose directions are those of the lines joining each pair of particles, and whose magnitudes depend* ***solely*** *on the distances between the particles.*
>
> (b) *The Perpetual Motion is impossible.*«

Wie man sieht, betrachtet hier Herr *Tait* auch die »beharrliche Bewegung« der Körper und ihrer Elemente als einen Widerspruch gegen das Princip von der Erhaltung der Kraft, obschon eine solche »*perpetual Motion*« jenem Principe nicht nur nicht widerspricht, sondern vielmehr nach dem bekannten Beharrungsgesetze *Galilei*'s eine *Prämisse* für die Ableitung jenes Principes ist.

Dieser Irrthum des Herrn *Tait*, der für ihn natürlich auch die Annahme *perpetuirlicher* Molecularströme unmöglich macht, entspringt einfach daher, dass Herr *Helmholtz* in seiner Schrift auch das »*perpetuum mobile*«, »welches nicht nur sich selbst in Bewegung erhielte, sondern auch noch im Stande wäre, *nach aussen Kraft abzugeben*«, als einen Widerspruch mit dem Principe von der Erhaltung der Energie hingestellt hat. Indem Hr. *Tait* diese ausdrückliche Begriffsbestimmung eines *perpetuum mobile* in der *Helmholtz*'schen Schrift gänzlich übersieht und daher die ihm unbekannte lateinische Bezeichnung durch »*perpetual mo-*

---

1) Ueber die Erhaltung der Kraft. — Berlin 1847. Translated in Taylor's Scientific Memoirs. 1853.

tion« übersetzt, gelangt er zu demjenigen Argumente, welches er *einzig* und *allein* gegen das *Weber*'sche Gesetz mit Bezug auf die obigen Sätze der *Helmholtz*'schen Schrift anzuführen weiss. Die Worte, in denen diese Schlussreihe des Herrn *Tait* enthalten ist, lauten (p. 57) wie folgt:

> »*the best known complete hypothesis (that of Weber) on which the mutual actions of electric currents have yet been explained, requires the admission of mutual forces between moving quantities of electricity, which are not consistent with* (a), *and from which therefore the perpetual motion might be obtained.*«

Auf Grund dieser Irrthümer, deren Quelle, wie gezeigt, in der von *Helmholtz* im Jahre 1847 publicirten Schrift »über die Erhaltung der Kraft« liegt, hielten sich nun Herr *Tait* und Sir *William Thomson* in ihrem gemeinschaftlich herausgegebenen und von Herrn *Helmholtz* in's Deutsche übersetzten »Lehrbuch der theoretischen Physik«, für berechtigt, das *Weber*'sche Gesetz als ein dem »Principe von der Erhaltung der Energie« widersprechendes Gesetz zu bezeichnen, welches in die Kategorie »zwar gefährlicher aber interessanter und oft sehr eleganter Speculationen« gehöre.

Da diese Behauptung von jenen Physikern indessen nicht im Bereiche der nur für ihre Fachgenossen bestimmten Literatur ausgesprochen worden ist, wo dergleichen Irrthümer sich ohne irgend welche Polemik geräuschlos von selbst richten, sondern in einem Lehrbuche für *Lernende* und *angehende* Physiker, so hielt ich mich im Interesse dieser heranwachsenden Generation von Naturforschern für verpflichtet, diese Irrthümer nachdrücklich zu berichtigen.

Herr *Helmholtz* versucht die englischen Physiker gegen meine Bemerkungen in der Vorrede zum 2. Theil jener Uebersetzung (1874) zu vertheidigen, indem er bemerkt: (p. VIII)

> »Unter den Gründen, welche Herr *W. Thomson* für die Unzulässigkeit der *Weber*'schen Hypothese anführt, ist auch der, dass sie dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft widerspreche. Dieselbe Behauptung war auch ich genöthigt, etwas später in einer im Jahre 1870 veröffentlichten Arbeit aufzustellen.«

Diese »Behauptung« von 1870 ist jedoch durch die bereits oben erwähnte spätere Erklärung *Maxwell*'s von 1873 widerlegt und ein Gleiches gilt von einer noch späteren Behauptung, zu welcher Herr *Helmholtz* dadurch gelangt, dass er das Product

$$\frac{1}{2}\left(\mu - \frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\cos\vartheta^2\right)q^2$$

worin μ eine mit der Geschwindigkeit q bewegte träge Masse darstellt als die *lebendige Kraft* einer mit der Geschwindigkeit q bewegten *Masse* behandelt und hierdurch »als Folge des *Weber*'schen Gesetzes« findet, »dass in gewissen Fällen bei vorwärts treibender Kraft der Punkt μ rückwärts beschleunigt werde und umgekehrt.« (*Borchardt*'s Journ. Bd. 75. S. 47 und Berichte d. Berl. Akad. 1872. April 18. S. 253.)

Da man jedoch in der analytischen Mechanik ebenso wie in jeder andern Wissenschaft nothwendig zu Widersprüchen gelangen muss, wenn man mit *gleichen* Worten *verschiedene* Begriffe bezeichnet, so darf auch der oben von Herrn *Helmholtz* »als Folge des *Weber*'schen Gesetzes« gefundene Widerspruch nicht überraschen. Denn der Begriff der lebendigen Kraft ist ganz bestimmt durch das Product einer bewegten trägen Masse in das halbe Quadrat derjenigen Geschwindigkeit q definirt, welche diese bewegte Masse μ selber besitzt. Noch unbegreiflicher ist es aber, dass nun Herr *Helmholtz* jenen »die Masse vertretenden Factor« gegen eine gewöhnliche träge Masse »stossen« lässt, und es für möglich hält, dass durch einen solchen Zusammenstoss eines Factors mit einer Masse Bewegungen der letzteren entstehen können, welche nach den Gesetzen des Zusammenstosses zweier gewöhnlichen Massen bestimmbar sein sollen. Dass diese Unbegreiflichkeiten der *Helmholtz*'schen Schlussreihen nicht nur für mich existiren, mögen die folgenden Worte *W. Weber*'s in seiner letzten Abhandlung (*Pogg.* Ann. Bd. 156. p. 26. October 1875.) beweisen:

»Ebenso wenig begreife ich, wie jene Grösse, die eine Masse nur vertrete oder gleichsam eine Masse sei, auf eine andere wirklich vorhandene Masse stossen könne, und wie die Bewegungen derselben nach dem Zusammenstosse aus den Gesetzen bestimmt werden können, welche gelten würden, wenn es sich um wirklich vorhandene mit der Geschwindigkeit q bewegte Massen handelte.«

Indessen fühle ich mich Herrn *Helmholtz* zu aufrichtigem Danke verpflichtet, dass er in seiner Vorrede zum 2ten Theile des erwähnten Werkes in rückhaltloser Weise meine Voraussetzung über den Leserkreis desselben bestätigt hat. Denn nur unter dieser Voraussetzung hielt ich mich für berechtigt, durch

»den Ton sittlicher Entrüstung« zur Beseitigung eines 25jährigen Irrthums meinem Angriffe auf die Autoren und Uebersetzer jenes Werkes den erforderlichen Nachdruck zu verleihen. Herr *Helmholtz* beginnt nämlich seine Vorrede a. a. O. mit folgender Erklärung:

»Wäre das vorliegende Handbuch nur für reif ausgebildete Sachverständige bestimmt; so hätte der *Zöllner*'sche Angriff unbeantwortet bleiben können. Es ist aber auch *wesentlich für Lernende* berechnet, und da *jüngere Leser* durch die überaus grosse Zuversichtlichkeit und den Ton sittlicher Entrüstung, in welchem unser Kritiker seine Meinungen vorzutragen sich berechtigt glaubt, vielleicht irre gemacht werden könnten, halte ich es für nützlich, die gegen die beiden englischen Autoren gerichteten sachlichen Einwendungen so weit zu beantworten, als nöthig ist, damit der Leser sich durch eigene Ueberlegung zurecht zu finden wisse.« (p. V u. VI.)

Mit Dank erfüllt für so unerwartete Bestätigungen aller meiner Anschauungen, mag es mir gestattet sein, die vorliegende Arbeit mit den folgenden Worten zu beschliessen, in welchen ich bereits vor fünf Jahren auf die Bedeutung des *Weber*'schen Gesetzes für den ferneren Fortschritt unserer Naturerkenntniss hingewiesen hatte:

> »In Betreff der ausserordentlichen Fruchtbarkeit dieses Gesetzes auch im Gebiete der Molecularkräfte und chemischen Vorgänge verweise ich sowohl auf die früheren als namentlich auch auf die mehrfach erwähnten neueren Abhandlungen *Weber*'s. In der That man kann sich beim genauen Studium derselben kaum des Gedankens entschlagen, dass die beiden Elektricitäten die fundamentalen Elemente der Materie seien, aus denen sich alle anderen chemischen Elemente unter dem Einflusse gegenseitiger Wechselwirkung mit der Zeit in ähnlicher Weise durch Anpassung an gegebene mechanische Bedingungen gebildet haben, wie die verschiedenen Species der Pflanzen und Thiere durch Anpassung an complicirtere Existenzbedingungen vermittelst der natürlichen Züchtung.« (*Natur der Kometen*, p. 340.)

Berichte d. K. S. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 1876.
Zur Abhandlung v. F. Zöllner.

Fig. 1.

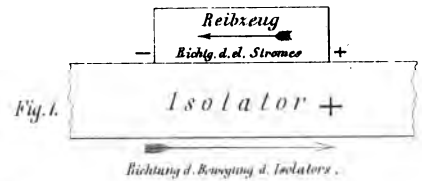


Fig. 2.

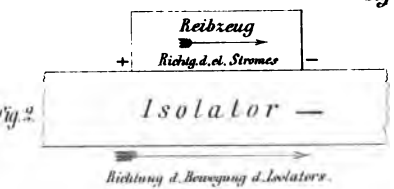


Fig. 3.

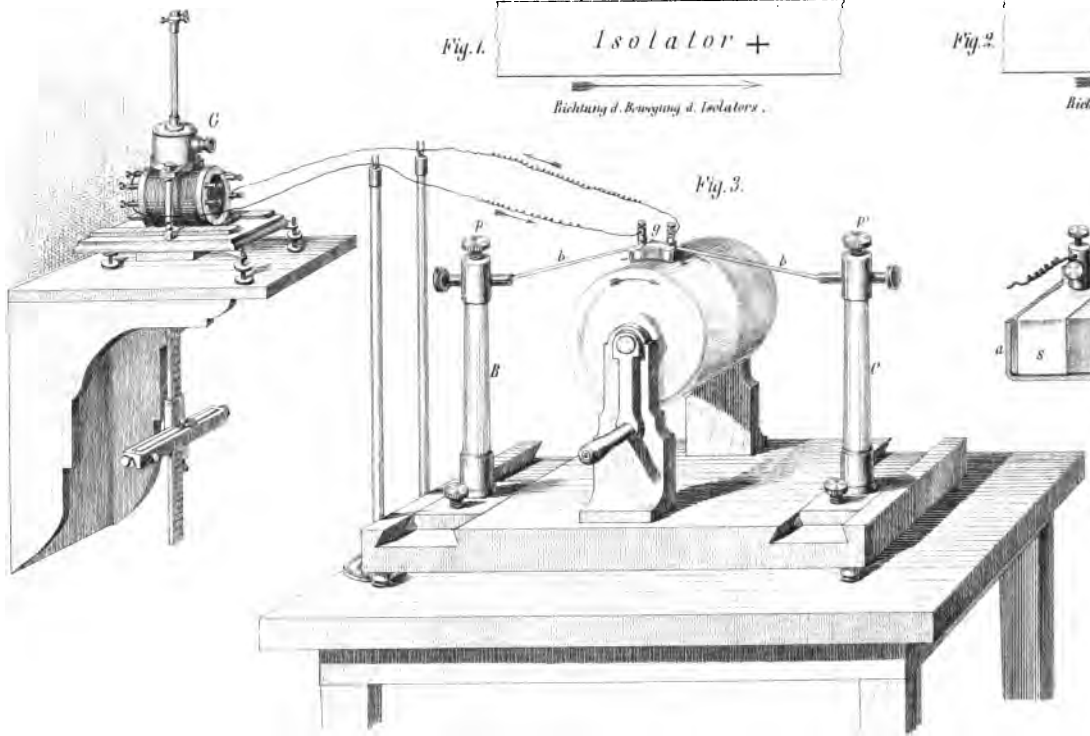
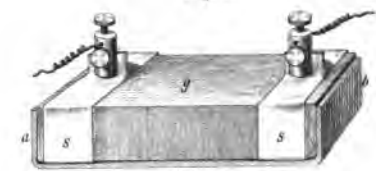


Fig. 4.



nat. Grösse

F. Zöllner, *Zur Widerlegung des elementaren Potentialgesetzes von Helmholtz durch elektrodynamische Versuche mit geschlossenen Strömen.*

Hr. *Helmholtz* hat am 17. Juni 1875 in einer Gesammtsitzung der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin [1]) das in neuerer Zeit von ihm für *Stromelemente* aufgestellte und bisher gegen Einwände von *Bertrand*, *C. Neumann*, *Riecke* und mir vertheidigte Potentialgesetz zurückgezogen. Die Veranlassung hierzu gaben Experimente, deren Princip Hr. *Helmholtz* bereits in *Borchardt*'s Journal für Mathematik Bd. 78, S. 281 angedeutet hatte. Hr. *N. Schiller* hat nun diese Versuche im physikalischen Laboratorium der Universität zu Berlin wirklich ausgeführt und seitdem in Moskau mit vollkommneren Apparaten fortgesetzt. Durch diese Experimente sollte entschieden werden, »ob eine Elektricität ausströmende Spitze die Wirkung eines Stromendes zeige, da die durch Fortbewegung der elektrisch abgestossenen Luft fortgeführte Elektricität möglicherweise nicht als elektrodynamische Fortsetzung der durchströmten Leitung in Betracht kam« (p. 405). Nach Hrn. *Helmholtz* schreibt das Potentialgesetz elektrodynamische Wirkungen nur der in ponderablen Trägern sich bewegenden Elektricität zu, nicht aber der convectiv fortgeführten. Es war also zu versuchen, ob eine Elektricität ausströmende Spitze die Wirkung eines Stromendes zeige, da die durch die Fortbewegung der elektrisch abgestossenen Luft fortgeführte Elektricität möglicher Weise nicht als elektrodynamische Fortsetzung der durchströmten Leitung in Betracht kam.« Es wurde daher bei den erwähnten Versuchen »ein geschlossener Stahlring mit einem Leitungsdrahte umwickelt und magnetisirt.« »Der Ring wurde an einem

1) *Helmholtz*, Versuche über die im ungeschlossenen Kreise durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte. Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1876. Juni 17. p. 404 bis 418.

langen Coconfaden aufgehängt in einem Gehäuse, welches äusserlich ganz mit Stanniol überdeckt wurde, um elektrostatische Anziehungskräfte auszuschliessen.« »Durch eine von aussen genäherte metallene Spitze strömte die gesammte durch eine schnell gedrehte *Holz*'sche Maschine entwickelte Elektricität in die Luft aus. Die Spitze wurde derjenigen Seite des Kastens gegenübergestellt, wo sich immer der eine verticale Theil des Ringes befand. *Der Ring hätte unter diesen Umständen eine Ablenkung erfahren müssen, wenn die Spitze als Stromende im Sinne der Potentialtheorie wirkte. Das Resultat der so angestellten Versuche war aber durchaus negativ.* Hr. *N. Schiller* hat seitdem diese Versuche in Moskau mit vollkommneren Apparaten fortgesetzt, unter Bedingungen, wo die Grösse der Magnetisirung des Ringes und die Intensität des von der Elektrisirmaschine gelieferten Stromes genau bestimmt, und nachgewiesen werden konnte, *dass die nach dem Potentialgesetze zu erwartende Ablenkung gross genug sein würde, um sicher beobachtet werden zu können, wenn sie existirte. Die Resultate waren ebenso rein negativ*« (p. 406).

Aus dem Misslingen dieser Versuche, zu deren Anordnung Hr. *Helmholtz* vom Standpuncte seines *elementaren* Potentialgesetzes geführt worden ist, zieht derselbe den Schluss, »*dass die Potentialtheorie,* wenn in ihr nur die in den Leitern vorkommenden elektrischen Bewegungen und deren Fernwirkungen berücksichtigt werden, *mit den Thatsachen in Widerspruch tritt.*« (p. 412.)

Hr. *Helmholtz* befindet sich daher bezüglich dieses Resultates gegenwärtig in voller Uebereinstimmung mit dem bereits früher von mir durch *andere Versuche* erlangten Ergebniss, dass sein *elementares* Potentialgesetz »*mit den von C. Neumann* und *E. Riecke erwähnten Thatsachen der Beobachtung in Widerspruch treten würde.*«[1])

Man wäre nun berechtigt, diese schöne Uebereinstimmung, zu welcher theoretisch und experimentell so gänzlich verschiedene Wege geführt haben, als ein höchst erfreuliches und für den

1) *Poggendorff*'s Annalen Bd. CLIV. p. 333.

ferneren Fortschritt der Wissenschaft auch erspriessliches Resultat zu betrachten, indem sich gezeigt hat, dass eine, von den bisherigen Gesetzen *Ampère*'s und *Weber*'s abweichende und mit grossem Aufwand von *mathematischem* Scharfsinn entwickelte Theorie zu einem Ergebniss geführt hat, welches »*mit den Thatsachen in Widerspruch tritt.*«

Allein einer solchen Anschauungsweise würde Hr. *Helmholtz* keineswegs seine Zustimmung ertheilen. Denn gleichzeitig mit der Zurücknahme seines Potentialgesetzes erklärt derselbe sämmtliche bisher gegen dasselbe von *C. Neumann*[1]), *Riecke*, *Herwig* u. A. erhobenen Einwendungen einfach als »*nichtige*«. Ebenso nichtig seien alle meine bisherigen Experimente, welche ich theils in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellschaft d. W.[2]), theils in *Poggendorff*'s Annalen[3]) zu dem Zwecke mitgetheilt habe, jenen gegenwärtig von *Helmholtz* selbst erkannten Widerspruch seines Gesetzes mit den Thatsachen zu beweisen, denn, — sagt Hr. *Helmholtz*, — »*alle Versuche, dies durch Untersuchungen an geschlossenen Strömen leisten zu wollen, sind principiell falsch angelegt.*« (p. 403 a. a. O.)

So gern ich daher auch geneigt gewesen wäre, in einer über fünf Jahre hindurch mit so grosser Beharrlichkeit fortgeführten Controverse Herrn *Helmholtz* das letzte Wort zu gestatten, so glaube ich dies doch nach seinen obigen Erklärungen im Interesse einer *wissenschaftlichen* und *definitiven* Klarstellung der obschwebenden Differenz unserer Anschauungen nicht thun zu dürfen.

Zunächst erlaube ich mir zu constatiren, dass Hr. *Helmholtz* bereits selbst anerkannt und zugegeben hat, dass, *unter einer bestimmten Voraussetzung*, »Versuche an geschlossenen Strömen« zur Widerlegung seines *elementaren* Potentialgesetzes *nicht* »principiell falsch angelegt seien.« Diese Voraussetzung besteht darin, dass bei den von *C. Neumann*, *Riecke* und mir angeführten elektrodynamischen Rotationen die den beweglichen

1) Die betreffenden Worte von *Helmholtz* lauten a. a. O. folgendermassen: »Ich brauche wohl kaum daran zu erinnern, dass ich das Potentialgesetz bisher zwar gegen nichtige Einwände vertheidigt habe, aber doch immer nur als ein solches, über dessen Richtigkeit endgiltig nur neue Versuche entscheiden könnten.«

2) Sitzung v. 8. August 1874.

3) *Pogg.* Ann. Bd. 154. p. 321 ff.

Leiter treibende Kraft, in Uebereinstimmung der bisherigen Anschauungen, auf *alle* Elemente des Leiters selber *direct* einwirke. Unter dieser Voraussetzung, welche von *C. Neumann* und *Riecke vor* dem Erscheinen der dritten Abhandlung von *Helmholtz* [1]) als selbstverständlich gemacht wurde, erklärt sich Hr. *Helmholtz* vollkommen damit einverstanden, dass jene *nur mit geschlossenen Strömen* ausführbaren Rotationsversuche zur Widerlegung seines Potentialgesetzes *principiell, richtig angelegt sein würden*, indem er S. 306 a. a. O. wörtlich erklärt:

> »Herr *Riecke* hat recht, dass in diesem Falle das Potential, welches die Kreisströme auf den Radius ausüben, sich bei dessen Bewegung nicht ändert, weil er immerfort in symmetrischer Lage zu ihnen bleibt.«
>
> »An ähnlichen Beispielen hat Herr *C. Neumann* Anstoss genommen [2]) und leugnet deshalb die Anwendbarkeit des von seinem Vater aufgestellten Potentialgesetzes auf Stromelemente.«

Hr. *Helmholtz* sucht nun aber zu beweisen, dass die Herren *C. Neumann* und *Riecke* sich in ihrer Voraussetzung, unter welcher jene Rotationsversuche, wie Hr. *Helmholtz* zugiebt, im Widerspruch mit seinem Potentialgesetze stehen würden geirrt hätten. Es sei vielmehr eine nothwendige Consequenz seines Potentialgesetzes, dass jene von dem Magneten oder dem Solenoïd erzeugten Kräfte, durch welche der bewegliche Leiter in Bewegung gesetzt wird, *nicht direct alle Elemente desselben* afficirten, sondern *nur* diejenigen, welche in der Uebergangsschicht, d. h. in der sogenannten *Gleitstelle* liegen, zwischen dem Ende des starren Leiters und der Flüssigkeit, in welche derselbe eintauchen muss, um bei geschlossenem Strome beweglich zu sein. Nur *diese Elemente* in der Gleitstelle seien es, auf welche die elektrodynamisch vom Magneten ausgeübten Kräfte *direct* wirkten, und hierdurch werde, erst *indirect*, ähnlich wie der Körper einer Locomotive durch den Angriff der treibenden Kraft auf die Räder [3]), der übrige starre Theil des Leiters mit fortgeführt. Dem entsprechend erklärt Hr. *Helmholtz* alle die von *Neumann* und *Riecke* gegen sein Potentialgesetz gemachten

---

1) *Borchardt*'s Journ. für Mathematik. Bd. 78. Heft 4. p. 273—324 und Monatsberichte der Berl. Akademie d. W. 6. Febr. 1878. p. 92—104.

2) Die elektrischen Kräfte. Leipzig 1878. S. 77—79.

3) Diesen Vergleich gestatte ich mir zur Verdeutlichung.

Einwände für *nichtig*, und giebt gleichzeitig ziemlich deutlich zu verstehen, dass beide Herren ebenso wie Herr *Bertrand* in Paris, bei grössrer Gewandtheit in der Mathematik, sich eigentlich selber durch »eine methodische Durchführung des Beweises mit Beseitigung der früheren beschränkenden Annahmen«[1]) aus seinem Potentialgesetze jene Folgerungen hätten ableiten können. Denn, sagt Hr. *Helmholtz*, »die mathematischen Methoden dafür waren durch die früheren Arbeiten gegeben« und es wäre das, was dem vollständigen Beweise des Potentialgesetzes noch fehlte, »jetzt verhältnissmässig leicht zu ergänzen« gewesen. Hr. *Helmholtz* glaubt sich daher auch dem Leserkreise eines so hoch stehenden mathematischen Journales gegenüber zu einer besonderen Entschuldigung verpflichtet, dass er überhaupt für eine solche Arbeit einen Platz in diesem Journale in Anspruch nehme, indem er wörtlich (S. 276 a. a. O.) bemerkt:

> »Die mathematischen Methoden dafür waren durch die früheren Arbeiten gegeben, und ich würde kaum gewagt haben, für eine solche Arbeit den Platz in diesem Journale in Anspruch zu nehmen, wenn nicht die Schwierigkeiten, auf welche die Herren *J. Bertrand*, *C. Neumann* und *Riecke* bei der Anwendung des Potentialgesetzes gestossen sind, und die Einwände, die sie daraus hernehmen zu dürfen glaubten, mir gezeigt hätten, dass eine methodische Durchführung des Beweises mit Beseitigung der früheren beschränkenden Annahmen wünschenswerth und nützlich sein würde.«

Als Resultat dieser methodischen Durchführung des Beweises »ergiebt nun das Potentialgesetz ausser den Kräften von Stromelement auf Stromelement noch weiter:

a) Kräfte zwischen Stromelementen und Stromenden,

b) Kräfte zwischen Stromenden.«[2])

Die unter *b)* angeführten Kräfte sind es nun, welche in ihrer Anwendung auf *Gleitstellen* alle die von *Bertrand*, *C. Neumann* und *Riecke* gegen das *Helmholtz*'sche Potentialgesetz angeführten Bedenken als *nichtige* erscheinen lassen. Denn diese Kräfte zwischen Stromenden an den Gleitstellen erklären voll-

1) Dritte Abhandlung. p. 276.

2) Monatsberichte d. Königl. Akademie d. W. zu Berlin. 6. Febr. 1873. p. 99.

ständig jene elektrodynamischen Rotationen. So bemerkt z. B. Hr. *Helmholtz*, Hrn. *Riecke* gegenüber:

> »Wenn, wie in dem Beispiel von Herrn *Riecke* ein Radius eines Kreises den Strom vom Mittelpuncte desselben, um den er drehbar ist, zur leitenden Peripherie führt, und dabei unter dem Einflusse anderer concentrischer Kreisströme steht, so wirkt, wie Herr *Riecke* richtig bemerkt, *nach dem Potentialgesetz unmittelbar gar keine Kraft auf den festen* Theil des Radius, dessen relative Lage gegen die Kreisströme sich nicht verändert und es kommt allein das Kräftepaar zur Erscheinung, welches auf die Uebergangsschicht an der Gleitstelle wirkt. *Dieses aber bedingt in der That den ganzen Erfolg.*«[1])

Nachdem nun die ganze Controverse in diese Phase der Entwickelung getreten ist, erkennt Hr. *Helmholtz* offenbar mit voller Klarheit, dass das ganze Gebäude seiner Prämissen und mathematischen Deductionen, mit deren Hülfe er sein Potentialgesetz entwickelt hat, nothwendig zusammenbrechen muss, wenn sich Experimente anstellen lassen, welche jene aus dem Potentialgesetze abgeleitete Wirkungsweise der Gleitstellen *schlagend widerlegen*. Denn von nun an, wo der Schwerpunct der ganzen Streitfrage in die *experimentelle Widerlegung der treibenden Kraft in den Gleitstellen* verlegt ist, betont Herr *Helmholtz* bei jeder Gelegenheit in den verschiedensten Formen und Wendungen, wie man sich diese Wirkungsweise der Gleitstellen etwa zu denken und anschaulich zu machen habe. Zum Beweise meiner Behauptung gebe ich hier eine kleine Zusammenstellung dieser characteristischen Erläuterungen.

Hr. *Helmholtz* behauptet nämlich, bei der elektrodynamischen Rotation des beweglichen Leiters seien:

> »*die Vorgänge in der Gleitstelle allein in diesem Falle das Treibende*«[2]) und es wirkte »*unmittelbar gar keine Kraft auf den festen Theil*«[3]) sondern es käme »*allein das Kräftepaar zur Erscheinung, welches auf die Uebergangsschicht an der Gleitstelle wirkt.*«[3]) Vielmehr er-

1) A. a. O. 102.
2) *Borchardt*'s Journal. Bd. 78. p. 306.
3) *Borchardt*'s Journal. Bd. 78. p. 302.
4) Ebendas. p. 302.

gäbe sich aus seinem Potentialgesetze »*dass rotirende Kräfte auf die stromleitenden Flüssigkeitsfäden des Quecksilbers oder der Electrolyten einwirkten, durch welche man dem peripherischen Ende des Bügels den Strom zuleiten muss*« [1]) und nur hierdurch entstände jene Rotation, denn es würden durch jene »*rotirenden Kräfte*« »*die dem Leiter adhärirenden Theile dieser Flüssigkeitsfäden im Sinne der wirklich stattfindenden Rotation fortbewegt und nehmen den festen Leiter mit.*« [2])

Aus allen diesen Erläuterungen geht wohl zur Genüge hervor, welches bedeutende Gewicht Hr. *Helmholtz* selber, und zwar mit vollem Rechte, auf die einzige Stütze seines Potentialgesetzes legt, nämlich auf die aus demselben *mathematisch* deducirte *Mechanik der Gleitstellen*. Nachdem sich daher in dieser greifbaren Gestalt die ganze Controverse um einen bestimmten und experimentell erreichbaren Punct gruppirt und consolidirt hatte, war ich entschlossen, mit Hülfe von *Experimenten* diese endgültige Entscheidung herbeizuführen. Diese Experimente waren daher ausschliesslich nur auf eine Widerlegung der *Helmholtz*'schen Mechanik der Gleitstellen gerichtet. Da jedoch diese Mechanik nur die *einzige* Stütze des *Helmholtz*'schen Potentialgesetzes war, so musste durch eine experimentelle Widerlegung dieser Gleitstellentheorie auch das unzertrennlich mit letzterer verbundene *elementare* Potentialgesetz experimentell widerlegt sein.

Demgemäss wurde von mir zunächst der *Faraday*'sche elektrodynamische Rotationsversuch einfach dahin abgeändert, dass die Enden des beweglichen Bügels nicht, wie gewöhnlich, direct in das Quecksilber tauchten, sondern vermittelst längerer Ketten, die lose in den hakenförmig umgebogenen Enden des beweglichen Bügels lagen, mit dem Quecksilber in leitender Verbindung standen. In diesem Falle befinden sich die wirksamen Gleitstellen, über welche bei der Rotation des Bügels die Kette hinweggleitet, zwischen dem untersten Ringe und der Quecksilberoberfläche, auf welcher derselbe schwimmt. Wären nun bei der elektrodynamischen Rotation des Bügels nach der Gleitstellentheorie von *Helmholtz* »die Vorgänge in der Gleitstelle allein in

1) *Pogg.* Ann. Bd. 158. S. 549.
2) Ebendaselbst S. 549.

diesem Falle das Treibende« und wirkte »unmittelbar gar keine Kraft auf den festen Theil«, so schien es mir nothwendig, dass, — mit Rücksicht auf die im Drehpuncte des Bügels jederzeit zu überwindende Reibung, — der auf dem Quecksilber schwimmende Ring, an welchem sich die Gleitstellen befinden, im Sinne der Rotation vorausgehen müsse, ähnlich wie ein Pferd, wenn es mit Hülfe einer längeren Kette einen Wagen oder die horizontale Axe einer Winde bewegen soll, nothwendig im Sinne der Bewegung dem bewegten Gegenstande *voraus* gehen muss. Auch konnte man an dem von mir beschriebenen Apparate einem Jeden, der dem vorstehenden Satze als keinem mathematisch bewiesenen, seine unbedingte Zustimmung versagen sollte, die Richtigkeit desselben direct durch das Experiment beweisen. Es war zu diesem Zwecke nur erforderlich, die Oberfläche des Quecksilbers durch ein stetig in demselben Sinne fortgesetztes Umrühren in Rotation zu versetzen. Alsdann waren *mechanisch* dieselben Bedingungen realisirt, wie sie Herr *Helmholtz* bei seiner Mechanik der Gleitstellen vorausgesetzt hatte. Denn es wirkt auch bei diesem Experimente, wie nach *Helmholtz* bei elektrodynamischen Rotationen »unmittelbar gar keine Kraft auf den festen Theil« des beweglichen Bügels, sondern es werden nur »die dem Leiter adhärirenden Theile von Flüssigkeitsfäden im Sinne der wirklich stattfindenden Rotation fortbewegt und nehmen den festen Leiter mit.« Demgemäss geht auch in diesem Falle — wie ein angekettetes Pferd dem Wagen oder der von ihm in Rotation gesetzten Winde — der auf dem Quecksilber schwimmende Ring im Sinne der Rotation des Quecksilbers *voraus* und zieht mit Hülfe der Ketten den beweglichen Bügel *nach* sich. Versetzt man nun aber diesen Bügel *elektrodynamisch* in Rotation, so findet stets das *Entgegengesetzte* statt. Der *bewegliche Bügel geht voran* und zieht mit Hülfe der gespannten Kette den auf dem Quecksilber schwimmenden und dort stets etwas adhärirenden Ring im Sinne der Rotation *nach* sich.

Mit Rücksicht sowohl auf diese Versuche als auch auf andere von Herrn *Herwig*[1]) angestellte Experimente behauptet nun Herr *Helmholtz* in seiner Erwiderung, es seien »elektrodynamische Versuche beschrieben worden, welche nach Ansicht ihrer Urhe-

1) *Poggendorff*'s Annalen Bd. 158. p. 202. Eine Modification des elektromagnetischen Drehversuches von *H. Herwig*.

ber geeignet sein sollen, das von Herrn *F. E. Neumann* (dem Vater) aufgestellte und von mir in erweiterter Anwendung durchgeführte Grundgesetz der elektrodynamischen Erscheinungen als unvereinbar mit den experimentellen Erfahrungen darzustellen.«

Da es nun aber weder Herrn *Herwig* noch mir auch entfernt in den Sinn kommen konnte, durch die erwähnten Versuche, »das von Herrn *F. E. Neumann* aufgestellte Grundgesetz der elektrodynamischen Erscheinungen als unvereinbar mit den experimentellen Erfahrungen darzustellen«, wohl aber das von Herrn *Helmholtz* für *Stromelemente* »*erweiterte*« Potentialgesetz, so sah ich mich zur Vermeidung von Missverständnissen genöthigt, in meiner letzten Abhandlung [1]) bei jeder Gelegenheit, wo ich Veranlassung fand, das »*Helmholtz*'sche Potentialgesetz« zu erwähnen, ausdrücklich hinzuzufügen, »*nicht* das *Neumann*'sche Potentialgesetz.« Denn sowohl das *F. E. Neumann*'sche als das *Weber*'sche Grundgesetz der elektrodynamischen Erscheinungen *sind beide direct aus dem Ampère'schen Gesetze abgeleitet*, und zwar letzteres unter Annahme zweier *atomistisch constituirter elektrischer Fluida*. Herrn *Herwig*'s und meine Versuche hatten vielmehr, wie Herr *Helmholtz* doch wissen musste, den ausgesprochenen Zweck, die Richtigkeit des *F. Neumann*'schen Potentialgesetzes in solchen Fällen zu beweisen, wo die *Helmholtz*'sche Gleitstellentheorie, — ohne welche das *elementare* Potentialgesetz zu Widersprüchen mit *F. Neumann*'s Potentialgesetz führt — gar keine Anwendung finden konnte. Deshalb schien es mir nothwendig, wie ich gegenwärtig ausdrücklich bemerke, gegen die möglichen Folgerungen aus einer solchen, mindestens sehr incorrecten, Ausdrucksweise des Herrn *Helmholtz* Vorkehrungen in Form jener stereotyp wiederkehrenden Bemerkung »*nicht* das *Neumann*'sche Potentialgesetz« zu treffen.

Hr. *Helmholtz* wendet nun S. 549 a. a. O. gegen den oben von mir beschriebenen Versuch ein, dass die in Form von Ketten angebrachten beweglichen Theile des rotirenden Bügels »durch die elektrodynamischen Kräfte, denen sie ausgesetzt sind, entsprechend gerichtet werden.« In der Meinung, mich über diese Thatsache zu belehren, fährt Hr. *Helmholtz* mit folgenden Worten fort:

»Da nun bekanntlich ein Magnet einen seiner Längsaxe

---

1) *Pogg.* Ann. Bd. 154. p. 331.

parallel neben ihm herlaufenden Stromleiter nach dem *Ampère*'schen, wie nach dem Potentialgesetze quer gegen seine Längsaxe, das heisst parallel den dem Drahte zugewendeten Seiten seiner Kreisströme, zu stellen sucht, so geschieht das auch in diesem Falle, so, wie es der genannte Autor beobachtet hat.«

Bei dieser Demonstration scheint es nun Hr. *Helmholtz* für ganz gleichgültig zu halten, ob jene Querstellung, welche ein Magnet an einem »seiner Längsaxe parallel neben ihm herlaufenden Stromleiter nach dem *Ampère*'schen wie nach dem Potentialgesetze« hervorruft, durch eine Drehung in dem *einen* oder im *entgegengesetzten* Sinne erfolgt.

Der Sinn dieser Drehung ist aber, bei *constanter Richtung des Stromes* für einen einseitig beweglichen Leiter, von dem Vorzeichen des vorwiegend auf den Leiter einwirkenden Magnetpoles abhängig. Trifft man daher bei einem solchen elektrodynamischen Versuche eine derartige Anordnung, dass die Gleitstellen des beweglichen Bügels, bei *unveränderter Richtung des Stromes im beweglichen Leiter*, in dem einen Falle sich unter dem prävalirenden Einflusse des magnetischen *Nordpoles*, in dem anderen Falle des *Südpoles* befinden, so muss die Richtung, in welcher die von Herrn *Helmholtz* angeführte Querstellung des beweglichen Leitertheiles erfolgt, in beiden Fällen die *entgegengesetzte* sein. Man kann die hierzu erforderlichen Bedingungen sehr leicht durch zwei Quecksilberrinnen realisiren, von denen die eine am *oberen*, die andere am *unteren* Pole des verticalen Magneten angebracht ist, wie dies in den beiden Figuren der beifolgenden Tafel III. dargestellt ist. Wendet man nun bei unveränderten Stromrichtungen nacheinander zuerst einen beweglichen Leiter an, dessen kürzere Enden in die obere Quecksilberrinne tauchen, und hierauf einen Leiter, dessen längere Enden in die untere Rinne tauchen, so beobachtet man in beiden Fällen *trotz der Verschiedenheit des einwirkenden Magnetpoles* eine elektrodynamische Rotation des beweglichen Bügels in *dem gleichen Sinne*.

Nach dem *Helmholtz*'schen Potentialgesetze aber, nach welchem »unmittelbar gar keine Kraft auf den *festen Theil*« des beweglichen Leiters wirkt und »die Vorgänge in der Gleitstelle *allein* in diesem Falle das Treibende sind«, müsste nothwendig in beiden Fällen eine Rotation im *entgegengesetzten Sinne* statt-

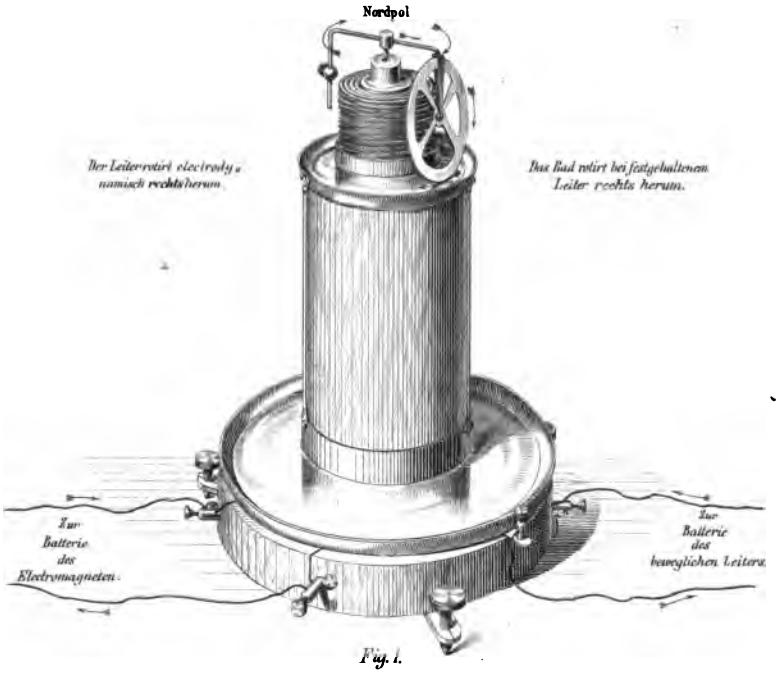


Fig. 1.

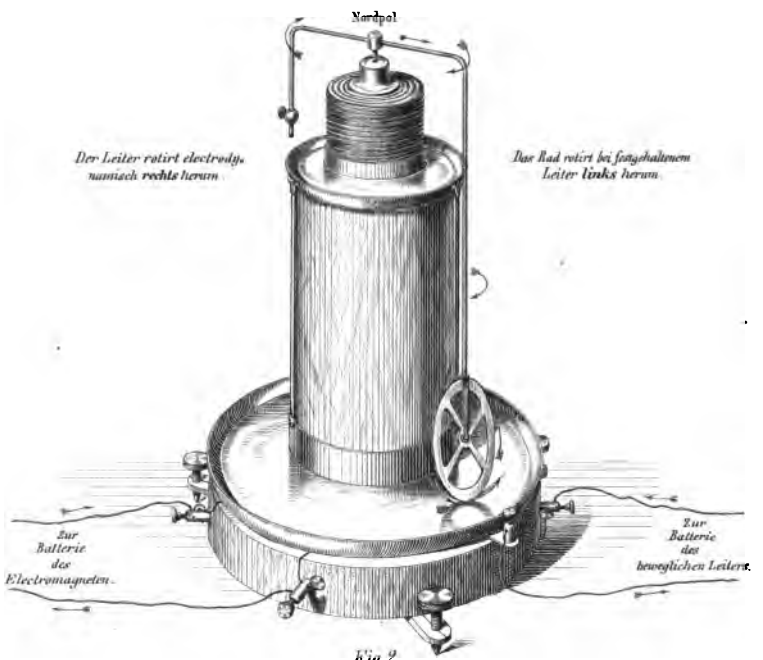


Fig. 2.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

Zur Widerlegung des elementaren Potential-Gesetzes von Helmholtz, durch Versuche mit geschlossenen Strömen.

finden, da die »rotirenden Kräfte«, welche »auf die stromleitenden Flüssigkeitsfäden des Quecksilbers einwirken«, in dem einen Falle unter der Einwirkung des *Nordpoles*, in dem andern Falle, bei *unveränderter Richtung des eintretenden Stromes*, unter Einwirkung des *Südpoles* des Magneten oder Solenoïdes rotiren.

»Da es nun«, wie Hr. *Helmholtz* selber wörtlich bemerkt[1]), »die gleiche drehende Kraft ist, welche auf den beweglichen Draht und auf die stromleitenden Flüssigkeitsfäden wirkt, in die sich sein unteres Ende verlängert«, so müssten auch »die dem Leiter adhärirenden Theile dieser Flüssigkeitsfäden im Sinne der wirklich stattfindenden Rotation fortbewegt« werden und »den festen Leiter mitnehmen«. Die »wirklich stattfindende Rotation« des festen Leiters findet aber bei dem oben von mir beschriebenen Experimente in dem einen Falle gerade in entgegengesetzter Richtung von derjenigen statt, welche ihr durch das *Helmholtz*'sche Potentialgesetz mit Hülfe der Gleitstellenmechanik vorgeschrieben wird. Folglich ist der oben von mir beschriebene Versuch *mit geschlossenen Strömen* ein *experimentum crucis*, welches *eindeutig* und *bedingungslos* den Beweis liefert, dass die vom *Helmholtz*'schen »Potentialgesetze angezeigten Wirkungen der Stromenden nicht existiren« und demgemäss diese »Potentialtheorie mit den Thatsachen in Widerspruch tritt.«

Man kann nun das erwähnte Experiment sehr mannichfach modificiren, und ich habe mich bemüht, eine solche Modification desselben ausfindig zu machen, welche in sehr drastischer Weise die Widersprüche zur Anschauung bringt, zu welchen die von *Helmholtz* aus seinem Potentialgesetze *mathematisch* abgeleiteten Consequenzen in ihrer Anwendung auf die *Wirklichkeit* führen.

Dass die Bewegungsrichtung eines Wagens z. B. einer Locomotive, wenn »unmittelbar gar keine Kraft auf den festen Theil« wirkt, sondern die treibende Kraft direct nur die Räder in Rotation versetzt, und daher die Locomotive nur vermöge der Reibung ihrer Räder auf den Schienen fortbewegt werden kann, so dass »die Vorgänge in der Gleitstelle allein in diesem Falle das Treibende« sind — dass, sage ich, in diesem Falle die *Translo-*

1) *Poggendorff*'s Annalen. Bd. 153. p. 550.

cationsrichtung der Locomotive von der *Rotationsrichtung* ihrer Räder abhängt und unzertrennlich mit ihr verbunden ist, vermag jeder Mensch auch ohne Kenntniss des Princips der Erhaltung der Kraft und der virtuellen Geschwindigkeiten, ohne Weiteres einzusehen und zu prüfen. Wäre aber Jemand in einem bestimmten Falle, z. B. bei geneigter Ebene der Bahn, zweifelhaft, ob die Bewegung der Locomotive vermöge der *direct* auf sie wirkenden Schwerkraft oder vermöge der *indirect* auf die Räder wirkenden Spannkraft des Dampfes fortgetrieben werde, so genügte hierzu ein einfaches Experiment. Der Führer der Locomotive brauchte nur durch abwechselnde Verstellung der Dampfsteuerung die Räder einmal rechts, das andere mal links herum rotiren zu lassen. Zeigte sich hierbei, dass trotz dieser Umkehr der Rotationsrichtung der Räder die Bewegungsrichtung der Locomotive dieselbe bleibt, so würde Jeder hieraus schliessen müssen, dass *nicht* »die Vorgänge in der Gleitstelle in diesem Falle das Treibende sind«, sondern dass vermöge der schiefen Ebene der Bahn und einer etwa durch Glatteis verminderten Friction »der Gleitstellen« auf den Schienen die Locomotive durch die »*unmittelbar* auf den festen Theil« wirkende Componente der Schwerkraft fortgetrieben wird.

Nur diese trivialen Reflexionen sind es, welche *mutatis mutandis* auf den in beifolgender Tafel III dargestellten, und unmittelbar durch die Zeichnung erläuterten Versuch zu übertragen sind, um Jeden davon zu überzeugen, dass, wenn bei festgehaltenem Bügel das kleine Rad in Fig. 1 und Fig. 2 nach entgegengesetzter Richtung, der bewegliche Bügel aber bei *unveränderter Stromrichtung* nach der *gleichen* Richtung rotirt, nothwendig auf den Bügel selbst »unmittelbar« eine Kraft von constanter Richtung ausgeübt werden muss, um diese Rotation der Bügel in gleicher Richtung zu bewirken. Nach *Ampère*'s und *Weber*'s elektrodynamischem Grundgesetze erklärt sich diese Erscheinung auch sehr einfach, indem der obere *horizontale* Theil des Bügels in beiden Fällen unter dem prävalirenden Einfluss des magnetischen Nordpols bleibt.

Ich hatte den beschriebenen Versuch schon in meiner letzten Abhandlung angedeutet[1]) und hätte es bei dieser Andeutung

1) *Poggendorff*'s Annalen. Bd. 154. p. 328. Die wenigen Worte, mit welchen ich bereits an dieser Stelle den obigen Versuch beschrieb, sind folgende:

bewenden lassen, wenn es nicht Hr. *Helmholtz* in seiner neuesten Publication für zweckmässig gehalten hätte, sich in so absprechender Weise über alle von Anderen bisher gegen sein Potentialgesetz erhobene Einwendungen auszudrücken. Es schien mir dies um so nothwendiger, als Hr. *Helmholtz* gleichzeitig die Resultate von selbst erdachten Versuchen mittheilt, durch welche er sich zu der Erklärung genöthigt sieht, »dass die vom Potentialgesetze angezeigten Wirkungen der Stromenden nicht existiren,« [1]) und es ja gerade diese »Wirkungen der Stromenden« waren, auf denen Hr. *Helmholtz* seine ganze Mechanik der Gleitstellen basirt hatte, so dass er, bevor diese Mechanik bekannt war, Hrn. *Riecke* gegenüber bereitwilligst die Beweiskraft elektrodynamischer Rotationsversuche mit *geschlossenen* Strömen gegen sein *elementares* Potentialgesetz anerkannt hatte.

Uebrigens liegt es mir durchaus fern, durch diese Bemerkungen weder die wissenschaftliche Bedeutung der *Helmholtz*'schen Versuche noch die zu ihrer Auffindung erforderliche Erfindungsgabe [2]) irgendwie den Rotationsversuchen gegenüber herabzusetzen.

»Wurden die Ketten oder frei herabhängenden Kupferdrähte, nach Art des *Barlow*'schen Rades, durch leicht bewegliche Scheiben von dünnem Kupferblech ersetzt, so rotirten dieselben bei festgehaltenem Bügel nach entgegengesetzten Richtungen, je nachdem die Einwirkung des oberen oder unteren Magnetpoles überwog, während die Rotation des sich selbst überlassenen Bügels in beiden Fällen nach derselben Richtung erfolgte.« Ich erlaube mir hierbei zu bemerken, dass zur Ausführung des Versuches möglichst kräftige galvanische Ströme anzuwenden sind und ebenso für eine hinreichend geringe Reibung in den Axen der *Barlow*'schen Räder gesorgt werden muss. Der von mir benutzte Apparat erforderte zum Gelingen des Experimentes drei kräftige *Bunsen*'sche Elemente für den Elektromagneten und ebenso viele für den beweglichen Bügel.

1) Da in dem betreffenden Satze diese Erklärung noch an eine Bedingung geknüpft ist, so theile ich die betreffende Stelle hier noch einmal mit: »Daraus ist also zu schliessen, dass entweder die vom Potentialgesetze angezeigten Wirkungen der Stromenden nicht existiren, oder dass ausser den von diesem Gesetze angezeigten elektrodynamischen Wirkungen auch noch solche der convectiv fortgeführten Elektricität bestehen, dass das Potentialgesetz also unvollständig sei, wenn man in ihm nur Rücksicht nimmt auf Fernwirkungen der in den Leitern fortströmenden Elektricität.«

2) Vgl. *Helmholtz*, Vorrede zum 2. Theil des 1. Bandes zu dem Handbuch der theoretischen Physik von *W. Thomson* und *P. G. Tait*. (1874. p. XIV.

NACHTRAG

zur Abhandlung von

F. Zöllner, Ueber die physikalischen Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrodynamischen Erscheinungen.

Wilhelm Weber's Anschauungen von der Existenz eines universellen, *atomistisch* constituirten Mediums und dessen Beziehungen zu den Erscheinungen des Lichtes und der Wärme.

In meiner letzten Abhandlung habe ich bei der Entwickelung einer elektrodynamischen Theorie der Materie mehrfach Gelegenheit gehabt, derjenigen Anschauungen zu gedenken, in welchen zuerst die Vorstellung ausgesprochen worden ist, dass der sogenannte Lichtäther ein *atomistisch* constituirtes Medium sei, dessen letzte Theilchen die *elektrischen* Theilchen sind, deren Eigenschaften vor 30 Jahren von Wilhelm Weber in seiner Abhandlung über »elektrodynamische Maassbestimmungen« *mechanisch* definirt worden sind. Gleichzeitig formulirte ich S. 165 a. a. O. meine eigene Hypothese über die Constitution des Aethers dadurch, dass ich sagte:

> »ich nehme an, *dass der Aether aus einem Aggregate der elektrischen Theilchen* $+e$ *und* $-e$ besteht, welche mit ihren trägen Massen ε und ε' paarweise zu Molecularströmen verbunden sind.«

Hieran schloss sich alsdann (p. 166) unmittelbar der folgende Satz, welcher sich auf das erste Auftreten dieses Gedankens in der wissenschaftlichen Literatur bezieht:

> »Ich erlaube mir nun zunächst zu bemerken, dass die Hypothese von der elektrischen Natur des Lichtäthers nicht neu ist. Der Erste, welcher meines Wissens dieselbe auf Grund exacter Forschungen ausgesprochen hat, ist Carl Neumann. (1856.)«

Ich brauche dem Leser meiner Schriften nicht die Versicherung zu geben, welche hohe Freude mir zu Theil ward, als ich, wenige Tage nach vollendetem Drucke meiner Abhandlung, die

erste Abhandlung Weber's [1]) aus dem Jahre 1846 behufs einer klaren Definition *absoluter* Maassbestimmungen noch einmal durchzusehen genöthigt war, und hierbei die Entdeckung machte, dass Wilhelm Weber am Schlusse seiner fundamentalen Arbeit bereits die Grundzüge dieser Anschauungen in vollkommen klarer und bestimmter Weise ausgesprochen hat und folglich auch hier als derjenige bezeichnet werden muss, welchem mit unbestrittenem Rechte die Priorität aller dieser so fruchtbaren Ideen gebührt, deren Anwendungen ich in meiner letzten Arbeit nur zu erweitern und durch neuere Thatsachen eingehender zu begründen versucht habe.

Weber leitet am Schlusse seiner Abhandlung aus der analytischen Form seines Gesetzes den folgenden Ausdruck ab, für »*die Kraft, mit welcher zwei elektrische Massen auf einander wirken, unabhängig von ihrer relativen Beschleunigung*«:

$$\frac{ee'}{rr - \frac{aa}{8}(e+e')r} \cdot \left(1 - \frac{aa}{16}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{aa}{8}rf\right).$$

Unmittelbar an diesen Ausdruck schliessen sich nun die folgenden Betrachtungen, die ich mir erlaube bei ihrer Wichtigkeit hier vollständig und wörtlich zu reproduciren:

»Hiernach hängt also die Kraft von der Grösse der Massen, von ihrer Entfernung, von ihrer relativen Geschwindigkeit, und ausserdem endlich von derjenigen relativen Beschleunigung f ab, welche ihnen zukommt theils in Folge der Fortdauer der in ihnen schon vorhandenen Bewegung, theils in Folge der von *andern Körpern* auf sie wirkenden Kräfte.«

»Es scheint hieraus zu folgen, dass die *unmittelbare Wechselwirkung zweier elektrischen Massen* nicht ausschliesslich von diesen Massen selbst und ihren Verhältnissen zu einander, sondern auch von der Gegenwart *dritter* Körper abhängig sei.«

»Nun ist bekannt, dass Berzelius eine solche Abhängigkeit der unmittelbaren Wechselwirkung zweier Körper von der Gegenwart eines dritten schon vermuthet hat, und die daraus re-

---

1) W. Weber, Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächs. Ges. der Wissenschaften, Leipzig 1846. Die sämmtlichen bis zum Jahre 1871 in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Ges. publicirten Abhandlungen Weber's sind in *einer* vereinigt bei S. Hirzel in Leipzig erschienen.

sultirenden Kräfte mit dem Namen der *katalytischen* bezeichnet hat. Bedienen wir uns dieses Namens, so kann hiernach gesagt werden, dass auch die *elektrischen Erscheinungen* zum Theil von *katalytischen* Kräften herrühren.«

»Diese Nachweisung *katalytischer* Kräfte für die *Elektricität* ist jedoch keine *strenge* Folgerung aus dem gefundenen elektrischen Grundgesetze. Sie würde es nur dann sein, wenn man mit diesem Grundgesetze nothwendig die *Idee* verbinden müsste, dass dadurch nur solche Kräfte bestimmt wären, welche elektrische Massen aus der Ferne *unmittelbar* auf einander ausübten. Es lässt sich aber auch *denken*, dass die unter dem gefundenen Grundgesetze begriffenen Kräfte zum Theil auch solche Kräfte sind, welche zwei elektrische Massen auf einander *mittelbar* ausüben, und welche daher *zunächst* von dem *vermittelnden Medium*, und *ferner* von allen *Körpern*, *welche auf dieses Medium wirken*, abhängen müssen. Es kann leicht geschehen, dass solche *mittelbar* ausgeübten Kräfte, wenn sich das vermittelnde Medium unserer Betrachtung entzieht, als *katalytische Kräfte erscheinen*, wiewohl sie es nicht sind. Man müsste wenigstens, um in solchen Fällen von *katalytischen* Kräften zu sprechen, den Begriff von *katalytischer* Kraft wesentlich modificiren. Man müsste nämlich unter *katalytischer* Kraft eine solche *mittelbar* ausgeübte Kraft verstehen, welche sich nach einer *allgemeinen Regel* bestimmen lässt, durch eine gewisse Kenntniss von den Körpern, deren Einflüssen das *vermittelnde* Medium unterworfen ist, jedoch ohne Kenntniss dieses *Mediums selbst*. Das gefundene elektrische Grundgesetz giebt eine allgemeine Regel zur Bestimmung *katalytischer* Kräfte in diesem Sinne.«

»Eine andere noch nicht entschiedene Frage ist es aber, ob nicht die Kenntniss des *vermittelnden* Mediums zur Bestimmung der Kräfte, wenn auch nicht nothwendig, doch *nützlich* sein würde. Die allgemeine Regel zur Bestimmung der Kräfte liesse sich nämlich vielleicht noch *einfacher* aussprechen, wenn das vermittelnde Medium in Betracht gezogen würde, als es ohnedem in dem *hier aufgestellten elektrischen Grundgesetze* möglich war. Die *Erforschung des vermittelnden Mediums*, die vielleicht noch über viele andere Dinge Aufschluss geben würde, ist selbst nun aber zur Entscheidung dieser Frage nöthig.«

»Die *Idee von der Existenz* eines solchen vermittelnden Mediums findet sich schon in der *Idee des überall verbreiteten*

elektrischen neutralen Fluidums vor, und wenn sich auch dieses *neutrale Fluidum*, ausser in den Conductoren, den bisherigen Beobachtungen der Physiker fast gänzlich entzogen hat; so ist jetzt doch Hoffnung, dass es gelingen werde, über dieses allgemein verbreitete Fluidum auf mehreren neuen Wegen näheren Aufschluss zu gewinnen. Vielleicht kommen in anderen Körpern, ausser den Conductoren, keine Strömungen, sondern nur *Schwingungen* vor, die man erst künftig mit den Art. 16 erörterten Mitteln genauer wird beobachten können.«

»Ferner brauche ich nur an FARADAY's neueste Entdeckung des Einflusses *elektrischer Strömungen auf Lichtschwingungen* zu erinnern, welche es nicht unwahrscheinlich macht, dass das überall verbreitete elektrische neutrale Medium selbst derjenige überall verbreitete Aether sei, welcher die Lichtschwingungen mache und fortpflanze, oder dass wenigstens beide so innig mit einander verbunden seien, dass die Beobachtungen der Lichtschwingungen Aufschluss über das Verhalten des elektrischen neutralen Mediums zu geben vermöchten.«

»Auf die Möglichkeit einer *mittelbaren* Wirkung der elektrischen Massen auf einander hat, wie in der Einleitung S. 214 angeführt worden ist, schon AMPÈRE aufmerksam gemacht, »»wonach nämlich die *elektrodynamischen Erscheinungen* den von den elektrischen Strömen *dem Äther mitgetheilten Bewegungen*«« zuzuschreiben wären. AMPÈRE erklärt aber selbst die Prüfung dieser Möglichkeit für eine ausserordentlich schwierige Untersuchung, der er sich zu unterziehen keine Zeit gehabt habe.«

»Sollten auch neue Aufschlüsse der Erfahrung, wie sie z. B. aus weiterem Verfolg der nach Art. 16 über *elektrische Schwingungen* auszuführenden Versuche, und aus der FARADAY'schen Entdeckung vielleicht hervorgehen werden, vorzüglich geeignet erscheinen, um die von AMPÈRE nicht überwundene Schwierigkeiten allmählig zu beseitigen, so dürfte doch dabei auch das elektrische Grundgesetz in der hier gegebenen, von dem vermittelnden Medium unabhängigen Form einen nicht unwichtigen Anhaltspunct gewähren, um dieses Gesetz auch in anderer, von dem vermittelnden Medium abhängigen, Form auszudrücken.«

Im Anschluss an das Vorstehende erlaube ich mir einen Abschnitt aus einer 16 Jahre späteren Arbeit WILHELM WEBER's [1]) wörtlich mitzutheilen, welcher »*über die Umsetzung der Stromarbeit in Wärme*« handelt, und das für mich characteristische Merkmal einer jeden wahren Theorie am deutlichsten zeigt, nämlich jene überraschende Constanz und consequente Fortentwickelung einer *fundamentalen* Conception. Es steht diese Eigenthümlichkeit *aller* WEBER'schen Arbeiten in einem schneidenden Contrast zu den neueren englischen Theorien, welche im Zeitraume weniger Jahre von einem Extrem in's andere fallen und so durch ihre unstete und ephemere Existenz auch den weniger tief in dieselben Eindringenden den Mangel an *fundamentalen* mechanischen Principien verrathen. Es handelt sich im Folgenden, wie man sehen wird, im Wesentlichen um die von WILHELM WEBER in seiner letzten Arbeit [2]) ausgesprochene Ansicht, dass diejenigen Theilchen, deren lebendige Kraft von uns als Wärme der Körper bezeichnet wird, keine anderen Theilchen als die elektrischen Theilchen $+e$ und $-e$ mit ihren trägenMassen ε und ε' sind. Da WEBER in der zuletzt erwähnten, 13 Jahre später (1875) publicirten Arbeit, auf seine frühere gar nicht verweist, und dessen ungeachtet bereits in dieser Abhandlung, wie man sehen wird, die mechanische Ableitung des Gesetzes von JOULE und LENZ aus den Principien seiner Hypothese fast vollständiger als in seiner letzten Abhandlung giebt, so musste es bei nicht ganz genauer Kenntniss *aller* WEBER'schen Abhandlungen den Schein erwecken, als sei dieser Gedanke von WEBER erst vor einem Jahre ausgesprochen worden. Ich selber habe dies geglaubt und beeile mich durch die folgende wörtliche Reproduction des betreffenden Artikels diese Meinung zu berichtigen. Indessen glaube ich, dass diese von meiner Hauptarbeit gesonderte Mittheilung dieser Stellen sich dadurch noch als besonders zweckmässig empfiehlt, dass der Inhalt derselben hierdurch in grösserer Vollständigkeit und in grösserem Zusammenhange reproducirt werden kann.

---

1) Zur Galvanometrie von WILHELM WEBER, Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. X 1862, p. 91. §. 33.

2) Ueber die Bewegungen der Elektricität in Körpern von molecularer Constitution. Poggendorff's Annalen, Bd. 156 p. 30.

» Ueber die Umsetzung der Stromarbeit in Wärme. «

»Die Stromarbeit ist an die Bewegung der elektrischen Fluida geknüpft; die Wärme ist, nach der mechanischen Wärmetheorie, ebenfalls an die Bewegung eines Körpers gebunden, den man aber von den elektrischen Fluidis zu unterscheiden pflegt. Eine nähere Einsicht in die Art und Weise, wie Stromarbeit in Wärme umgesetzt werde, fordert daher zunächst, dass die Bewegungen der elektrischen Fluida bis zu Ende genau verfolgt werden, um die Verhältnisse kennen zu lernen, unter welchen der Uebergang der Bewegung der elektrischen Fluida in die Bewegung eines anderen Mediums statt finde. Hiebei dürfte die ideale Annahme von der Superposition mehrerer im Raume des Leiters stetig und gleichförmig vertheilter Substanzen, nämlich der ponderabelen Substanz des Leiters, der beiden elektrischen Fluida und ausserdem noch die eines sogenannten Wärmemediums, so angemessen sie für viele andere Zwecke sein möge, wo es sich um Fernwirkungen handelt, nicht zulässig erscheinen, vielmehr leuchtet hiebei leicht die Nothwendigkeit ein, die ponderable Substanz des Leiters in einzelnen Moleculen concentrirt anzunehmen, die von elektrischen Theilen umgeben sind, welche sich im Falle eines Stromes von einem Molecule zum andern fortbewegen. Die Trennung eines elektrischen Theilchens von einem Molecule muss dann, der verschiedenen Grösse der elektromotorischen Kraft gemäss, von welcher der Strom hervorgebracht wird, bald langsamer bald schneller erfolgen, wovon die Zahl der in einer gewissen Zeit sich vom Molecule trennenden elektrischen Theilchen abhängt. Die Arbeit jedes elektrischen Theilchens bei der Trennungsbewegung, in Folge der von dem Molecule darauf ausgeübten Kräfte, möge nun von der Schnelligkeit der Trennung abhängig sein oder nicht; stets wird eine entgegengesetzt gleiche Arbeit von demselben Theilchen bei seiner Vereinigungsbewegung mit dem folgenden Molecule verrichtet werden, so dass diese beiden Arbeitsgrössen einander compensiren. Sobald aber das elektrische Theilchen von dem ersteren Molecule getrennt ist, wird es, getrieben von der elektromotorischen Kraft f, den Zwischenraum α bis zum zweiten Molecule durchlaufen und dabei also die Arbeit $f\alpha$ verrichten. Die Summe aller dieser Arbeitsgrössen, $\Sigma f\alpha$, bildet die ganze Stromarbeit im Leiter. Jedes elektrische Theilchen tritt daher

mit einer um den mit $f\alpha$ äquivalenten Werth vergrösserten lebendigen Kraft in das Bereich des folgenden Molecules ein, als es aus dem Bereich des vorhergehenden Molecules ausgetreten war, wodurch also der Werth der lebendigen Kräfte im Bereich aller Molecule zusammen genommen um einen mit der ganzen Stromarbeit äquivalenten Betrag vergrössert werden muss. Eine solche der Stromarbeit äquivalente Vergrösserung der lebendigen Kräfte in allen Moleculen zusammen genommen ist nun aber, nach der mechanischen Wärmetheorie, auch die vom Strome im Leiter erzeugte Wärme, und es fragt sich nur, ob sie mit jener ganz identisch ist, d. h. ob sie in der fortdauernden Bewegung jener elektrischen Theilchen selbst besteht, oder ob die jedem Molecule zugeführte Bewegung von den elektrischen Theilchen, welche sie mitbrachten, auf andere Körpertheilchen, z. B. auf die im Bereiche desselben Molecules befindlichen Theilchen eines besondern Mediums übertragen werde und erst nach dieser Uebertragung als Wärme hervortrete, wo dann die Gesetze der Uebertragung zu erforschen und nähere Rechenschaft darüber zu geben sein würde, warum dieselbe lebendige Kraft erst dann als Wärme hervortritt, wenn sie an die Theilchen des Wärmemediums, statt an elektrische Theilchen, geknüpft ist.«

»Man sieht leicht ein, dass die Behauptung einer solchen Uebertragung der von elektrischen Theilchen mitgebrachten lebendigen Kraft auf die Theilchen eines andern im Bereiche des Molecules befindlichen Mediums nicht unerhebliche Schwierigkeiten findet, vorzüglich darum, weil danach consequenter Weise jede Fortdauer einer Bewegung der elektrischen Theilchen im Bereiche eines solchen ponderabelen Molecules abgeleugnet werden müsste. Wenn die elektrischen Theilchen, welche die Stromarbeit mit sich führen, beim Eintritt in das Bereich eines ponderabelen Molecules die mitgebrachte Stromarbeit sofort, und zwar nicht blos theilweise, sondern ganz und gar, an andere materielle Theilchen (an die Theilchen des Wärmemediums) abtreten müssen; so muss aus gleichem Grunde überhaupt jede den elektrischen Theilchen im Bereiche ponderabeler Molecule ertheilte Bewegung, gleichgültig woher sie rühren möge, ihnen sofort wieder entzogen werden, so dass gar keine *beharrende Bewegung elektrischer Theilchen* im Bereiche ponderabeler Molecule möglich wäre. Sogar die Möglichkeit des elektrischen Stromes im ponderabelen Körper würde dadurch zweifelhaft werden;

denn ein elektrisches Theilchen, wenn es auch von noch so grossen elektromotorischen Kräften getrieben würde, könnte in eine grössere Bewegung gar nicht gerathen, wenn jede Bewegung im Entstehen sofort von ihm an die Theilchen des Wärmemediums übertragen würde.«

»Es leuchtet hieraus ein, dass die Behauptung der Uebertragung aller Stromarbeit auf das Wärmemedium ponderabeler Molecule vor Allem mit der Behauptung von der Existenz *beharrlicher elektrischer Molecularströme*, wie sie zuerst von AMPÈRE aufgestellt worden, in totalem Widerspruch steht. Wer also mit AMPÈRE die wirkliche Existenz zweier magnetischen Fluida leugnet und dadurch zur Behauptung *beharrlicher elektrischer Molecularströme* genöthigt wird, darf jene Uebertragung nicht zugeben, und er braucht sie um so weniger zuzugeben, weil gar nichts angeführt werden kann, was durch eine solche Uebertragung gewonnen würde. Wenigstens nach der mechanischen Wärmetheorie leuchtet ein, dass in Beziehung auf die Wärme principiell *unmittelbar* gar nichts anderes als die in den Moleculen vorhandene lebendige Kraft in Betracht kommt, für welche die Beschaffenheit ihres materiellen Trägers indifferent ist. Nur *mittelbar* könnte nach der mechanischen Wärmetheorie die Beschaffenheit des materiellen Trägers der das Wesen der Wärme bildenden lebendigen Kraft in Betracht kommen, nämlich in sofern als die Kräfte der Wechselwirkung der Theilchen dieses Trägers, theils unter einander, theils mit andern Theilchen, und folglich die Uebertragungs- oder Fortpflanzungsgesetze (die Gesetze der Wärmestrahlung, der Temperaturmittheilung und der Temperaturausgleichung unter verschiedenen ponderabelen Moleculen), davon abhängig wären.«

»Ist auch der *Wärmeäther im leeren Raume* durch die ihm, gleich dem Lichtäther, zugeschriebenen Gesetze der Wellenfortpflanzung wenigstens indirect definirt, und kann von seiner Existenz und Verbreitung, auch im Innern der ponderabelen Körper, in den leeren Räumen zwischen den Moleculen, ohne die ganze Wellentheorie der strahlenden Wärme zu verwerfen, nicht abstrahirt werden; so findet doch zwischen den ponderabelen Körpermoleculen (mit Allem was in ihrem Bereiche liegt und dazu gehört) und jenem Aether keine weitere Beziehung statt, als dass *einerseits* die Wellenerregung im Aether (die Wärmestrahlung), *andererseits* die Wellendämpfung (die Wärme-

absorption) von den ponderabelen Moleculen ausgehen muss, wozu aber in den Moleculen ebensowenig ein besonderes Wärmemedium nöthig ist, wie im Metall der Glocke, welche Schallwellen durch das Luftmedium aussendet, Luft enthalten zu sein braucht.«

»Alle diese Betrachtungen lassen sich auf folgende Weise kurz zusammenfassen. Da eine Temperaturerhöhung der ponderabelen Molecule nach der mechanischen Wärmetheorie eine Zunahme der lebendigen Kraft in den Moleculen fordert, da diese Zunahme der lebendigen Kraft durch die mit grösserer Geschwindigkeit in das Bereich der Molecule eintretenden, mit geringerer Geschwindigkeit wieder austretenden elektrischen Theilchen, welche den Strom bilden, gegeben ist, da ferner diese Zunahme an lebendiger Kraft *nach der Theorie beharrlicher elektrischer Molecularströme*, während die Theilchen im Bereich der Molecule sich befinden, ungeschwächt *beharrt;* so scheint von einer *Umsetzung* von Stromarbeit in Wärme gar nicht die Rede sein zu können, sondern die in den Moleculen angesammelte *Stromarbeit* scheint danach selbst als die in den Moleculen enthaltene *Wärme* betrachtet werden zu müssen.«

»Es leuchtet freilich ein, dass alsdann die Gesetze der unter dem Namen *Wärmestrahlung* und *Wärmeabsorption* zusammengefassten Beziehungen zwischen der um die einzelnen Molecule in beharrlicher Molecularströmung befindlichen Elektricität und dem im umgebenden Raume befindlichen Wärmeäther noch einer näheren, auf der Natur beider Medien beruhenden, Begründung bedürfen; einer eben solchen Begründung würden aber jene Gesetze auch bedürfen, wenn man das sogenannte Wärmemedium an die Stelle der Elektricität setzte. Während nun im letzteren Falle eine solche Begründung gar nicht einmal versucht worden ist, so kann man doch, was den ersteren Fall betrifft, die scharfsinnige von C. Neumann ausgeführte Untersuchung: *Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur.* Halis Saxonum, 1858, als einen solchen ersten Versuch anführen; denn es leuchtet ein, dass das, was Neumann von den Beziehungen zwischen beharrlichen elektrischen Molecularströmen und Lichtäther sagt, in ähnlicher Weise auch auf die Beziehungen zwischen beharrlichen elektrischen Molecularströmen und Wärmeäther Anwendung finden werde.«

»Zwar hat NEUMANN nach seinen Prämissen gefunden, dass keine Einwirkung elektrischer Molecularströme auf *ruhende Aethertheilchen* statt finden könne; es ist aber dabei zu beachten, dass diese Prämissen, dem Zwecke der NEUMANN'schen Untersuchung gemäss, welcher auf die Einwirkung der Molecularströme auf die schon vorhandenen, mitten zwischen den Moleculen durch den Aether fortgepflanzten, Wellenzüge beschränkt war, sich zwar auf Wirkungen der Molecularströme in sehr kleinen Entfernungen bezogen, doch aber noch immer die Zulassung einer *idealen* Vorstellung von den Molecularströmen gestatteten, wonach dieselben als eine *Superposition entgegengesetzt gleicher Ströme positiver und negativer Elektricität* betrachtet werden, was aber offenbar nicht gestattet ist, wenn es sich um die Erregung neuer Wellenzüge durch die elektrischen Molecularströme handelt, welche nur in der an die Molecularströme *unmittelbar angrenzenden Aetherschicht* statt finden kann. Für diese Aetherschicht dürfen die in entgegengesetzter Richtung sich bewegenden positiven und negativen elektrischen Theilchen nicht mehr als zusammenfallend betrachtet werden. Denkt man sich dann also z. B. das negative Fluidum mit dem Molecule als fest verbunden, und das positive Fluidum allein in Molecularströmung begriffen, oder umgekehrt (eine Vorstellungsweise, welche sich dadurch empfiehlt, dass sie mit der Beharrung der Molecularströme ohne elektromotorische Kräfte bestehen kann), so leuchtet ein, dass die Verschiedenheit in Lage und Verhalten beider elektrischen Fluida im Bereiche des Molecules zwar schon bei sehr geringen Entfernungen (wie sie NEUMANN betrachtet) nicht mehr beachtet zu werden braucht, worauf die Zulässigkeit jener *idealen* Vorstellung von den Molecularströmen beruht; dass sie doch aber für die *unmittelbar angrenzende Aetherschicht* von Bedeutung sein kann, zumal wenn das in Molecularströmung befindliche elektrische Fluidum *nicht stetig und gleichförmig* um das Molecule vertheilt wäre.«

»Findet dann aber wirklich eine Störung des Gleichgewichts in der *unmittelbar angrenzenden Aetherschicht*, folglich eine Erregung von Aetherwellen statt; so leuchtet ein, dass dieselbe mit jedem Umlauf der Elektricität um das Molecule sich wiederholen, also die *Wellendauer* mit der *Umlaufszeit der elektrischen Theilchen* im Molecularstrome übereinstimmen muss. Bei *leuchtenden Moleculen* ist aber die Wellendauer der von ihnen ausge-

sandten Wellenzüge aus optischen Versuchen genau bekannt; es würde also, wenn die angenommene Relation zwischen elektrischen Molecularströmen und dem Lichtäther, nach Neumann's Idee, sich bestätigte, hienach möglich werden, aus optischen Versuchen über das Verhalten der die Molecularströme bildenden Elektricität nähere Auskunft zu erhalten. — Jedenfalls ist die Neumann'sche Untersuchung schon in ihrer ersten Entwickelung für die Optik, *zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene durch galvanische und magnetische Kräfte*, so erfolgreich gewesen, dass man hoffen darf, dass die weitere Verfolgung und Ausbildung der Theorie beharrlicher elektrischer Molecularströme in ihren Beziehungen zum Licht- oder Wärmeäther und seiner Wellenbewegung zu noch vielen andern, den so wichtigen und noch so wenig erforschten Zusammenhang zwischen *Elektricität*, *Wärme* und *Licht* betreffenden, Aufschlüssen führen werde.«

Verzeichniss von Druckfehlern.

Seite	107	11.	Zeile	von	oben	lies:	*ullo pacto*	statt:	*illo pacto*
„	109	6.	„	„	unten	„	*fundamenta*	„	*fundamentum*
„	134	1.	„	„	oben	„	$\alpha : e$	„	$\alpha - e$
„	173	5.	„	„	„	„	*effects*	„	*effectes*.

Übersicht des Inhaltes.

I. Ueber die physikalischen Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrodynamischen Erscheinungen.

Paragraph — Erster Theil. — Seite

1. Experimenteller Beweis für die Existenz elektrischer Ströme während der gleitenden Reibung zweier Körper. Allgemeines Gesetz dieser Ströme 60
2. Quantitative Bestimmungen der bei diesen »Reibungsströmen« sich ausgleichenden Elektricitätsmengen 64
3. Modification der Experimente. Beweis der Allgemeinheit des Phänomens 70
4. Beziehungen der Reibungsströme zu den Diaphragmenströmen. Identität der diesen Erscheinungen zu Grunde liegenden Ursache 77
5. Experimenteller Beweis für die Gleichartigkeit der Reciprocitätsphänomene bei beiden Gattungen von Strömen 82
6. Genauere Untersuchung der durch strömende Elektricität in Flüssigkeiten erzeugten Bewegungen. Allgemeines Gesetz 86

Zweiter Theil.

7. Analogie des gefundenen Gesetzes mit dem Inductionsgesetze bei der Bewegung eines stromdurchflossenen Leiters. Die gleitende Reibung ein Inductionsphänomen in molecularer Distanz der Körper. Die Erscheinungen der elektrodynamischen Dämpfung und magnet-elektrischen Licht- und Wärmeentwickelung betrachtet als Wirkungen einer Reibung *in distans* 95
8. Kritische Erörterungen über die physikalische Atomistik. Stellen aus der Vorrede zu *Newton*'s Principien von *Roger Cotes* 101
9. Das Molecül als ein Aggregat von *Ampère*'schen Molecularströmen. Atome und Molecüle 114
10. Die Hypothese perpetuirlicher Molecularströme und ihre Beziehung zur Atomistik. *W. Weber*'s Theorie des Diamagnetismus. *C. Neumann*'s Theorie der magnetischen Drehung der Polarisations-Ebene 119
11. Die Adhäsion und Cohäsion als elektrodynamische Wirkungen der Molecularströme der Körper. *Stefan*'s Versuche über scheinbare Adhäsion. *O. E. Meyer*'s Versuche und *Maxwell*'s Hypothese über die Reibung der Gase. Ableitung der allgemeinen Gesetze aus der elektrodynamischen Moleculartheorie 130
12. Die allgemeinen Gleichungen der analytischen Hydrodynamik und ihre physikalische Begründung durch die elektrodynamische Moleculartheorie. 144
13. Beziehungen des allgemeinen Inductions-Gesetzes zu dem Gesetze für die Interpretation unserer Sinnesempfindungen. Ursprung der dritten Dimension des Raumes. Andeutungen über einen Raum von vier Dimensionen und die Auflösung von Antinomien 147

Paragraph Seite

14. Der galvanische Leitungswiderstand von Elektrolyten und Metallen. Versuche von *Kohlrausch* und *Grotrian*. *Faraday*'s Beweis für die Identität der chemischen und elektrischen Kräfte. *W. Weber*'s Ableitung des Gesetzes von *Lenz* und *Joule* aus der atomistischen Elektricitätstheorie 153

15. Anwendung der elektrodynamischen Moleculartheorie zur Erklärung des Verhaltens der Körper zur Wärme. Die Schwingungen des Lichtes und der strahlenden Wärme identisch mit inducirten elektrischen Strömen. Arbeiten von *C. Neumann*, *B. Riemann*, *L. Lorenz*. Absorption des Lichtes. Die mechanischen Wirkungen des Lichtes. Versuche von *Fresnel*, *Mark Watt*, *Muncke*, *Lenz*, *Crookes*, *Bergner*. Erklärung dieser Erscheinungen durch die elektrodynamische Theorie der Materie 164

16. Einfluss der Gase auf den Charakter der Erscheinungen. Uebertragung von lebendiger Kraft durch Strahlung und Leitung. Versuche von *Kundt*, *Warburg*, *Winkelmann*. Nachweis elektrischer Ströme, welche durch Bestrahlung erzeugt werden. Versuche von *Becquerel*, *Grove*, *Hankel*. Die Versuche von *A. Bergner* über die Anziehung und Abstossung durch Wärme und Licht und die Abstossung durch Schall 176

17. Aenderung des Leitungswiderstandes durch Bestrahlung. Erklärung der Versuche von *Smith*, *Sale* und *Siemens* über den Einfluss des Lichtes auf den Leitungswiderstand des Selens. Die elektrodynamische Theorie des Lichtes und ihre Bestätigung durch Versuche von *Boltzmann*. *Maxwell*'s elektrodynamische Erklärung der mechanischen Wirkungen des Lichtes. *Maxwell*'s numerische Berechnung des mechanischen Druckes, welchen ein Sonnenstrahl erzeugt. Vergleichung dieser Berechnung mit quantitativen Bestimmungen von *Crookes* 182

18. *Maxwell*, *Thomson* und *Helmholtz* über die Atomistik. *Newton*'s Brief an *Bentley*. *Cotes* und *Sir John Herschel* über die Erklärung der Fernwirkungen durch ein Medium. Das *Faraday-Maxwell*'sche Medium und seine »*Stress*« 191

19. Die *Newton*'sche Gravitation in ihrer Beziehung zur statischen Elektricität. Ableitung der allgemeinen Gravitation und der elektrischen Fernewirkung der Weltkörper aus der elektrodynamischen Theorie der Materie. Die elektrische Energie der Körper. Numerische Bestimmung der Differenzen zwischen dem attractiven und den beiden repulsiven Potentialen der statischen Elektricität . . 200

20. Aehnliche Ideen *Mosotti*'s. »*L'attraction universelle elle même peut découler comme une déduction des principes qui règlent les forces électriques*« (1836). Anwendungen des *Weber*'schen Gesetzes in der Astronomie. *Seegers* (1864). *Scheibner* (1871). *Tisserand* (1872) 214

21. Zur Geschichte des *Weber*'schen Gesetzes 217

II. Zur Widerlegung des elementaren Potentialgesetzes von *Helmholtz* durch elektrodynamische Versuche mit geschlossenen Strömen.

Nachtrag 240

Carl Neumann, *Zwei Sätze über correspondirende Flächenelemente.* (Das Manuscript wurde eingereicht am Tage der Sitzung.)

Setzt man zwischen den Puncten x, y, z und ξ, η, ζ die Correspondenz fest:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \xi = \varphi(x, y, z), \\ \eta = \psi(x, y, z), \\ \zeta = \chi(x, y, z), \end{cases}$$

wo φ, ψ, χ gegebene Functionen sein sollen, und versteht man unter dt und $d\tau$ zwei correspondirende *Raum*elemente, so findet bekanntlich die Relation statt:

$$(2.) \qquad \frac{d\tau}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\xi}{\partial z} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} & \frac{\partial\zeta}{\partial y} & \frac{\partial\zeta}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Ein ähnlicher Satz gilt für zwei correspondirende *Flächen*elemente ds und $d\sigma$. Sind nämlich a, b, c die Richtungscosinus der Normale von ds, und α, β, γ die Richtungscosinus der Normale von $d\sigma$, so findet die Relation statt:

$$(3.) \qquad \frac{d\sigma}{ds} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} & \frac{\partial\xi}{\partial z} & \alpha \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z} & \beta \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} & \frac{\partial\zeta}{\partial y} & \frac{\partial\zeta}{\partial z} & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Ohne auf den Beweis dieses Satzes (3.) hier näher einzugehen, will ich nur bemerken, dass derselbe angewendet werden kann, um den analytischen Ausdruck für das *Gauss'sche Krümmungsmaass* einer gegebenen Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

zu entwickeln. In diesem Falle sind offenbar die allgemeinen Gleichungen (1.) durch folgende specielleren zu ersetzen:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial x}, \\ \eta = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial y}, \\ \zeta = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \text{wo } R = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}; \end{cases}$$

ferner sind in diesem Falle a, b, c und α, β, γ identisch mit ξ, η, ζ; und man erhält daher für das *Gauss'sche* Krümmungsmaass k der gegebenen Fläche die Formel:

$$k = \frac{d\sigma}{ds} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} & \xi \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \eta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix};$$

hieraus aber entspringt durch Substitution der für ξ, η, ζ angegebenen Werthe sofort der bekannte Ausdruck:

$$k = \frac{(-1)}{R^4} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}.$$

Ein *zweiter* Satz über correspondirende Flächenelemente ergiebt sich, sobald man ausgeht von etwas *anderen* Grundlagen, nämlich annimmt, dass x, y, z und ξ, η, ζ gegeben seien als bestimmte Functionen zweier Parameter p, q:

$$(4.) \qquad \begin{cases} x = \lambda(p, q), \\ y = \mu(p, q), \\ z = \nu(p, q), \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = \Lambda(p, q), \\ \eta = M(p, q), \\ \zeta = N(p, q): \end{cases}$$

alsdann wird die Gesammtheit der Puncte x, y, z eine gewisse Fläche[1]), und die Gesammtheit der Puncte ξ, η, ζ eine gewisse andere Fläche bilden. Nennt man nun zwei Puncte x, y, z und ξ, η, ζ dieser Flächen, welche *dieselben* Parameter p, q haben, *correspondirende* Puncte, und bezeichnet man zwei in diesem Sinne einander correspondirende Elemente der beiden Flächen mit ds und $d\sigma$, so findet die Relation statt:

$$(5.) \quad ds : d\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} & a \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} & b \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} & c \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial p} & \frac{\partial \xi}{\partial q} & \alpha \\ \frac{\partial \eta}{\partial p} & \frac{\partial \eta}{\partial q} & \beta \\ \frac{\partial \zeta}{\partial p} & \frac{\partial \zeta}{\partial q} & \gamma \end{vmatrix},$$

wo a, b, c und α, β, γ [ebenso wie in (3.)] die Richtungscosinus der Normalen von ds und $d\sigma$ vorstellen.

Ohne auf den Beweis dieses Satzes (5.) hier mich näher einzulassen, will ich nur noch bemerken, dass man denselben ebenfalls mit gutem Erfolg benutzen kann zur Reproduction gewisser von *Gauss* für das *Krümmungsmaass* gegebener Formeln.

---

1) Man erhält die Gleichung dieser Fläche, wenn man aus dem in (4.) auf der linken Seite stehenden Formelsystem die Grössen p, q eliminirt.

Carl Neumann, *Ueber das Ampère'sche Gesetz.* (Das Manuscript wurde eingereicht am Tage der Sitzung.)

Das Vertrauen, dessen das *Ampère'*sche Gesetz ein halbes Jahrhundert hindurch sich erfreut hat, dürfte durch die Angriffe, denen dasselbe in letzter Zeit ausgesetzt war, gelitten haben, — vielleicht um so mehr gelitten haben, als das Gesetz in den Augen der meisten Physiker und Mathematiker wohl immer noch auf der bedenklichen Hypothese ruht, dass die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein einzelnes Stromelement gegen letzteres *senkrecht* sei.

Ich werde im Folgenden zeigen, dass das Ampère'sche Gesetz von der genannten Hypothese unabhängig ist, — was allerdings *implicite* schon aus einer Untersuchung *Stefan's* [1]) hervorgeht. — Dabei mag es gestattet sein, einige vorbereitende Bemerkungen voranzuschicken, indem ich (in § 1.) an zwei rein mathematische Sätze, und sodann (in § 2.) an die Ersetzbarkeit geschlossener elektrischer Ströme durch magnetische Flächen kurz erinnere.

---

§. 1.

Zwei mathematische Sätze.

Ich werde diese Sätze hier nur *historisch* angeben, ohne auf den Beweis derselben mich näher einzulassen.

---

1) *Stefan: Die Grundformeln der Elektrodynamik.* Sitzungsberichte der Wiener Akad. (1869) Bd. LIX pg. 693. — Vrgl. auch die Fortschritte der Berliner Physik. Gesellschaft, Jahrg. XXV, pg. 604.

Erster Satz [1]. — Es sei Ds das Element eines *Ringes* d. i. einer geschlossenen Curve; ferner sei $D\omega$ das Element einer von diesem Ringe begrenzten Fläche, und ν die positive [2] Normale von $D\omega$. Ausserdem mögen Ds_1, $D\omega_1$, ν_1 analoge Bedeutungen haben für irgend einen *zweiten Ring*. Endlich seien ϑ, ϑ_1 die Winkel, unter welchen die Elemente Ds, Ds_1 gegen ihre Verbindungslinie r ($Ds_1 \rightarrow\!\!\!\rightarrow Ds$) geneigt sind, und ε der Neigungswinkel der beiden Elemente gegen einander. Alsdann drückt der *Satz* sich aus durch die Formel:

$$\text{(I.)} \qquad \Sigma\Sigma \frac{\cos\varepsilon}{r} Ds\, Ds_1 = -\Sigma\Sigma \frac{\partial^2 (r^{-1})}{\partial\nu\, \partial\nu_1} D\omega\, D\omega_1,$$

die Integrationen $\Sigma\Sigma$ ausgedehnt gedacht über alle Ds, Ds_1, respective über alle $D\omega$, $D\omega_1$. Dabei bezeichnet r die Entfernung zwischen Ds, Ds_1, respective zwischen $D\omega$, $D\omega_1$.

Zweiter Satz [3]. — Wir wollen annehmen, die beiden Ringe seien *starr* (d. i. von unveränderlicher Gestalt), und im Raume *frei beweglich*. Zugleich mag dr derjenige Zuwachs genannt werden, welchen die Entfernung r zweier Elemente Ds, Ds_1 bei irgend einer Bewegung der Ringe während des Zeitelementes dt erfährt. Alsdann lautet der *Satz* folgendermassen: — *Sollen zwei noch unbekannte Functionen* $\varphi = \varphi(r)$ *und* $\psi = \psi(r)$ *von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral*

$$\text{(II.)} \qquad \Sigma\Sigma (\varphi \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \psi \cos\varepsilon)\, dr\, Ds\, Ds_1$$

für zwei starre Ringe von beliebiger Gestalt und beliebiger Bewegung jederzeit verschwindet, so ist dazu erforderlich und ausreichend, dass φ *und* ψ *identisch Null sind.*

Bemerkung. — Schliesslich sei noch erinnert an die bekannten Formeln:

---

1) Man findet den Beweis dieses Satzes in meinem Werk: »*Die elektrischen Kräfte*«, Leipzig 1873, pg. 93; ferner auch in den Abh. d. Kgl. Sächs. Ges., 1873, p. 434.

2) Ich verstehe unter der *positiven* Normale von $D\omega$ diejenige, welche zur festgesetzten Umlaufsrichtung des Ringes ebenso liegt, wie die zAxe zur xyRichtung.

3) Man findet den Beweis dieses Satzes in meinem Aufsatz in den Abh. d. Kgl. Sächs. Ges., 1873, pg. 440.

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \cos\vartheta\,, \qquad \frac{\partial (r^2)}{\partial s} = 2r\cos\vartheta\,,$$

$$\text{(III.)} \qquad \frac{\partial r}{\partial s_1} = -\cos\vartheta_1\,, \qquad \frac{\partial (r^2)}{\partial s_1} = -2r\cos\vartheta_1\,,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_1} = \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - \cos\varepsilon}{r}\,, \qquad \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s\,\partial s_1} = -2\cos\varepsilon\,,$$

so wie auch an die hieraus entspringende Formel:

$$\text{(III.a)} \qquad \frac{\partial^2 (r^{-1})}{\partial s\,\partial s_1} = \frac{\cos\varepsilon - 3\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r^3}\,.$$

Hier bezeichnen ϑ, ϑ_1, ε die *Ampère*'schen Winkel, nämlich ϑ und ϑ_1 die Neigungswinkel der Elemente Ds und Ds_1 gegen die Linie $r\,(Ds_1 \gtrless Ds)$, und ε den Neigungswinkel der beiden Elemente gegen einander.

---

§ 2.

Die Ersetzbarkeit elektrischer Ströme durch magnetische Flächen.

Zu den am Besten constatirten Vorstellungen der Elektrodynamik gehört: *die Ersetzbarkeit geschlossener elektrischer Ströme durch magnetische Flächen*, oder genauer ausgedrückt die Vorstellung, dass die ponderomotorische Einwirkung zweier elektrischer Stromringe auf einander identisch sei mit der gegenseitigen Einwirkung zweier magnetischer Flächen, deren jede durch einen der beiden Ringe begrenzt ist.

Aus dieser Vorstellung folgt, dass für zwei elektrische Stromringe ein Potential P existirt von der Form:

$$\text{(IV.)} \qquad P = JJ_1 Q = A^2 JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 (r^{-1})}{\partial\nu\,\partial\nu_1} D\omega\, D\omega_1\,.$$

Dieses Potential kann mit Hülfe des Satzes (I.) auch so dargestellt werden:

$$\text{(V.)} \qquad P = JJ_1 Q = -A^2 JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma \frac{\cos\varepsilon}{r} DsDs_1\,.$$

Hier bezeichnet A^2 eine Constante, während J, J_1 die beiden Stromstärken sind. Zugleich bemerkt man, dass Q das auf die

Strom*einheiten* bezogene Potential, nämlich denjenigen Werth repräsentirt, welchen P annimmt für $J = J_1 = 1$.

Aus der genannten Vorstellung der Ersetzbarkeit geschlossener Ströme durch magnetische Flächen folgt nun ferner, dass die von den beiden Stromringen bei beliebiger Bewegung auf einander ausgeübte ponderomotorische Arbeit gleich dem negativen Zuwachs des Potentials ist. Bezeichnet man also jene Arbeit mit dL, so ist:

$$\text{(VI.)} \qquad dL = - JJ_1 \, dQ,$$

oder falls man für Q seinen Werth aus (V.) substituirt:

$$\text{(VII.)} \qquad dL = + A^2 JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma \, d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) Ds \, Ds_1,$$

wo dQ und $d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right)$ die dem betrachteten Zeitelement dt entsprechenden Zuwüchse von Q und $\frac{\cos\varepsilon}{r}$ bezeichnen.

Nun ist

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = - \frac{(\cos\varepsilon)\, dr}{r^2} + \frac{1}{r} d(\cos\varepsilon),$$

oder mit Rücksicht auf (III.):

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = - \frac{(\cos\varepsilon)\, dr}{r^2} - \frac{1}{2r} d\left(\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\, \partial s_1}\right),$$

oder weil die den Bogenlängen s, s_1 entsprechenden Differentiationen ∂, ∂ und die der Zeit entsprechende Differentiation d von einander unabhängig sind:

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = - \frac{(\cos\varepsilon)\, dr}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\, dr)}{\partial s\, \partial s_1},$$

oder was dasselbe ist:

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = - \frac{(\cos\varepsilon)\, dr}{r^2} - \left\{\frac{\partial^2(r^{-1})}{\partial s\, \partial s_1} r\, dr + \frac{\partial G}{\partial s_1} - \frac{\partial F}{\partial s}\right\},$$

wo es auf die Bedeutungen von F und G nicht weiter ankommt[1]). Hieraus folgt weiter mit Rücksicht auf (III. a):

---

1) Es ergiebt sich die letzte Formel aus der vorhergehenden vermittelst der identischen Relation:

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = -\frac{(\cos\varepsilon)\,dr}{r^2} - \frac{(\cos\varepsilon - 3\cos\vartheta\cos\vartheta_1)\,dr}{r^2} - \frac{\partial G}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial s},$$

oder was dasselbe ist:

$$d\left(\frac{\cos\varepsilon}{r}\right) = \frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}\,dr - \frac{\partial G}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial s}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (VII.), so folgt schliesslich:

$$\text{(VIII.)} \qquad dL = A^2 JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma \frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}\,dr\,Ds\,Ds_1;$$

denn die Glieder $\frac{\partial G}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial F}{\partial s}$ verschwinden bei Ausführung der Integrationen, weil die Ströme *geschlossen* sind [1]).

Das durch die Formeln (VI.), (VII.), (VIII.) ausgedrückte allgemeine Gesetz [2]) ist durch sorgfältige experimentelle Untersuchungen bestätigt worden, und kann daher als unbedingt zuverlässig angesehen werden.

Doch giebt dieses Gesetz nur Auskunft über die Wirkungen *geschlossener* Ströme, nicht aber über die gegenseitige Einwirkung der einzelnen Strom*elemente*. Um letztere zu ermitteln ist die Herbeiziehung irgend welcher *hypothetischer* Annahmen unumgänglich erforderlich. Wir wollen zunächst diejenigen Hypothesen uns vergegenwärtigen, deren *Ampère* sich hierbei bediente.

$$U\frac{\partial^2 V}{\partial s\,\partial s_1} - V\frac{\partial^2 U}{\partial s\,\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_1}\left(U\frac{\partial V}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(V\frac{\partial U}{\partial s_1}\right);$$

es ist nämlich im vorliegenden Fall: $U = r^{-1}$, $V = r\,dr$, mithin:

$$F = r\,dr\,\frac{\partial(r^{-1})}{\partial s_1} \quad \text{und} \quad G = r^{-1}\cdot\frac{\partial(r\,dr)}{\partial s}.$$

1) Die Transformation der Formel (VII.) in (VIII.) ist von *Heine* ausgeführt worden in *G. Wiedemann's* Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus, Zweite Auflage, Bd. 2, pg. 708—711. Uebrigens ist diese Transformation auch schon enthalten als specieller Fall in einem von mir aufgestellten allgemeinen Satz, Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. 1873, pg. 447.

2) An andern Orten habe ich dieses Gesetz als *Potentialgesetz* oder als *ponderomotorisches Integralgesetz* bezeichnet.

§ 3.

Die Ampère'schen Hypothesen.

Diese lassen sich folgendermassen aussprechen:

(1.) *Erste Hypothese. Die ponderomotorische Kraft R, welche zwei Stromelemente JDs und J_1Ds_1 aufeinander ausüben, ist proportional mit*

$$JJ_1 DsDs_1,$$

und schlägt daher in ihr Gegentheil um, sobald in einem der beiden Elemente die Stromrichtung umgekehrt wird.

(2.) *Zweite Hypothese. Abgesehen vom Factor JJ_1DsDs_1 ist die Kraft R nur noch abhängig von der relativen Lage der beiden Elemente.* Denkt man sich also z. B. von den Linien *JDs*, J_1Ds_1, *R* das Spiegelbild $JD\sigma$, $J_1D\sigma_1$, *P* entworfen in Bezug auf irgend eine Ebene, so wird, ebenso wie *R* die zwischen *JDs* und J_1Ds_1 vorhandene Wirkung vorstellt, ebenso auch *P* die Wirkung zwischen $JD\sigma$ und $J_1D\sigma_1$ repräsentiren.

(3.) *Dritte Hypothese. Die Kraft R ist ersetzbar durch diejenigen Kräfte, welche die Componenten von JDs und die Componenten von J_1Ds_1 auf einander ausüben.*

(4.) *Vierte Hypothese. Die Kraft R fällt ihrer Richtung nach zusammen mit der Verbindungslinie der beiden Elemente.*

(5.) *Fünfte Hypothese. Die Kraft R variirt, falls man die Winkel ϑ, ϑ_1, ε constant erhält, umgekehrt proportional mit dem Quadrate der Entfernung.* Dabei sollen ϑ, ϑ_1 die Winkel bezeichnen, unter welchen *Ds*, Ds_1 gegen die Linie $r\,(Ds_1 \rightarrowtail Ds)$ geneigt sind, und ε den Neigungswinkel der beiden Elemente gegen einander, — ebenso wie in (III.).

(6.) *Sechste Hypothese. Die ponderomotorische Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein einzelnes Stromelement steht gegen letzteres senkrecht.*

Ich werde nun im Folgenden nur die Hypothesen (1.), (2.), (3.), (4.) benutzen, und zeigen, dass dieselben zur Ableitung des *Ampère*'schen Gesetzes ausreichend sind. Mit andern Worten: Ich werde nachweisen, dass die Hypothesen (5.) und (6.) *überflüssig* sind.

§ 4.

Ableitung des Ampère'schen Gesetzes, abgesehen von zwei noch unbekannt bleibenden Functionen.

Es sei E eine gegebene Ebene, ferner seien l, m irgend zwei Stromelemente[1]), und λ, μ ihre Spiegelbilder in Bezug auf E. Die zwischen l, m stattfindende Kraft R wird alsdann, nach Hypothese (2.), gleich gross sein mit der Kraft zwischen λ, μ; was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$R(l, m) = R(\lambda, \mu).$$

Denken wir uns nun das Linienelement m seiner ganzen Länge nach in die Ebene E hineinfallend, so wird offenbar μ identisch mit m; so dass wir erhalten:

$$R(l, m) = R(\lambda, m).$$

Denken wir uns ferner l senkrecht gegen E, und von E halbirt, so erhalten wir für λ ein Linienelement l', welches mit l zusammenfällt, und von l nur durch *entgegengesetzte Richtung* sich unterscheidet. Alsdann nimmt unsere Formel die Gestalt an:

$$R(l, m) = R(l', m).$$

Andererseits folgt nun aber aus der Hypothese (1.), dass die Kraft $R(l, m)$ in ihr Gegentheil umschlägt, sobald man in einem der beiden Elemente, z. B. in l die Stromrichtung umkehrt; und es ist also:

$$R(l, m) = -R(l', m).$$

Aus den beiden letzten Formeln folgt durch Addition sofort:

$$R(l, m) = 0.$$

---

1) Ausführlicher würden dieselben etwa zu bezeichnen sein mit JDs, $J_1 Ds_1$; so dass also l zur Abkürzung steht für JDs, und m für $J_1 Ds_1$.

D. h.: Die Wirkung zwischen zwei Stromelementen l und m ist immer Null, wenn m in einer Ebene liegt, welche durch l senkrecht hindurchgeht. Mit andern Worten:

(7.) *Bezeichnet r die Verbindungslinie zweier Stromelemente, so wird die ponderomotorische Einwirkung der beiden Elemente auf einander stets Null sein, sobald das eine senkrecht steht gegen die durch das andere und r sich bestimmende Ebene.*

Solches vorangeschickt wollen wir nun die zwischen zwei Stromelementen JDs und J_1Ds_1 stattfindende Kraft

$$R\,(Ds,\ Ds_1)$$

näher zu bestimmen suchen. Diese Kraft fällt nach Hypothese (4.) mit der Verbindungslinie r zusammen, und besitzt nach den Hypothesen (1.), (2.) einen Werth von folgender Form:

$$(8.)\qquad R\,(Ds,\ Ds_1) = JJ_1\,Ds\,Ds_1\,f\,(r,\ \vartheta,\ \vartheta_1,\ \varepsilon),$$

wo ϑ, ϑ_1, ε die *Ampère*'schen Winkel bezeichnen [vergl. (III.)] Führen wir nun ein rechtwinkliges Axensystem ein, dessen xAxe mit r zusammenfällt, und bezeichnen wir die diesem System entsprechenden Componenten von Ds und Ds_1 respective mit Dx, Dy, Dz und Dx_1, Dy_1, Dz_1, so folgt aus Hypothese (3.) sofort:

$$(9.)\quad R\,(Ds,\ Ds_1) = R\,(Ds,\ Dx_1) + R\,(Ds,\ Dy_1) + R\,(Ds,\ Dz_1),$$

und hieraus durch nochmalige Anwendung derselben Hypothese:

$$\begin{aligned}(10.)\quad R\,(Ds,\ Ds_1) = {} & R\,(Dx,\ Dx_1) + R\,(Dx,\ Dy_1) + R\,(Dx,\ Dz_1)\\ & + R\,(Dy,\ Dx_1) + R\,(Dy,\ Dy_1) + R\,(Dy,\ Dz_1)\\ & + R\,(Dz,\ Dx_1) + R\,(Dz,\ Dy_1) + R\,(Dz,\ Dz_1).\end{aligned}$$

Die 9 Kräfte rechter Hand sind aber, mit Ausnahme der in der Diagonale stehenden, sämmtlich *Null*, zufolge des Satzes (7.). Somit erhalten wir:

$$(11.)\quad R\,(Ds,\ Ds_1) = R\,(Dx,\ Dx_1) + R\,(Dy,\ Dy_1) + R\,(Dz,\ Dz_1).$$

Nun ist aber nach (8.):

$$R(Dx, Dx_1) = JJ_1 Dx Dx_1 f(r, 0^0, 0^0, 0^0),$$
$$R(Dy, Dy_1) = JJ_1 Dy Dy_1 f(r, 90^0, 90^0, 0^0),$$
$$R(Dz, Dz_1) = JJ_1 Dz Dz_1 f(r, 90^0, 90^0, 0^0).$$

Substituiren wir diese Werthe in (11.), und führen wir dabei die Bezeichnung ein:

$$f(r, 0^0, 0^0, 0^0) = \Phi(r),$$
$$f(r, 90^0, 90^0, 0^0) = \Psi(r),$$

so folgt:

(12.) $$R(Ds, Ds_1) = JJ_1[Dx Dx_1 \Phi(r) + (Dy Dy_1 + Dz Dz_1)\Psi(r)],$$

oder was dasselbe ist:

(13.) $$R(Ds, Ds_1) = JJ_1 Ds Ds_1 [\alpha\alpha_1 \Phi(r) + (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)\Psi(r)].$$

Hier bezeichnen α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Richtungscosinus von Ds und Ds_1; und es ist also:

$$\alpha = \cos\vartheta,$$
$$\alpha_1 = \cos\vartheta_1, \qquad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \cos\varepsilon,$$

mithin:

$$\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \cos\varepsilon - \cos\vartheta\cos\vartheta_1:$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in (13.) ergiebt sich, falls wir die Kraft $R(Ds, Ds_1)$ weiterhin kurzweg mit R bezeichnen, der Werth:

(14.) $$R = JJ_1 Ds Ds_1 [\cos\vartheta\cos\vartheta_1 \Phi(r) + (\cos\varepsilon - \cos\vartheta\cos\vartheta_1)\Psi(r)],$$

oder schliesslich, falls man $\Phi(r) - \Psi(r)$ mit $A(r)$ bezeichnet:

(15.) $$R = JJ_1 Ds Ds_1 [A(r)\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \Psi(r)\cos\varepsilon].$$

§ 5.

Bestimmung der noch unbekannt gebliebenen Functionen.

Denken wir uns die Kraft R (15.) *repulsiv* gerechnet, so wird die ponderomotorische Arbeit, welche die beiden Elemente JDs, $J_1 Ds_1$ während einer beliebigen Bewegung auf einander ausüben, dargestellt sein durch $R\,dr$, wo dr den Zuwachs der Entfernung bezeichnet während des betrachteten Zeitelementes dt. Die ponderomotorische Arbeit dL, welche zwei gegebene *Stromringe* während der Zeit dt auf einander ausüben, hat daher den Werth:

$$dL = \Sigma\Sigma\, R\,dr, \tag{16.}$$

die Integration $\Sigma\Sigma$ ausgedehnt über alle Elemente Ds, Ds_1 der beiden Ringe. Hieraus folgt durch Substitution des Ausdruckes (15.):

$$dL = JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma\,[\mathcal{A}(r)\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \Psi(r)\cos\varepsilon]\,dr\,Ds\,Ds_1. \tag{17.}$$

Andererseits aber kann die ponderomotorische Arbeit dL auf Grund des früher besprochenen allgemeinen Gesetzes [vergl. (VI.) und (VIII.)] auch so ausgedrückt werden:

$$dL = -JJ_1\,dQ \tag{18.}$$

oder:

$$dL = A^2 JJ_1 \cdot \Sigma\Sigma \frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}\,dr\,Ds\,Ds_1. \tag{19.}$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (17.) und (19.) gelangen wir zu der Formel:

$$\Sigma\Sigma\left\{\left(\mathcal{A}(r) - \frac{3A^2}{r^2}\right)\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \left(\Psi(r) + \frac{2A^2}{r^2}\right)\cos\varepsilon\right\} dr\,Ds\,Ds_1 = 0. \tag{20.}$$

Aus dieser Formel aber, welche (ebenso wie die angestellten Betrachtungen) gültig ist für *beliebige* Bewegungen der beiden Ringe, erkennen wir mit Rücksicht auf den Satz (II.) sofort, dass die Functionen $\mathcal{A}(r)$, $\Psi(r)$ folgende Werthe besitzen müssen:

(21.) $$\mathcal{A}(r) = \frac{3A^2}{r^2},$$

$$\mathcal{P}(r) = -\frac{2A^2}{r^2};$$

Somit gewinnt die Formel (15.) folgendes Aussehen:

(22.) $$R = A^2 JJ_1 Ds\, Ds_1 \frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2};$$

dies aber ist das *Ampère'sche Gesetz*.

Somit ist dargethan, dass zur Ableitung dieses Gesetzes nur die Hypothesen (1.), (2.), (3.), (4.) erforderlich, die Hypothesen (5.), (6.) hingegen überflüssig sind.

§. 6.

Schlussbemerkung.

Wollte man *sämmtliche* Hypothesen vermeiden [nicht blos (5.), (6.), sondern auch (1.), (2.), (3.), (4.)], so würde allerdings immer noch die Formel (VIII.):

(23.) $$dL = A^2 JJ_1 \Sigma\Sigma \frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2} dr\, Ds\, Ds_1$$

übrig bleiben, — als Ausdruck der Thatsache, dass geschlossene elektrische Ströme durch magnetische Flächen ersetzbar sind. Und auf Grund dieser Formel würde man behaupten können, *die gegenseitige Einwirkung geschlossener Ströme sei von solcher Art, als ob die einzelnen Stromelemente mit einer Kraft*

(24.) $$R = A^2 JJ_1 \frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2} Ds\, Ds_1$$

aufeinander einwirkten. — Dies ist das Verfahren von *Heine*[1]), welches an und für sich vollständig correct ist, leicht aber zu

1) l. c. p. 711.

Missverständnissen führen kann, wenn man dasselbe als eine „*Ableitung*“ des Ampère'schen Gesetzes bezeichnet.

Um solchen Missverständnissen vorzubeugen, mag es mir gestattet sein, noch folgende Bemerkung zuzufügen:

Offenbar darf man aus der Formel (23.) nicht schliessen auf die *Nothwendigkeit* der Formel (24.), sondern nur auf ihre *Möglichkeit*. Oder was dasselbe ist: Aus der Thatsache der Ersetzbarkeit geschlossener elektrischer Ströme durch magnetische Flächen darf man nicht schliessen auf die *Nothwendigkeit* des Ampère'schen Gesetzes, sondern nur auf seine *Möglichkeit*. Oder noch schärfer ausgedrückt: Man darf nicht behaupten, dass das Ampère'sche Gesetz aus jener Thatsache *ableitbar*, sondern nur, dass es mit derselben *verträglich* sei.

SITZUNG AM 23. APRIL 1876.

M. W. Drobisch, *Einige elementare Bemerkungen über den Raum von drei Dimensionen.*

Bekanntlich ist die Gleichung eines Kreises, dessen Halbmesser r, für rechtwinklige Coordinaten x, y, deren Abscissenaxe die Berührende des Kreises, und deren Anfang der Berührungspunkt,

$$x^2 + y^2 = 2ry,$$

und geht dieselbe, wenn r unendlich, also $= \frac{1}{0}$ und $y = 0$ gesetzt wird, über in die Gleichung

$$x^2 = 2\frac{0}{0}, \qquad (1)$$

welche, da der rechte Theil derselben jeden positiven Werth von Null bis ins Unendliche bezeichnet, die Gleichung der Berührenden ist.

Ebenso ist die Gleichung einer Kugelfläche vom Halbmesser r für rechtwinklige Coordinaten, x, y, z, deren xy-Ebene die Berührungsebene der Kugel, und deren Anfang der Berührungspunkt,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2rz,$$

und geht diese Gleichung, wenn $r = \frac{1}{0}$ und $z = 0$, über in

$$x^2 + y^2 = 2\frac{0}{0}, \qquad (2)$$

welche Gleichung die der berührenden Ebene ist.

Wird nun hier die Ebene vorgestellt als eine continuirliche Reihe von concentrischen Kreislinien, deren Halbmesser von Null bis ins Unendliche stetig und gleichförmig zunimmt, so kann der unendliche dreifach ausgedehnte Euklidische Raum in ähnlicher Weise vorgestellt werden als eine continuirliche Reihe concentrischer Kugelflächen, deren Halbmesser von Null bis ins Unendliche gleichfalls stetig und gleichförmig zunimmt, und daher dieser Raum repräsentirt werden durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\frac{0}{0}, \qquad (3)$$

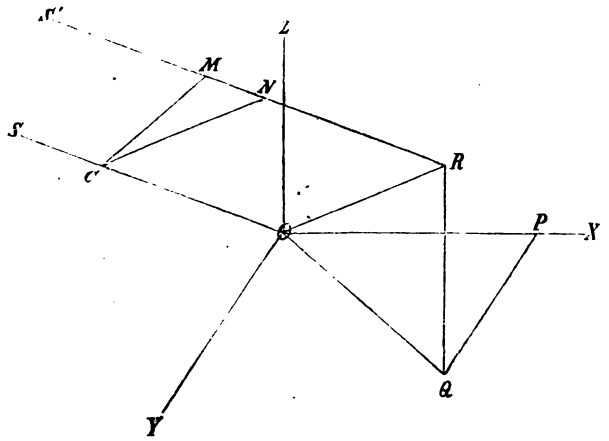
in welcher der rechte Theil für eine von Null bis ins Unendliche Variable r^2 gesetzt ist.

Stellen nun die Gleichungen (1) und (2) die gerade Linie und die Ebene als Grenzfälle, bez. der Kreislinie und der Kugelfläche dar, so liegt die Frage nahe, ob der durch die Gleichung (3) repräsentirte Euklidische Raum in ähnlicher Weise als Grenzfall eines anderen dreifach ausgedehnten räumlichen Gebildes dargestellt werden kann.

Gleichwie aber die Kreislinie einen Raum von zwei Dimensionen, die Ebene, und die Kugelfläche einen Raum von drei Dimensionen voraussetzt, so wird für das hypothetische Gebilde, dessen Grenzfall der dreifach ausgedehnte Euklidische Raum seyn soll, nach Analogie ein Raum von vier Dimensionen vorauszusetzen seyn. Vermögen wir nun zwar nicht, diesen Raum uns anschaulich vorzustellen, so können wir ihn doch definiren als einen solchen, in welchem vier einander in einem und demselben Punkte durchschneidende gerade Linien oder Coordinatenaxen paarweise senkrecht auf einander stehen, und aus dieser charakteristischen Grundbestimmung dieses Raums geometrische Consequenzen ziehen.

Seyen OX, OY, OZ, OS diese Axen, so ist zuerst in dem Raum XYZ von 3 Dimensionen jeder beliebige Punkt R durch die Coordinaten $OP = x$, $PQ = y$, $QR = z$ bestimmt. Werde OQ und OR gezogen, desgleichen RS' parallel zu OS, so ist, da nach der Voraussetzung OS senkrecht auf OX und OY, dieselbe auch senkrecht auf der in der XY-Ebene liegenden OQ; und da nach der Voraussetzung auch OS senkrecht auf OZ, so steht OS auch senkrecht auf der in der Ebene QOZ liegenden OR. Daher ist der Winkel ORS' ein rechter. Schneidet man nun auf OS

eine Strecke $OC = r$ ab, die grösser als OR, und beschreibt aus C mit r als Halbmesser in der Ebene $SORS'$ einen Kreis, so



schneidet dieser die RS' in zwei Punkten, von denen M der sey, welcher R näher liegt als der andre. Dieser Punkt liegt dann (so wie der andre Durchschnittspunkt) im Raum von 4 Dimensionen, und ist, wenn $RM = s$ gesetzt wird, durch die 4 Coordinaten x, y, z, s bestimmt. Zieht man nun noch CN parallel zu OR, so ist in dem bei N rechtwinkligen Dreieck CNM

$$CN^2 + NM^2 = CM^2,$$

folglich, da $CN^2 = OR^2 = x^2 + y^2 + z^2$, und $CM = RN = r$, also $NM = s - r$,

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 + (s - r)^2 = r^2 \\ \text{oder} \quad x^2 + y^2 + z^2 + s^2 = 2rs. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

In dieser Gleichung haben alle 4 Coordinaten endliche Werthe, so lange als r einen endlichen Werth hat, und das der Gleichung entsprechende geometrische Gebilde ist dann ein in sich zurücklaufendes, wie die Kreislinie und die Kugelfläche, und kann, wegen des gleichen Abstandes r der in seiner Begrenzung liegenden Punkte mit *Helmholtz*[1]) als ein »kugelähnliches Gebilde« von drei Dimensionen bezeichnet werden.

1) S. 220 seiner Abhandlung in den Göttinger Nachr. v. 3. Juni 1868.

Wird dagegen $r = \infty = \frac{1}{0}$, so haben x, y, z nur dann endliche Werthe, wenn $s = 0$, und in diesem besonderen Falle geht die Gleichung über in

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\frac{0}{0},$$

welche Gleichung nach (3) den Euklidischen Raum repräsentirt. Dieser ist demnach der Grenzfall des durch die Gleichung (4) ausgedrückten, in sich zurücklaufenden, aber nicht unendlichen, dreifach ausgedehnten kugelähnlichen Gebildes, welches daher als ein zweiter Raum von drei Dimensionen bezeichnet werden kann. Der Euklidische Raum steht daher zu diesem Raum in derselben Beziehung wie die Ebene zu der von ihr berührten Kugelfläche. Schon um dieser Analogie willen würde man den Euklidischen Raum in Vergleichung mit jenem zweiten, gleichfalls dreifach ausgedehnten einen ebenen, den letztern aber einen gekrümmten nennen können. [1])

Verlegt man die Coordinatenaxen sich selbst parallel nach C als Coordinatenanfang, und setzt dann in (4) $s - r = s'$, so erhält man für das kugelähnliche Gebilde die symmetrische Gleichung

$$x^2 + y^2 + r'^2 + s'^2 = r'^2. \qquad (5)$$

Da zuvor nachgewiesen ist, dass OS senkrecht auf OR steht, diese Linie aber in dem Raum von drei Dimensionen jede beliebige Richtung haben kann, so ergiebt sich daraus das paradox scheinende Resultat, dass die vierte Axe des Raums von 4 Dimensionen auf allen aus dem Coordinatenanfang im Raum von 3 Dimensionen gezogenen Geraden senkrecht steht. Es ist diess jedoch ganz analog dem Satze, dass im Raum von drei Dimensionen die dritte Axe auf allen vom Coordinatenanfang im Raum von zwei Dimensionen (der Ebene) auslaufenden Geraden senkrecht steht, und man wird daher in analoger Weise

---

1) Sein Krümmungsmaass ist $\frac{1}{r^3}$, welches wie das der Kugelfläche $\frac{1}{r^2}$, wenn $r = \frac{1}{0}$, in das Krümmungsmaass 0 der Ebene übergeht.

auch sagen können: die vierte Axe des Raums von 4 Dimensionen steht auf dem Raum von 3 Dimensionen senkrecht. Diess charakterisirt zugleich den letzteren als den den ersteren berührenden Raum. Das »kugelähnliche Gebilde« (4) und (5) entspricht aber nicht dem Inhalte, sondern der Oberfläche einer Kugel, und dem Inhalte der letzteren der von jenem Gebilde eingeschlossene Theil des unendlichen Raums von 4 Dimensionen.

Die Consequenz führt ferner auf folgende Analogien zu den Beziehungen zwischen der Kugel und Ebene.

Wie im Euklidischen Raum die Axen *OX, OY, OZ* bezw. auf den Ebenen *YZ, XZ, XY* senkrecht stehen, so stehen in dem Raum von 4 Dimensionen die 4 Axen *OX, OY, OZ, OS* der Reihe nach senkrecht auf den dreifach ausgedehnten Räumen *YZS, XZS, XYS, XYZ*; man kann daher, wie dort von den Ebenen, so auch hier von diesen Räumen sagen, dass sie paarweise senkrecht auf einander stehen. Und gleichwie die Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, wenn $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ bezw. in die Kreislinien $y^2 + z^2 = r^2$, $x^2 + z^2 = r^2$, $x^2 + y^2 = r^2$ von gleichem Halbmesser übergeht, die Flächen dieser Kreise aber die Projectionen der Kugelfläche auf die drei durch ihren Mittelpunkt gehenden Coordinatenebenen, sind, so geht das Gebilde, dessen Gleichung (5), wenn $x = 0$, $y = 0$, $r = 0$, $s = 0$, der Reihe nach über in die Kugelflächen von gleichem Halbmesser $y^2 + z^2 + s^2 = r^2$, $x^2 + z^2 + s^2 = r^2$, $x^2 + y^2 + s^2 = r^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, und sind die körperlichen Inhalte derselben als die Projectionen des Gebildes (5) auf die Räume von drei Dimensionen *YZS, XZS, XYS, XYZ* anzusehen. Diese 4 durch den Mittelpunkt des Gebildes (5) gelegten, paarweise auf einander senkrechten Räume schneiden also den vierfach ausgedehnten Inhalt desselben ebenso in 4 Kugeln von gleichem Halbmesser, wie die 3 paarweise auf einander senkrechten, durch den Mittelpunkt der Kugel gelegten Ebenen dieselbe in drei Kreisen von gleichem Halbmesser schneiden.

Ohne diese Analogien weiter zu verfolgen, mögen hier nur noch einige allgemeine Bemerkungen über den Sinn dieser und ihnen verwandter Deductionen Platz finden.

Ob man eine stetige Mannigfaltigkeit von mehr als drei Dimensionen, in welcher die von einander unabhängigen veränderlichen Grössen demselben gesetzlichen Zu-

sammenhang unterworfen sind, wie die Grössen unsrer analytischen Geometrie, einen Raum nennen darf, oder ihr, wie mehrere Philosophen der Gegenwart, [1]) diese Benennung versagen zu müssen glaubt, weil wir uns weder von einer solchen Mannigfaltigkeit noch von den aus ihrer Voraussetzung gezogenen Consequenzen eine anschauliche Vorstellung zu machen vermögen, scheint zuletzt auf einen Wortstreit hinauszulaufen. Jedenfalls ist nicht einzusehen, warum es nicht verstattet seyn sollte, dem Worte »Raum« eine erweiterte Bedeutung beizulegen, nämlich damit einen Gegenstand zu bezeichnen, von dem wir uns zwar nicht eine anschauliche Vorstellung, wohl aber einen bestimmten Begriff zu bilden im Stande sind, der schon deshalb nicht nutzlos ist, weil er uns das Anschauliche als speciellen Fall des denkbaren Allgemeineren erkennen lässt. Zu erklären, warum unsre Einbildungskraft an die Schranken von gerade 3 Dimensionen der räumlichen Ausdehnung gebunden ist, fällt der Erkenntnisstheorie als Aufgabe zu. Man führt diese Beschränktheit entweder mit *Kant* (seit seiner berühmten Inauguraldissertation v. J. 1770) auf eine nicht weiter erklärbare Organisation unsers menschlichen Anschauungsvermögens zurück, zerhaut aber damit eigentlich nur den Knoten; oder man versucht es, wie Andre nach *Kant*, diese Beschränktheit als eine allgemeine und nothwendige, für jede denkbare Intelligenz gültige nachzuweisen. Seitdem aber *Riemann* und *Helmholtz* gezeigt haben, dass die Fundamente der Euklidischen Geometrie Voraussetzungen enthalten, die sich nicht als nothwendige Folgen aus allgemeinen Begriffsbestimmungen ableiten lassen, sondern aus der Erfahrung geschöpft seyn müssen, kann der Erklärungsgrund jener Beschränktheit unsrer Einbildungskraft nur in dem, wenigstens theilweise empirischen Ursprung unsrer Raumvorstellung gesucht werden.

Es ist mindestens von historischem Interesse, zu bemerken (was wenig bekannt zu seyn scheint), dass *Kant* in seiner Erstlingsschrift v. J. 1747: »Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte« (§. 10) den Versuch gemacht hat, »die

1) z. B. *Lotze* (Logik, 1874, S. 227), *Dühring* (Kritische Geschichte der Principien der Mechanik, 1873, S. 488), *M. Tobias* (Grenzen der Philosophie constatirt gegen Riemann und Helmholtz, 1875, S. 38—79); wogegen *F. A. Lange* (Geschichte des Materialismus, 2. Aufl., 1875, II. S. 450) die Mathematiker in einsichtsvoller Weise rechtfertigt.

dreifache Abmessung des Raums« aus dem Gesetz, nach dem »die Substanzen in der existirenden Welt auf einander wirken«, nämlich dem Gravitationsgesetz zu erklären, [1]) aber mit dem Zusatz, dass »aus einem andern Gesetz auch eine Ausdehnung von anderen Eigenschaften und Abmessungen geflossen wäre,« und dass er, wie ein Seher der Zukunft, diese Betrachtung mit den denkwürdigen Worten schliesst: »eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumarten wäre ohnfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte.«

1) Bekanntlich leitete er später (in den metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft) umgekehrt das Gravitationsgesetz a priori aus der kugelförmigen Ausbreitung des Raums ab, worin ihm jedoch schon *Halley* vorangegangen war.

Jahresbericht

der

Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

Leipzig, im März 1876.

Eines der ältesten und verdientesten Mitglieder der Gesellschaft, Herr Prof. Dr. G. T. Fechner, hat der Gesellschaft den Wunsch ausgedrückt, in Anbetracht seiner Gesundheit, seiner Stellung als actives Mitglied enthoben zu sein. Auf das an ihn gerichtete Ersuchen hat er eingewilligt, der Gesellschaft auch fernerhin als Ehrenmitglied anzugehören. Als actives Mitglied ist darauf der Professor der Zoologie, Herr Dr. Med. et Phil. Rudolf Leuckart in Leipzig erwählt worden.

Was die von der Gesellschaft gestellten Preisaufgaben betrifft, so ist zuvörderst über den Erfolg der beiden zu berichten, welche den Jahresberichten von 1874 und 1875 zufolge der öffentlichen Concurrenz entzogen worden sind.

Für die pro 1873 gestellte Aufgabe

> »einer quellenmässigen Geschichte des polnischen Getreidehandels mit dem Auslande«

war dem damaligen Bewerber der Termin zur völligen Ausarbeitung seines Werkes bis zum 30. Nov. 1875 erstreckt worden. Es ist jedoch bis jetzt der Gesellschaft keine Bewerbungsschrift zugegangen.

Die für das Jahr 1874 gestellte Aufgabe, welche

> »eine eingehende Erforschung des besonderen Verhältnisses, in welchem innerhalb der indogermanischen Gemeinschaft die Sprachen der litauisch-slawischen Gruppe zu den germanischen stehen«

betraf, hatte im vorigen Jahre zwei Bearbeitungen gefunden, nämlich

A) eine mit dem Motto »*i slovo bě otŭ boga*« bezeichnete, welche die ganze Frage in übersichtlicher Kürze und in vielfach anzuerkennender Weise behandelt, und

B) eine unvollendete, aber einen kleinen Theil des Stoffes in überaus eindringlicher Weise behandelnde Schrift.

Die Preisschrift A) wurde dem Verfasser unter Bezeichnung mehrerer für seinen Zweck wichtiger, ihm unbekannt gebliebenen Schriften, zur Ergänzung des Fehlenden zurückgestellt. Als sie in verbesserter Gestalt auf's Neue eingereicht wurde, erschien sie des ausgesetzten Preises von 60 Ducaten würdig und wird demnächst in den Schriften der Gesellschaft erscheinen.

Als Verfasser ergab sich

Herr Dr. R. Hassencamp, Oberlehrer am Königl. Marien-Gymnasium in Posen.

Dem Verfasser der Preisschrift B) war bei der tiefer in die Einzelheiten eingehenden Anlage seiner Vorlage gestattet worden, sich auf eine einzelne Seite der Frage, nämlich die Declination der Nomina und Pronomina zu beschränken. Als derselbe nunmehr im November 1875 eine auf den umfassendsten Studien beruhende, mit grosser Selbstständigkeit durchgeführte, vollständige Vergleichung der germanischen Declination mit der litauisch-slawischen vorlegte, beschloss die Gesellschaft, in Anbetracht der ebenso umfänglichen wie werthvollen Leistung, für die in ihren Schriften abzudruckende Abhandlung den ausgesetzten Preis auf 800 Mark zu erhöhen.

Als Verfasser ergab sich

Herr Dr. A. Leskien, Professor der slawischen Sprachen an der Universität zu Leipzig.

Zur Lösung der beiden für das Jahr 1875 gestellten Preisaufgaben sind der Gesellschaft zwei Abhandlungen übersandt worden.

Der Verfasser der ersten, mit einem Motto aus Grimm's Geschichte der deutschen Sprache bezeichneten Arbeit, liefert

»eine Geschichte der Ausbreitung und Weiterentwickelung der deutschen Sprache in

Ost- und Westpreussen bis zum Ende des 15. Jahrhunderts, mit besonderer Rücksicht auf die Betheiligung der beiden deutschen Hauptdialekte an derselben.«

Nach dem Urtheile der Gesellschaft geht jedoch aus der vorgelegten Schrift hervor, dass ihr Verfasser sich die Nothwendigkeit einer guten linguistischen Vorbildung wohl nicht genügend klar gemacht hat, und dass auch die geschichtlichen Studien, deren Fleiss und Hingebung gern anerkannt werden, eine straffe systematische Anlage und bald die quellenmässige Begründung, bald aber auch die Aussonderung des nutzlosen Materials vermissen lassen. Die Gesellschaft hat sich daher nicht entschliessen können, der übersandten Abhandlung den Preis zuzuerkennen; das Manuscript kann unter näherer Angabe des Motto's, nebst der versiegelten Schedula beim Secretariat der Gesellschaft in Empfang genommen werden.

Die zweite der eingegangenen Abhandlungen betraf die mathematisch-physikalische Aufgabe

»einer endgültigen Feststellung der Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes durch neue Untersuchungen.«

Zu ihrem lebhaften Bedauern hat sich die Gesellschaft nicht in der Lage gesehen, die ihr überreichte Schrift zur Preisbewerbung zuzulassen, weil der Verfasser die statutenmässig geforderte Anonymität nicht beobachtet hat. Das Manuscript hat demgemäss dem Einsender zurückgestellt werden müssen.

Für die Jahre 1876—1879 sind die von der Gesellschaft gestellten Preisaufgaben folgende:

I. Historisch-nationalökonomische Section.

1. Für das Jahr 1876.

Indem die Gesellschaft den

Häringsfang und Häringshandel im Gebiete der Nord- und Ostsee

als Thema aufstellt, glaubt sie mit dieser allgemeinen Fassung desselben nur die Richtung andeuten zu sollen, in welcher sie

handelsgeschichtliche Forschungen anzuregen wünscht. Sie überlässt es den Bearbeitern, den Antheil einzelner Völker, Emporien oder Gruppen derselben, wie etwa der hanseatischen, am Häringsfang und Häringshandel zu schildern. Sie wünscht der Aufgabe auch nicht bestimmte zeitliche Grenzen zu stecken, und würde eben so gern eine auf den Urkundenbüchern und anderen Geschichtsquellen begründete Darstellung des mittelalterlichen Häringshandels, wie eine mehr statistische Bearbeitung des modernen hervorrufen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1877.

Der hohe Reiz der italienischen Geschichte in den letzten Jahrhunderten des Mittelalters beruht grossentheils darauf, dass sich hier, bei dem zuerst gereiften Volke unter den neueren, schon eine Menge von Bedürfnissen, Grundsätzen und Anstalten der höheren Culturstufen wahrnehmen lässt, während daneben in Italien selbst und mehr noch im übrigen Europa so viel Mittelalterliches noch fortdauert. Auch in der italienischen Volkswirthschaft finden wir denselben Contrast echt moderner Fortschritte auf einer noch wesentlich mittelalterlichen Grundlage. Die Gesellschaft wünscht daher

> eine quellenmässige Erörterung, wie weit in Ober- und Mittel-Italien gegen Schluss des Mittelalters die modernen Grundsätze der agrarischen, industriellen und mercantilen Verkehrsfreiheit durchgeführt waren.

Sollte sich eine Bewerbungsschrift auf den einen oder anderen italienischen Einzelstaat beschränken wollen, so würde natürlich ein besonders wichtiger Staat zu wählen sein, wie z. B. Florenz, Mailand oder Venedig.

Da wir hoffen, dass vorstehende Preisfrage namentlich auch in Italien selbst Anklang finden wird, so erklären wir uns für diesen Fall ausnahmsweise bereit, auch in italienischer Sprache abgefasste Bewerbungschriften zuzulassen. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1878.

Bei der historischen Wichtigkeit der Ortsnamen als Zeugen für die wechselnden Wohnsitze der verschiedenen Völker und Stämme, wünscht die Gesellschaft, dass unter sorgfältiger Benutzung des um Vieles zugänglicher gewordenen urkundlichen Materials und andererseits mit gewissenhafter Benutzung dessen, was die heutige Sprachwissenschaft an sicheren Ergebnissen zu Tage gefördert hat,

> eine wohlgeordnete, aus den besten erreichbaren Quellen geschöpfte Zusammenstellung der deutlich nachweisbaren slawischen Namen für Ortschaften des jetzigen deutschen Reiches

veranstaltet werde.

Da eine Bearbeitung des gesammten Stoffes die Grenzen einer Abhandlung weit überschreiten würde, bleibt es dem Bearbeiter der Preisfrage überlassen sich irgend ein nicht allzu beschränktes, aber auch nicht übermässig ausgedehntes Gebiet für seine Untersuchung zu wählen. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1879.

Bei der grossen und für die jeweilig erreichte Entwickelungsstufe der ganzen Volkswirthschaft charakteristischen Bedeutung, welche die Handelsmessen besitzen, wünscht die Gesellschaft

> eine quellenmässige Geschichte der Messen in einem der drei grossen deutschen Messplätze (Leipzig, Frankfurt a/M. oder Frankfurt a/O.) und zwar von der Mitte des 17. Jahrhunderts an bis zur Gegenwart.

Preis 700 Mark.

II. Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

1. Für das Jahr 1876.

Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Merkur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgültig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

Untersuchung der die Bewegung des Merkur bestimmenden Kräfte,

mit Rücksicht auf die von Laplace (in der Mécanique céleste), von Leverrier (in den Annales de l'Observatoire und den Comptes rendus de l'Académie des Sciences), von Hansen (in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. W. vom 15. April 1863) und von Wilhelm Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Cometen, S. 333) angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Die Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalieen gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine

solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt desshalb die Aufgabe:

> die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1878.

Die Entwickelung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r}\left(1+2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}} \quad \ldots\right) =$$

$$= 1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{16\pi r^2}{a^2}} \quad \ldots$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r} = 1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+\ldots$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwickelung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besonderen Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahrzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwickelung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher

von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

> Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) und der durch Bildungshemmnisse oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.

Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1876 Geh. Hofrath Prof. Dr. Hankel) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

NEUN UND ZWANZIGSTER BAND.

1877.

MIT 1 LITHOGRAPHIRTEN TAFEL.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

INHALT.

Seite

M. W. Drobisch, Ueber reine Stimmung und Temperatur der Töne 1

W. Hankel, Ueber das Crookes'sche Radiometer 67

W. Hankel, Ueber die Photoelektricität des Flussspathes. (Mit 1 Tafel.) 71

A. Mayer, Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte 86

O. Schlömilch, Ueber einige unendliche Reihen 101

O. Schlömilch, Ueber die Summen von Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen 106

W. Knop, Einige neue Resultate der Untersuchung über die Ernährung der Pflanze 109

A. Mayer, Die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale in den isoperimetrischen Problemen. 114

H. E. Grassmann, Zur Theorie der reciproken Radien. Mitgetheilt von C. Neumann. 133

C. Neumann, Ueber die peripolaren Coordinaten 134

C. Neumann, Zur Theorie der conformen Abbildung einer ebenen Fläche auf eine Kreisfläche 154

F. Zirkel, Ueber die krystallinischen Gesteine längs des 40. Breitegrades in Nordwest-Amerika. 156

In den Sitzungen der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften wurden im Laufe des Jahres 1877 nachstehende Vorträge gehalten:

am 22. Januar: F. Zirkel, über die krystallinischen Gesteine längs des 40. Breitegrades in Nordwest-Amerika.

F. Zöllner, über Radiometer.

am 5. März: M. W. Drobisch, über reine Stimmung und Temperatur der Töne.

F. Zöllner, über Radiometer.

am 23. April: W. Hankel, über die Photoelektricität des Flussspathes.

F. Zöllner, über Radiometer.

A. Mayer, über den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systemes bewegter materieller Punkte.

am 4. Juni: W. Knop, über einige neue Resultate der Untersuchung über die Ernährung der Pflanze.

O. Schlömilch, über einige unendliche Reihen.

am 2. Juli: O. Schlömilch, über die Summen von Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen.

am 30. Juli: A. Mayer, über die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale in den isoperimetrischen Problemen.

C. Neumann, über die peripolaren Coordinaten und die Theorie der conformen Abbildung einer ebenen Fläche auf eine Kreisfläche.

W. Hankel, über die Krystallform des chlorsauren Natrons.

am 14. Nov.: W. Hankel, über das thermoelektrische Verhalten des Flussspathes.

am 15. Dec.: C. Bruhns, über vom Observator Weinek ausgeführte Zeichnungen des Mars und des Zodiakallichtes.

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglieder.

Seine Excellenz der Minister des Königlichen Hauses, Freiherr *Johann Paul von Falkenstein*.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber*.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.

- Professor *Friedrich Zarncke* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
- Geheimer Hofrath *Georg Curtius* in Leipzig.
- Professor *Georg Ebers* in Leipzig.
- —— *Adolf Ebert* in Leipzig.
- —— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
- Domherr und Geheimer Rath *Gustav Hänel* in Leipzig.
- Professor *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.

Herr Professor und Universitäts-Oberbibliothekar *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- Professor *Ludwig Lange* in Leipzig.
- —— *August Leskien* in Leipzig.
- Oberschulrath *Carl Joachim Marquardt* in Gotha.
- Professor *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Professor *Anton Springer* in Leipzig.
- —— *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.

Se. Exc. Herr Wirkl. Geheimer Rath *Karl Georg von Wächter* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Conrad Bursian* in München.
- —— *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Hermann Alfred von Gutschmid* in Tübingen.
- Geheimer Justiz- und Oberappellationsgerichtsrath *Andreas Ludwig Jacob Michelsen* in Schleswig.
- Professor *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.
- —— *Karl Bernhard Stark* in Heidelberg.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Wilhelm Scheibner* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Carl Bruhns* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- —— *Wilhelm His* in Leipzig.
- —— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Hermann Kolbe* in Leipzig.
- Professor *Adalbert Krüger* in Gotha.
- Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
- —— —— *Carl Friedrich Wilhelm Ludwig* in Leipzig.
- Professor *Adolph Mayer* in Leipzig.
- —— *Carl Neumann* in Leipzig.
- Oberbergrath *Ferdinand Reich* in Freiberg.
- Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- Hofrath *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
- Professor *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.
- —— *Johann Carl Friedrich Zöllner* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
- Hofrath *Otto Funke* in Freiburg.
- Geheimer Hofrath *Carl Gegenbauer* in Heidelberg.
- Staatsrath *Mathias Jacob Schleiden* in Wiesbaden.
- Professor *Samuel Friedrich Nathanael Stein* in Prag.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1877 eingegangenen Schriften.

Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1876. Berlin 1877.

Preussische Staatsschriften aus der Regierungszeit König Friedrich II. Im Auftrage der Königl. Akademie der Wissensch. zu Berlin herausg. von J. G. Droysen und M. Duncker. I. Bd. Berlin 1877.

Monatsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1876. Sept. — Dec. 1877. Jan. — Aug.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathematisch-naturwissensch. Cl. Bd. 36. Wien 1876.

Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Jahrg. 1877. Nr. II. Sitzung d. mathem.-naturwiss. Classe vom 11. Jänner. Nr. III. Sitzung u. s. w. vom 18. Jänner. — Nr. VI. Nr. VII. Sitzung u. s. w. vom 1. März und vom 8. März. Dazu: Inhalt des 1. und 2. Heftes (Juni u. Juli 1876) des 74. Bandes, III. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturwiss. Classe. Nr. VIII. Sitzung u. s. w. vom 15. März. Nr. X. Sitzung u. s. w. vom 19. April. Nr. XI. Sitzung u. s. w. vom 26. April. Nr. XII. Sitzung u. s. w. vom 11. Mai. Nr. XIV. Sitzung v. 7. Juni. Nr. XV. Sitzung v. 14. Juni. Nr. XVII. Sitzung v. 5. Juli. Nr. XVIII. Sitzung v. 12. Juli. Nr. XX Sitzung v. 11. Oct. Nr. XXI. Sitzung v. 18. Oct. Nr. XXII. Sitzung v. 25. Oct. Nr. XXV. und XXVI. Sitzung v. 22. Nov.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 71, Heft 3—5, Wien 1875. Bd. 72, Heft 1—5, Wien 1875/76. Bd. 73, Heft 1—3, Wien 1876.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwiss. Cl. Jahrg. 1876. Nr. 13. 14. Jahrg. 1877. Nr. 1—24.

Almanach d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. 1876. Jahrg. XXVI. Wien 1876.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrgang 1876. No. 11—17. Jahrg. 1877. No. 1—6. Wien.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1876. XXVI. Bd. No. 3 und 4. Hierzu: G. Tschermak, Mineralogische Mittheilungen. VI. Bd. 4. Heft. Jahrg. 1877. XXVII. Bd. No. 1. Jänner, Februar, März. Hierzu: G. Tschermak, Mineralog. Mittheilungen, VI. Bd., 1. Heft. Jahrg. 1877. XXVII. Bd. No. 2 (April—Juni) mit Tafel I. u. II. Hierzu: G. Tschermak, Mineralog. Mittheilungen, VI. Bd. 2. Heft. Wien.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. VII, Heft 4, Wien 1877. Bd. IX, Wien 1877.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1876. Bd. XXVI. Wien 1877.

Mittheilungen aus dem Jahrbuche der königl. ungarischen geologischen Anstalt. Bd. III. Heft 3. Bd. IV. Heft 1. 3. Bd. V. Heft 1. Pest 1875—1876.

Természetrajzi Füzetek az Állat-, Növény-, Ásvány- és Földtan Köréből. Évnegyedes Folyóirat. Kiadya a Magyar Nemzeti Múzeum. Elsö Kötet. I. Füzet (Januar—März). II. Füzet (April—Juni). III. Füzet (Juli—Sept.). IV. Füz. (October—Dezember). Budapest 1877 (Naturhistorische Hefte. Vierteljahrsschrift für Zoologie, Botanik, Mineralogie und Geologie nebst deutsch redigirter Revue, herausgegeben vom Ungarischen National-Museum in Budapest. Redigirt von Otto Herman).

Untersuchungen über die Einkommensteuer der Stadt Pest für das Jahr 1870. Von Josef Körösi, Director des städt. statistischen Bureau's. Uebersetzung aus dem Ungarischen. Pest 1873.

Statistisches Jahrbuch der Stadt Pest. Erster Jahrg. Von Josef Körösi, Dir. d. städt. statist. Bureau's. Uebersetzung aus dem Ungarischen. Pest 1873.

Die Bauthätigkeit Pest's im J. 1872. Von Josef Körösi. Pest 1873.

Bericht der Handels- und Gewerbekammer in Budapest über die Handels- und Verkehrsverhältnisse des Kammerbezirkes im J. 1875. Budapest 1876. 4.

Bericht der Budapester Handels- und Gewerbekammer über Gewerbe und Industrie des Budapester Kammerdistricts für die Jahre 1870—75. Aus dem Ungarischen übersetzt. Budapest 1877.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrg. 1876. Nr. 1—7. Prag 1877.

Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften vom J. 1875 und 1876. Enthält a) die Abhandlungen der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie, b) die Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe. Sechste Folge. Achter Band. Prag 1877.

Jahresbericht der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, ausgegeben am 12. Mai 1876.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1876, von L. Hornstein. Siebenunddreissigster Jahrg. Prag 1877.

Lotos. Zeitschrift für Naturwissenschaften. Herausgeg. vom naturhistor. Vereine »Lotos« in Prag. 26. Jahrg. Prag 1877. (Titel heisst jetzt: Jahresbericht des naturhistorischen Vereins Lotos für 1876.)

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. XIV. Jahrg. Nr. III u. IV. XV. Jahrg. Nr. I u. II. Prag 1876.

Beiträge zur Geschichte Böhmens. Herausgeg. vom Vereine für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Abtheil. IV. Städte-Bücher. Bd. I. Stadtbuch von Brüx bis zum Jahr 1526. Bearbeitet von Dr. L. Schlesinger. Prag 1876.

Wilhelm von Wenden. Ein Gedicht Ulrichs von Eschenbach. Herausgeg. von Wendelin Troischer. Gedruckt auf Kosten des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Prag 1876. 8.

Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins in Aussig. Aussig 1877.

Mittheilungen des historischen Vereines für Steiermark. 25. Heft. Graz 1877.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Herausgeg. vom histor. Vereine für Steiermark. 14. Jahrg. Graz 1877.

Die Romanen und ihre Verbreitung in Oesterreich. Ein Beitrag zur Nationalitäts-Statistik mit einleitenden Bemerkungen über deren Verhältniss zu den Rechts- und Staatswissenschaften von H. J. Bidermann. Festschrift der k. k. Universität Graz aus Anlass der Jahresfeier am XV. Nov. 1876. Graz 1877.

Berichte des naturwiss.-medizin. Vereines in Innsbruck. 6. Jahrg. 1875. 2. Heft. Innsbruck 1876.

Abhandlungen der philosoph.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. 14. Bd. 1. Abth. (In d. Reihe d. Denkschriften d. XLIX. Bd.) München 1877.

Abhandlungen der histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. 13. Bd. 2. Abth. (In d. Reihe d. Denkschriften d. XLVII. Bd.) München 1877.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. 12. Bd. 3. Abth. (In d. Reihe d. Denkschriften d. XLIV. Bd.) München 1876.

Ueber den Inhalt der allgemeinen Bildung in d. Zeit d. Scholastik. Festrede gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. der Wissensch. am 28. März 1876 von Dr. Freiherr R. von Liliencron. München 1876.

Nānak, der Stifter der Sikh-Religion. Festrede gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wissensch. am 25. Juli 1876 von Dr. Ernst Trumpp. München 1876.

Die geognostische Durchforschung Bayerns. Rede in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wissensch. am 28. März 1877 gehalten von C. W. Gümbel. München 1877.

Verstehen und Beurtheilen. Festgabe zum Doctor-Jubiläum des Herrn Prof. Dr. L. v. Sprengel u. s. w., verfasst von Carl von Prantl. München 1877.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München. 1876. Heft 5. — 1877. Heft 1. 2. München 1877.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1876. Heft 3. 1877. Heft 1. u. 2. München 1877.

Achtzehnte Plenar-Versammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Secretariats. München im Oct. 1877.

Annalen der königl. Sternwarte bei München, von Dr. J. v. Lamont. XXI. Bd. (Der vollständigen Sammlung XXXVI. Bd.). München 1876.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Einundwanzigster Bd. v. J. 1876. Göttingen 1876.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1876. Göttingen 1876.

Neues Lausitzisches Magazin. Herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. 52. Bd. 2. Heft. 53. Bd. 1. 2. Heft. Görlitz 1876. 1877.

Leopoldina, amtliches Organ der kais.-leopoldinisch-carolinisch-deutschen Akademie der Naturforscher. Heft XIII. Nr. 1—20. 23 u. 24. Dresden 1877.

Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. I. Jahrg. 1874. Leipzig 1875.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureau's. XXII. Jahrg. 1876. Heft 3 u. 4. Dresden 1876. XXIII. Jahrg. 1877. Heft 1 u. 2. Dresden 1877.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. XII. Jahrg. 1. 2. 3. Heft. Leipzig 1877.

Kgl. Sächs. Polytechnicum zu Dresden. Programm für das Studienjahr, beziehungsweise Wintersemester 1877/78.

Zeitschrift f. d. gesammten Naturwissenschaften, redig. von C. G. Giebel. Neue Folge. Bd. XIII. u. XIV. 1876. Berlin 1877.

Die Fortschritte der Physik im J. 1872, dargestellt von der physikal. Gesellsch. in Berlin. Jahrg. XXVIII. 1. 2. Abth. Berlin 1877.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Neunter Jahrg. (1876.) Register. Zehnter Jahrg. (1877.) Nr. 1—19.

Der Musenchor. Relief einer Marmorbasis aus Halikarnass. Sechsunddreissigstes Programm zum Winckelmannsfest der archäologischen Gesellschaft zu Berlin von Adolf Trendelenburg. Berlin 1876.

Beitrag zur griechischen Gewichtskunde. XXXVII. Programm zum Winckelmannsfeste der archäologischen Gesellschaft zu Berlin. Von Dr. Schillbach. Berlin 1877.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. von Ohrtmann, Müller u. Wangerow. VI. Bd. Heft 2 u. 3. VII. Bd. Heft 1—3. Berlin 1876/77.

Zuwachs der Grossherzoglichen Bibliothek zu Weimar in den Jahren 1874, 1875 und 1876. Weimar 1877.

Vierundfünfzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1876. Breslau 1877.

Schriften der Universität zu Kiel aus d. J. 1876. Bd. XXIII. Kiel 1877.

Die Einweihungsfeier des neuen Universitätsgebäudes zu Kiel, 24. bis 26. October 1876. Von Dr. F. Volbehr. Kiel 1876.

Jahresbericht des physikal. Vereins zu Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1875—1876. Frankfurt, im Mai 1877.

Resultate der in den 43 Jahren 1833—1875 angestellten Sternschnuppen-Beobachtungen von Dr. Ed. Heis. II. Veröffentlichung der königlichen Sternwarte zu Münster. Münster 1877.

Festschrift zur Säcularfeier des Geburtstages von C. Fr. Gauss, dargebracht vom herzogl. Collegium Carolinum zu Braunschweig. Ueber die Anzahl der Ideal-Classen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers. Von Richard Dedekind. Braunschweig 1877. (2 Exx.)

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Societät zu Erlangen. 9. Heft. Nov. 1876 bis Aug. 1877. Erlangen 1877.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellsch. in Würzburg. Neue Folge. Bd. VIII. Heft 1 u. 2. Bd. X. Heft 3 u. 4. Würzburg 1874 u. 1877.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. I. Bd. 5. Heft. II. Bd. 1. Heft. Heidelberg 1877.

Mittheilungen des histor. Vereins der Pfalz. VI. Die praehistorischen Funde der Pfalz, bearbeitet von Dr. C. Mehlis, und Vereinsangelegenheiten, Leipzig 1877.

16. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1877.

Korrespondenzblatt des Vereins für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben. Erster Jahrg. 1876. Nr. 2. 5. 10. 11. 12. Zweiter Jahrg. 1877. Nr. 1. 2. 5.

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. 59. Jahresbericht 1875/6. Basel 1877.

Neue Denkschriften der allgemeinen Schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften. Bd. 27 oder 3. Decade. B. 7. Abth. 2. Zürich 1877.

Archiv des historischen Vereins des Kanton Bern. IX. Bd. 1. Heft, Bern 1876. 2. Heft, Bern 1877.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1876. Nr. 906—922. Bern 1877.

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. Tome XXV, partie 1. Genève 1876—1877.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afd. Natuurkunde. 16. Deel. Amsterdam 1876.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afd. Natuurkunde. 2e Reeks. 10e Deel. Amsterdam 1877.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam voor 1875. Amsterdam 1875.

Processen-Verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Afd. Natuurkunde. Mei 1875 – April 1876.

Programma certaminis poetici ab Academia Regia disciplinarum Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1877.

Nederlandsch Kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeel. d. Nederl. Botanische Vereeniging. Tweede Serie. 2e Deel. 3. Stuk. Nijmegen 1877.

Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Uitgeg. door F. C. Donders en Th. W. Engelmann. Derde Reeks. IV. Afl. II. Utrecht 1877.

Catalogus van de boeken op 1 Januari 1877 aanwezig in de Bibliotheek der Sterrenwacht te Leiden; uitgegeven door H. G. v. d. Sande Backhuyzen. s' Gravenhage 1877.

Achttiende jaarlijksch Verslag betrekkelijk de verpleging en het onderwijs in het Nederlandsch Gasthuis voor ooglieders, uitgebracht in Mei 1877 door F. C. Donders. Utrecht 1877.

Bijdragen tot de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. Verslag der feestviering van het vijf en twintigjaarig bestaan van het Instituut. (1851—1876.) 's Gravenhage 1876. — Bijdragen &c. Derde Volgreeks. Elfde Deel. 1e Stuk. 2e Stuk. — Vierde Volgreeks. Eerste Deel. 1e Stuk. 's Gravenhage 1876. 1877.

Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1874. Uitgegeven door het Kon. Nederl. meteorologisch Instituut. Drie en twintigste Jaargang. Tweede Deel. Utrecht 1875. voor 1875. Zeven en twintigste Jaargang. Utrecht 1876.

Verslag van het Verhandelde in de algemeene Vergadering van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, gehouden d. 29 Juni 1875. Utrecht 1875. — gehouden d. 20 Juni 1876. Utrecht 1875. 1876.

Aanteekeningen van het Verhandelde in de Sectie-Vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, ter gelegenheid van de algemeene Vergadering gehouden in het Jaar 1875. Utrecht 1875. — gehouden in het Jaar 1876. Utrecht 1875. 1876.

Het Klooster te Windesheim en zijn invloed, door Dr. J. G. R. Acquoy. Uitgegeven door het Prov. Utr. Genootsch. v. K. en W. Tweede Deel. Utrecht 1876.

La Construction de l'Eglise paroissiale de St. Jacques à Utrecht. Plan et coupe architectoniques avec indication des agrandissements successifs, précédés d'une note explicative par W. Pleyte. Sous les auspices de la Société »Het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van K. en W.« Leide 1876.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden en van de aldaar volbrachte werkzaamheden, in het tijdvak van d. 1. Juli 1876 tot de laatste dagen der maand Juni 1877, uitgebracht door H. G. van de Sande Bakhuyzen. Amsterdam 1877.

Carte géologique du Grand-Duché de Luxembourg par N. Wies et P. M. Siegen, publiée par les soins de la Section des Sciences naturelles de l'Institut Royal Grand-Ducal. Paris, imprimerie Lemercier, 1877. 8 Bll. (mit Titelbl. 9 Bll.).

Wegweiser zur geologischen Karte des Grossherzogthums Luxemburg von N. Wies. Luxemburg 1877.

Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles. T. XVI.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. Nieuwe Serie. Vijfde Deel. Die israelitischen Eigennamen nach ihrer religionsgeschichtlichen Bedeutung. Ein Versuch von Dr. Eberhard Nestle. Von der Teyler'schen Gesellschaft gekrönte Preisschrift. Haarlem 1876.

Programme de la seconde Société Teyler, à Haarlem, pour l'année 1877 (Preisaufgabe), 1 Bl.

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. XI. Livr. 4 et 5. T. XII. Livr. 1. Harlem 1876. 1877.

Programme du Congrès International de Botanistes, d'Horticulteurs, de Négociants et de Fabricants du règne végétal.

Supplement-Programm. Internationale Gartenbau-Ausstellung und Congress im J. 1877, zu Amsterdam.

Annales de la Société entomologique de Belgique. Tome XIX. Bruxelles 1876.

Société entomologique de Belgique. Comptes-rendus. Série II. No. 30. 32—42. 44. 1876. 1877.

Elenco de' Partecipanti dell' Imper. Instituto archeologico germanico alla fine dell' anno 1876. — Bullettino dell' Instituto di corrispondenza archeologica per l'anno 1877. Roma 1877. No. I—XI. Gennajo—Nov.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. XX., Venezia 1876.

Atti del R. Istituto Veneto &c. dal Nov. 1875 all' Ott. 1876. Tomo II, Serie V, Disp. IV—X. Venezia 1875—76; dal Nov. 1876 all' Ott. 1877. Tomo III, Serie V, Disp. I—VII. Venezia 1876—77.

Temi di premio proposti dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti nella solenne adunanza del 15 agosto 1877.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Cl. di lettere e scienze morali e politiche. Vol. XIII. IV della Serie III. Fasc. III. — Cl. di scienze matematiche e naturali. Vol. XIII. IV della Serie III. Fasc. III. e ultimo. Milano 1877.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Serie II. Vol. IX. Milano 1876.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XII. Disp. 1. 2. 3. 4. 5.

Atti della R. Accademia dei Lincei, Serie seconda, Vol. I, anno CCLXXI, 1873—74. Roma 1875. Vol. II, anno CCLXXII, 1874—75. Roma 1875. Vol. III, anno CCLXXIII, 1875—76, Roma 1876, nebst Statuten vom Jahre 1874. Anno CCLXXIV, 1876—77. Serie terza. Transunti Vol. I. Fasc. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 1877. Roma 1877.

Bollettino meteorologico ed astronomico del Reg. Osservatorio della Reg. Università di Torino. Anno XI (1876). Torino 1877.

Iscrizione trilingue sopra lamina di bronzo, parte d'ornato di una colonna votiva trovata in Pauli Gerrei in Sardegna nel Febbrajo 1864, offerta in dono per memoria e gratitudine alla R. Accademia delle scienze di Torino dall' Accademico Giovanni Spano (Photographie in Breitfolio nebst einem gedruckten Ueberweisungsschreiben der Akademie von Turin, d. 12. Juni 1877).

Bullettino della Società di scienze naturali ed economiche di Palermo. No. 3. Seduta del 12 agosto 1877.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. II. Fasc. 2 e ultimo. Vol. III. Fasc. 1. Pisa 1876. 1877.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Della Serie Vol. III. Filosofia e Filologia. Vol. II. Pisa 1877.

Società Toscana di scienze naturali. Adunanza ordinaria del 10 Luglio 1877.

The Ādi Granth, or the holy Scriptures of the Sikhs, translated from the original Gurmukhī, with introductory Essays by Dr. Ernest Trumpp. Printed by order of the Secretary of State for India in Council. London 1877.

A Catalogue of the Arabic Mss. in the Library of the India Office. By Otto Loth. Printed by order of the Secretary of State for India in Council. London 1877.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. Vol. 165. P. II. (1875.) London 1876. Vol. 166. P. I. (1876.) London 1876.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXIV. No. 164—170. Vol. XXV. No. 171—174. London 1876. 1877.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. VIII. P. I. No. 64. P. II. No. 65. London 1876.

Transactions of the Cambridge philosophical Society. Vol. XI. P. III. Cambridge 1871. Vol. XII. P. I. u. II. Cambridge 1873. 1877.

Proceedings of the Cambridge philosophical Society. Vol. III. P. I. u. II. 1876/77.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 27. Part. 4. For the Session 1875—76.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Session 1875—76.

Catalogue of the books in the library of the Manchester literary and philos. society. Manchester 1875.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. XXV. P. XX. Dublin 1875. Vol. XXVI. P. I—V. Dublin 1876.

Proceedings of the R. Irish Academy. Vol. I. No. 11. Dublin 1875. Vol. II. No. 5 u. 6. Dublin 1876.

Proceedings of the Dublin University Biological Association. Vol. I. Session 1874—75. No. 2. Dublin 1876.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des sciences. Tome 22. Paris et Lyon 1876—77.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 2. Sér. T. II. 1. Cahier. Paris et Bordeaux 1877.

Société Nationale des sciences naturelles de Cherbourg. Compte-rendu de la Séance extraordinaire tenue par la Société le 30 décembre 1876, à l'occasion du vingt-cinquième anniversaire de sa fondation. Cherbourg 1877.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des sciences, Tome VIII. 3. Fasc. Année 1875. Montpellier 1875.

Programa de un concurso extraordinario que abre esta Real Academia, á ruego del Excelentisimo Sr. Cárlos Larios Martinez de Tejada Llera y Ferry, Marqués Guadiaro para premiar una Memoria sobre el tema siguiente: Demostracion de que entre la Religion católica y la Ciencia no pueden existir conflictos (1 halber Bogen 4).

Programa de un concurso extraordinario que abre esta Real Academia á ruego del Excmo. Sr. D. José Luis Retortillo Imbrechts, Marqués de Retortillo, para premiar una Memoria sobre el tema siguiente: Exposicion y determinacion de las reformas y mejoras que convenga introducir en la organizacion y régimen de todos los servicios en los Hospitales, Inclusa, Colegio de la Paz, Casa de Maternidad, Hospicio y Colegio de Desamparados de Madrid (1 halber Bogen 4).

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1875. Med Bilag. No. 2 u. 3. Aaret 1876. No. 1. 2. Kjøbenhavn.

Tyge Brahes meteorologiske Dagbog, holdt paa Uraniborg for aarene 1582—1597. Udgiven som appendix til Collectanea meteorologica af det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab ved dets meteorologiske Comité. Kjøbenhavn 1876.

Fremstelling af Resultaterne af nogle undersøgelser over de ved vindens kraft fremkaldte strømninger i havet. Af A. Colding. (Vidensk. Selsk. Skr., 5te Række, naturvidensk. og mathemat. Afd. 11te Bd. III.). Kjøbenhavn 1876.

Magnetiske Undersøgelser af C. Christiansen. (Vidensk. Selsk. Skr., 5te Række, naturvidensk. og mathemat. Afd., 11te Bd. IV.). Kjøbenhavn 1876.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. 21. Binds 3. 4. Hefte. 22 Binds. 1. 2. 3. 4. Hefte. (2. Rækkes 1. Bind. 3. 4. Hefte. 2 Rækkes 2. Bind. 1. 2. 3. 4. Hefte.) Christiania 1875—1877.

Beretning om Bodsfængslets Virksomhed i Aaret 1875. Christiania 1876.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1875. Christiania 1876.

Det Kong. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for Aaret 1875 med Bilage. Christiania 1876.

Kongeriget Norge og det Norske Folk &c. ved Br. O. J. Broch. Beretning afgiven til Kongressen for Sundhedsforhold og Redningsvæsen i Bryssel 1876. Kristiania 1876.

Windrosen des südlichen Norwegens. Mit der Goldmedaille König Carl's XV. belohnte Abhandlung von C. de Seue. (Universitätsprogramm für 1. Sem. 1876.) Kristiania 1876.

Études sur les mouvements de l'atmosphère par Guldberg et Mohn. (Universitätsprogramm für 2. Sem. 1876.) Kristiania 1876.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 13. 1874. Stockholm 1875—76. — Bd. 14. No. 1. 1875. Stockholm 1876.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Årgången 33. Stockholm 1876—77.

Meteorologiska Iakttagelser i Sverige, utgifna af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 16. (2. Ser. Bd. 2.) Stockholm 1876.

Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 3. H. 2. Stockholm 1876.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. Tom. X. 1873. Philosophi, Språkvetenskap och Historia. Lund 1873—74. Mathem. och Naturvet. Lund 1873—74. Tom. XI. 1874. Mathem. och Naturvet. Lund 1874—75.

Lunds Universitets-Bibliotheks Accessions-Katalog 1874 und 1875.

In memoriam quatuor seculorum ab universitate Upsaliensi peractorum. Volumen extra ordinem editum. Upsala 1877.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XVIII. 1875—1876. Helsingfors 1876.

Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk, utgifna af Finska Vetenskaps-Societeten. 20. 25. 26. Häftet. Helsingfors 1876. 1877.

Observations météorologiques publiées par la Société des sciences de Finlande. Année 1874. Helsingfors 1876.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VIIe Série. T. XXII, No. 11 u. 12. T. XXIII. No. 2—8. T. XXIV. No. 1—3. St.-Pétersbourg 1876—1877.

Bulletin de l'Acad. Impér. des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXII, No. 3 (feuilles 21—31). Déc. 1876. No. 4 (f. 32—36). T. XXIII. No. 1. 2 (f. 1—25). No. 3 (f. 26—52). T. XXIV. No. 1 (feuilles 1—11). No. 2 (f. 12—24). No. 3 (f. 22—28). St.-Pétersbourg 1876—1877.

Compte-rendu de la Commission Impériale Archéologique pour l'année 1872. 1873. 1874, mit den dazu gehörigen Atlanten. St. Pétersbourg 1875. 1876. 1877.

Acta horti Petropolitani. Supplementum ad Tom. III, Tom. IV, Fasc. 1. 2.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausgeg. von H. Wild. Jahrg. 1875. St. Petersburg 1876.

Repertorium für Meteorologie, herausgeg. von der Kaiserl. Akademie der Wissensch., redigirt von H. Wild. Bd. V. Heft 2. St. Petersburg 1877. Nebst Supplementband, 1. Hälfte.

Nouveaux Mémoires de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou. T. XIII. Livr. 5. Moscou 1875.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1876, No. 1—4. Année 1877. No. 1. 2. Moscou 1876—1877.

Annales de l'Observatoire de Moscou. Vol. III. Livr. 1. 2. Moscou 1877.

Jahresbericht der Nicolai-Sternwarte in Pulkova für 1875. 76. 77. St. Petersburg 1875—77.

Observations de Pulkova publiées par O. Struve. Vol. VII. St.-Petersbourg 1877.

Déclinaisons moyennes corrigées des étoiles principales etc. par Magnus Nyrén (Supplem. zu Vol. IV. der Pulkowaer Beobachtungen). St. Petersburg 1875.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat im J. 1875, redigirt und bearbeitet von Arthur von Oettingen und Karl Weihrauch. Zehnter Jahrgang. II. Bd. Heft 5 (Schluss). Dorpat 1877.

Zehnjährige Mittelwerthe (1866—1875) nebst neunjährigen Stundenmitteln (1867—1875) für Dorpat, redigirt und bearbeitet von Dr. K. Weihrauch. Ergänzungsheft zum 2. Bande der Dorpater meteorologischen Beobachtungen. Dorpat 1877.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XV, Dec. 1876, No. 96. Vol. XVI, Juni—Dec. 1876, No. 98. Jan.—Mai 1877, No. 99.

Instruments and Publications of the United States Naval Observatory. Published by Authority of the Hon. Secretary of the Navy. Rear-Admiral C. H. Davis, Superintendent. Washington 1845—1876.

Miscellaneous Publications No. 4 and No. 8, vom Departement of the interior (United States geologic. and geograph. survey of the territories). Washington 1874.

Catalogue of the publications of the United States geologic. and geograph. survey of the territories. Washington 1877 (second edition).

Supplement of the fifth annual report of the U. S. geological survey of territories for 1871. Washington 1872.

Preliminary report of the U. S. geolog. survey of Wyoming and portions of contiguous territories etc. by Hayden. Washington 1871.

Preliminary report of the U. S. geological survey of Montana and portions of adjacent territories, etc. by Hayden. Washington 1872.

Annual report of the U. S. geolog. and geograph. survey of the territories, embracing Colorado etc. by Hayden. Washington 1874.

Ninth annual report of the U. S. geolog. and geograph. survey of the territories, embracing Colorado and parts of the adjacent territories etc. by Hayden. Washington 1877.

Dreissigster Jahresbericht der Staats-Ackerbaubehörde von Ohio. Columbus, Ohio, 1876.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. Vol. II. P. IV. No. 5. Boston 1877.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XVIII. Part III. IV. Boston 1876/77.

Occasional papers of the Boston Society of Natural History. II. Boston 1875.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. New Series. Vol. IV. (Whole Series Vol. XII.) Boston 1877.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. IV. Nr. 10: The American Bisons, living and extinct. By J. A. Allen. Vol. V. No. 1: North American Starfishes. By Alexander Agassiz. With twenty plates. Cambridge 1876. 1877.

Annals of the astronomical observatory of Harvard College. Vol. VI, Cambridge 1871. Vol. VII, Cambridge 1871. Vol. VIII, Cambridge 1876.

Annual Report of the Trustees of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College in Cambridge, together with the Report of the Curator to the Committee on the Museum, for 1876. Boston 1877.

Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. III. No. 3 u. 4. Buffalo 1876—77.

Proceedings of the Davenport Academy of Natural Sciences. Vol. I. 1867—1876. Davenport, Jowa. 1876.

Astronomical and meteorological observations made at the U. S. Naval Observatory during the year 1874. Washington 1877.

Report of the United States geological and geographical survey of the Territories. Vol. XI. Washington 1877.

Bulletin of the United States geological and geographical survey of the Territories. Second Ser. Vol. II. Nr. 4. Vol. III. No. 1—4. Washington 1876.

Bulletin of the United States entomological Commission. No. 1. 2. Washington 1877.

Bulletin of the American Geographical Society. Session of 1876—77. No. 3. New York 1877.

Tables of the Satellites of Jupiter, to the year 1900. By D. P. Todd. Published for the American Ephemeris and nautical Almanac, by authority of the Secretary of the Navy. Washington 1876.

Smithsonian Contributions to Knowledge. Vol. 20, City of Washington, 1876. Vol. 21, City of Washington. 1876.

Monthly Reports of the department of agriculture. Auf's Jahr 1875 und 1876. Washington 1876 und 1877.

Report of the commissioner of agriculture, für's Jahr 1875. Washington 1876.

Bulletin of the United States entomological Commission. No. 1 und 2. Washington 1877.

Annals of the Lyceum of natural history of New York. Vol. X, No. 12—14. Vol. XI, No. 1—8. New York 1874.

Proceedings of the Lyceum of natural history in the City of New York. Second Series, Jan.—June 1873, Oct.—Dec. 1873, Jan.—June 1874.

The Constitution and By-Laws of the Ann Arbor Scientific Association with the Proceedings for the year ending May 1, 1876. Ann Arbor 1876.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1875, Washington 1876. For the year 1876, Washington 1877.

Notulen van de algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van K. en W. Deel XIV. No. 2—4. Batavia 1876/77.

Einzelne Schriften.

Enumeratio insectorum Norvegicorum. Fasc. I. Catalogum Hemipterorum et Orthopterorum continens. Fasc. II. Catalogum Coleopterorum continens. Auctore H. Siebke. Christiania 1874. 1875. Fasc. III. Catalogum Lepidopterorum continens. Fasc. IV. Catalogum Dipterorum continens. Auctore H. Siebke defuncto ed. J. Sparre Schneider. Christiania 1876. 1877.

Fauna littoralis Norvegiae, udgivet af J. Koren og Dr. D. C. Danielssen. 3die Hefte med 16 Tavler. Bergen 1877.

Ueber die exakte Naturphilosophie. Von Dr. Adolf Mühry. (Als Manuscript gedruckt.) Göttingen 1877.

Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Principien der abstracten Wissenschaften. Von Dr. Hermann Scheffler. 2 Bde. Leipzig 1876/77.

Ueber geometrische Erweiterungen des Bezout'schen Fundamentalsatzes. Von Dr. H. Schubert in Hamburg. (Nachrichten von der Kgl. Gesellsch. d. W. und der G. A. Universität zu Göttingen, 25. Juli, No. 19, 1877).

Hülfstafeln zur Berechnung der Polaris-Azimute etc. von Eugen Block. St. Petersburg 1875.

Die Selbstverdauungs-Processe der Magenschleimhaut, von Dr. H. Kundrat. Festschrift. Graz 1877.

Das Stereometer, von Joh. Ritter von Puscaria. Budapest 1877.

Die Schlacht bei St. Jakob an der Birs. Eine kritische Untersuchung von August Bernoulli. Basel 1877.

Das geograph. Wörterbuch des Abu 'Obeid 'Abdallah ben 'Abd el-'Azîz el-Bekrí, nach den Hdschrr. zu Leiden, Cambridge, London und Mailand hrsgeg. von F. Wüstenfeld. 2. Bd. 2. Hälfte. Gött. u. Paris 1876. 8.

Heilagra Manna Søgur. Fortælinger og Legender om hellige Mænd og Kvinder. Efter 10 gamle haandskrifter udgivne af C. R. Unger. I. Christiania 1877.

Anden Beretning om Ladegaardsøens Hovedgaard. Andet Hefte. Christiania 1875.

On the practical application of autography in zoology, and on a new autographic method by G. O. Sars. (Ohne Orts- und Zeitangabe.)

Contributions to the Centennial Exhibition. By John Ericsson, LL. D. New York 1876.

Introduction and succession of vertebrate life in America. By March. 1877.

Prof. Hayden's exploration in 1876.

Corrections of the present Theory of the Moon's Motions according to the Classic Eclipses. By Prof. G. Seyffarth.

Études sur les mouvements de l'atmosphère par C. M. Guldberg et H. Mohn. Première partie. Christiania 1876.

De la cécité des couleurs dans ses rapports avec les chemins de fer et la marine par F. Holmgren. Stockholm.

Mémoire sur le rabotage des métaux par F. Thime. St.-Petersbourg 1877.

Della libertà ed eguaglianza dei culti. Interpretazione giuridica del dottor Roberto Boldù. Firenze 1877.

La città di Noto in Sicilia nel suo essere prima del Terremoto del 1693. Topographischer Plan, mit franz. Schreiben von François Orsini.

La Pedagogia dettata nelle scuole magistrali e normali maschili e femminili del Regno d'Italia, par Stefano Vacca da Mondovi. Osimo 1877.

Travels and Researches in Crete. By Captain T. A. B. Spratt. In two volumes. London 1865.

SITZUNG AM 5. MÄRZ 1877.

M. W. Drobisch, *Ueber reine Stimmung und Temperatur der Töne*[1]).

Als vor 25 Jahren meine Abhandlung »Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur« in den Schriften unsrer Gesellschaft veröffentlicht wurde, welcher etwas später »Nachträge zur Theorie der musikalischen Tonverhältnisse« und im 90sten Band von Poggendorff's Annalen der Physik ein Aufsatz »Ueber die wissenschaftliche Bestimmung der musikalischen Temperatur« nachfolgte, war *Helmholtz*'s epochemachendes Werk »Die Lehre von den Tonempfindungen« (erste Ausgabe 1863) noch nicht erschienen. Durch dieses ist aber der Vorzug der auf der Reinheit der Quinten und Terzen und den durch dieselben gegebenen reinen Dur- und Mollaccorden beruhenden reinen Stimmung (die wenigstens im Gesang und auf den Streichinstrumenten ausgeführt werden kann) vor jeder Temperatur der Töne für immer festgestellt und in Anschluss an *Hauptmann*'s Werk »Die Natur der Harmonik und Metrik« (1853) der Nachweis geführt, dass mit der Forderung reiner Dur- und Molltonleitern eine Fixirung der Höhe eines Tons durch ein einziges Schwingungsverhältniss unvereinbar ist, im Gegentheil Tönen von ein und derselben Benennung, je nach ihrem musikalischen Zusammenhang mit anderen Tönen, verschiedene Schwingungswerthe beigelegt werden müssen. Um nämlich in allen gangbaren Tonarten gleichmässig reine Dur- und Molltonleitern herzustellen, ist ein Tonsystem erforderlich, welches nicht aus einer einzigen Reihe, sondern mindestens aus vier Reihen von Tönen besteht, in welchen Reihen die Schwingungswerthe der gleichbenannten Töne je um ein syntonisches Komma, d. i. nahe den 5ten Theil des grösseren halben Tons, von einander differiren. *G. Schubring*

1) Zum Druck übergeben am 5. März 1877.

hat dieses Tonsystem in seiner Abhandlung »Die Tonleiter und ihre Berechnung«[1]) ausführlich entwickelt und erläutert. Denselben Gegenstand behandelt nun auch die nachfolgende Untersuchung, aber in anderer Weise und zugleich im Zusammenhang mit der Lehre von der Temperatur. Ich bediene mich dabei nämlich der in meinen früheren Arbeiten befolgten Methode, welche darin besteht, dass zwar das auch in allen Temperaturen unveränderlich bleibende Schwingungsverhältniss der Octave zum Grundton durch 2, dagegen das der Quinte und der grossen Terz vorläufig allgemein durch Q und T bezeichnet, darnach zuerst für jeden Ton die Form der Zusammensetzung seines Schwingungsverhältnisses aus den Schwingungsverhältnissen der Octave, Quinte und grossen Terz nachgewiesen und daraus dann der besondere Zahlwerth dieses Verhältnisses abgeleitet wird. Diese allgemeinen Formbestimmungen der Tonhöhen gewähren den Vortheil, dass einerseits die Beziehungen der Töne zu einander leicht übersehbar werden, andrerseits aber auch ebenso leicht die Abänderungen sich bestimmen lassen, welche die Höhe des Tons erleidet, wenn Quinte oder Terz oder beide zugleich, wenn auch noch so wenig, von der Reinheit abweichen. Die Grösse dieser Abweichungen sowohl als die der dadurch bewirkten Veränderung der Höhe des Tons wird am einfachsten in Theilen des syntonischen Kommas angegeben und berechnet. Mit diesen Hilfsmitteln glaube ich nun jetzt beweisen zu können, dass eine verfeinerte gleichschwebende Temperatur in dem Sinne, in welchem ich sie früher suchte — nämlich eine solche, die, bei reineren Terzen als die der gewöhnlichen gleichschwebenden Temperatur, die erhöhten und erniedrigten Töne unterschiede, jedem der hiermit sich ergebenden 21 Töne aber für alle Tonarten denselben Schwingungswerth beilegte — unmöglich ist, und dass die gemeine gleichschwebende Temperatur gerade auf der äussersten Grenze des mit den Forderungen der reinen Stimmung noch Vereinbaren steht. Um jedoch den grössern Wohlklang reiner Tonverhältnisse und Accorde im Vergleich mit den temperirten dem Ohr vernehmbar zu machen, bedarf es solcher Instrumente wie Helmholtz's Harmonium, die durch eine mässige Anzahl rein abgestimmter Töne wenigstens

1) *Schlömilch*'s Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XIII, Supplement S. 105 ff.

für eine gewisse Zahl von Tonarten reine Accorde und Tonleitern angeben. Zu der Herstellung solcher Instrumente ist aber doch wieder eine feine, wenn auch dem Ohr ganz unvernehmbare Temperatur, entweder (wie bei Helmholtz) nur der Quinte, oder nur der grossen Terz, oder beider zugleich erforderlich. Man erhält die Grössen dieser zu dem angegebenen Zweck nothwendigen Temperaturen sehr einfach aus der durch Q und T bestimmten Form des Schwingungsverhältnisses, welches zwischen den nächst benachbarten erhöhten und erniedrigten Tönen besteht. Endlich gelangt man auch auf demselben Wege, der zur Darstellung der Töne der gleichschwebenden Temperatur durch Potenzen von 2, deren Exponenten Zwölftel, führt, mit völlig zureichender Schärfe der Annäherung zu Ausdrücken der Schwingungsverhältnisse, welche den Tonreihen der reinen Stimmung zukommen, durch Potenzen von 2, deren Exponenten 53stel sind, wie diess auch schon *Schubring*[1]) gefunden hat. Diese Exponenten sind aber nichts andres als die scharfen Näherungswerthe der Intervalle im engern Sinne des Worts zwischen den Tönen und dem angenommenen Grundtone, zu unterscheiden von ihren Schwingungsverhältnissen, deren Logarithmen sie, wie zuerst *Euler* gezeigt hat, proportional sind. Sie sind die Höhenunterschiede der Töne, die wir empfinden, während die Schwingungsverhältnisse der Töne uns nicht, wie jene, unmittelbar zum Bewusstseyn kommen, und sie haben durch *Fechner*'s Psychophysik, die auch für andre Gattungen der Empfindungen denselben gesetzlichen Zusammenhang zwischen den Empfindungsunterschieden und den Verhältnissen der ihnen als Ursachen zu Grunde liegenden äusseren Reize nachgewiesen hat, eine grössere Bedeutung als zuvor gewonnen. Aber auch abgesehen davon dienen die Intervalle der reinen Tonverhältnisse vielfach zur Vereinfachung der musikalischen Berechnungen, und schon deshalb rechtfertigt es sich, sie nicht in Vergessenheit kommen zu lassen.

1.

Es sey zuerst die Form der reinen diatonischen Tonleiter in C-dur zu bestimmen. Sie wird construirt aus dem Dreiklang

1) a. a. O. S. 130.

des Grundtons, CEG, aus dem Dreiklang seiner obern Quinte, GHD, und aus dem Dreiklang seiner untern Quinte, FAC, welche drei Accorde, nach ihrem stetigen Zusammenhang geordnet, die Form

$$\underbrace{FACEGHD}$$

geben. In allen drei Accorden verhält sich die Schwingungszahl des ersten Tons zu der des zweiten wie $4:5$, und zu der des dritten wie $2:3$. Demnach ist, wenn man die Schwingungszahl des ersten Tons $= 1$ setzt, die des zweiten $= \frac{5}{4}$, und die des dritten $= \frac{3}{2}$.

In der Tonfolge $FACEGHD$ liegen die Töne C, E, G, H in dem Octavenintervall zwischen C und c, dagegen F und A in dem nächsttieferen, D in dem nächsthöheren Octavenintervall. Zeigen wir diesen Lageunterschied an durch eine über D gesetzte 1 und durch eine über F und A gesetzte -1; bezeichnen wir ferner das Schwingungsverhältniss des zweiten Tons zum ersten in allen drei Accorden allgemein durch T und das des dritten zum ersten durch Q, so stellt sich die Reihe der sieben, die C-durscala bildenden Töne sammt ihren Schwingungsverhältnissen zu C, wie folgt, dar:

$$\begin{array}{cccccccc} \overset{-1}{F}, & \overset{-1}{A}, & C, & E, & G, & H, & \overset{1}{D}, \\ \frac{1}{Q}, & \frac{T}{Q}, & 1; & T, & Q, & QT, & Q^2. \end{array}$$

Erniedrigt man nun $\overset{1}{D}$ und erhöht $\overset{-1}{F}$ und $\overset{-1}{A}$ um eine Octave, was, da das Schwingungsverhältniss der Octave zum Grundton $= 2$ ist, bzw. durch Division und Multiplication mit 2 geschieht, und versetzt man somit die Töne $\overset{1}{D}$, $\overset{-1}{F}$ und $\overset{-1}{A}$ in das Octavenintervall zwischen C und c, so ergeben sich die Schwingungsverhältnisse der Töne der C-durscala, nämlich, mit Hinzufügung der Octave c,

$$\begin{array}{rccccccccc} & C, & D, & E, & F, & G, & A, & H, & c, \\ & 1, & \frac{Q^2}{2}, & T, & \frac{2}{Q}, & Q, & \frac{2T}{Q}, & QT, & 2, \\ \text{in Zahlen} & 1, & \frac{9}{8}, & \frac{5}{4}, & \frac{4}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{15}{8}, & 2. \end{array}$$

Diese Töne führen bekanntlich, wie die ihre Intervalle mit dem Grundton bestimmenden Schwingungsverhältnisse, der Reihe

nach die Namen Prime, Secunde, grosse Terz, Quarte, Quinte, grosse Sexte, grosse Septime, Octave.

2.

Die 8 Töne der C-durscala geben im allgemeinen folgende 28 Tonverhältnisse:

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{D}{C}, & \frac{E}{C}, & \frac{F}{C}, & \frac{G}{C}, & \frac{A}{C}, & \frac{H}{C}, & \frac{c}{C}, \\
 & \frac{E}{D}, & \frac{F}{D}, & \frac{G}{D}, & \frac{A}{D}, & \frac{H}{D}, & \frac{c}{D}, \\
 & & \frac{F}{E}, & \frac{G}{E}, & \frac{A}{E}, & \frac{H}{E}, & \frac{c}{E}, \\
 & & & \frac{G}{F}, & \frac{A}{F}, & \frac{H}{F}, & \frac{c}{F}, \\
 & & & & \frac{A}{G}, & \frac{H}{G}, & \frac{c}{G}, \\
 & & & & & \frac{H}{A}, & \frac{c}{A}, \\
 & & & & & & \frac{c}{H}.
\end{array}$$

Von denselben sind folgende 17 nur Wiederholungen der durch die C-durscala unmittelbar gegebenen Tonverhältnisse:

$\frac{D}{C} = \frac{G}{F} = \frac{H}{A} = \frac{Q^2}{2} = \frac{9}{8}$, die grosse Secunde oder der grosse ganze Ton,

$\frac{E}{C} = \frac{A}{F} = \frac{H}{G} = T = \frac{5}{4}$, die grosse Terz,

$\frac{F}{C} = \frac{G}{D} = \frac{A}{E} = \frac{c}{G} = \frac{2}{Q} = \frac{4}{3}$, die Quarte,

$\frac{G}{C} = \frac{H}{E} = \frac{c}{F} = Q = \frac{3}{2}$, die Quinte,

$\frac{A}{C} = \frac{H}{D} = \frac{2T}{Q} = \frac{5}{3}$, die grosse Sexte,

$\frac{H}{C} = QT = \frac{15}{8}$, die grosse Septime,

$\frac{c}{C} = 2$ die Octave.

Zu diesen Verhältnissen kommen aber zunächst folgende 8 hinzu:

$\frac{E}{D} = \frac{A}{G} = \frac{2T}{Q^2} = \frac{10}{9}$, der kleine ganze Ton,

$\frac{c}{D} = \frac{2^2}{Q^2} = \frac{16}{9}$, die kleine Septime,

$\frac{F}{E} = \frac{c}{H} = \frac{2}{QT} = \frac{16}{15}$, die kleine Secunde oder der grosse halbe Ton,

$\frac{G}{E} = \frac{c}{A} = \frac{Q}{T} = \frac{6}{5}$, die kleine Terz,

$\frac{c}{E} = \frac{2}{T} = \frac{8}{5}$, die kleine Sexte;

endlich noch folgende 3:

$\frac{F}{D} = \frac{2^2}{Q^3} = \frac{32}{27} = \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81}$, die verminderte (oder alterirte) kleine Terz,

$\frac{A}{D} = \frac{2^2T}{Q^3} = \frac{40}{27} = \frac{3}{2} \cdot \frac{80}{81}$, die verminderte (oder alterirte) Quinte,

$\frac{H}{F} = \frac{Q^2T}{2} = \frac{45}{32} = \frac{4}{3} \cdot \frac{135}{128}$, die übermässige Quarte.

3.

Aus diesen abgeleiteten Tonverhältnissen sind zuerst hervorzuheben

$$\frac{Q^2}{2} = \frac{9}{8}, \quad \frac{2T}{Q^2} = \frac{10}{9} \text{ und } \frac{2}{QT} = \frac{16}{15},$$

die, weil sie in der Aufeinanderfolge

$$\frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}$$

die Schwingungsverhältnisse darstellen, in welchen der Reihe nach die nächstbenachbarten Töne der C-durscala zu einander stehen, die Tonstufen dieser Scala heissen. Weiter aber giebt das Verhältniss

$\frac{\text{gr. Terz}}{\text{kl. Terz}} = T : \frac{Q}{T} = \frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24}$, den kleinen halben Ton,

ferner das Verhältniss

$\frac{\text{gr. ganzer Ton}}{\text{kl. ganzer Ton}} = \frac{Q^2}{2} : \frac{2T}{Q^2} = \frac{Q^4}{2^2T} = \frac{81}{80}$, das syntonische Komma,

und das Verhältniss

$\frac{\text{gr. halber Ton}}{\text{kl. halber Ton}} = \frac{2}{QT} : \frac{T^2}{Q} = \frac{2}{T^3} = \frac{128}{125}$, die kleine Diesis.

Unter diesen kleinsten Tonverhältnissen wird im Folgenden das syntonische Komma durchgängig als Maasseinheit zur Bestimmung

feiner Tonunterschiede gebraucht werden. Setzt man, um zu finden, wie vielmal es in dem grossen ganzen Ton $\frac{9}{8}$ enthalten ist, $\frac{9}{8} = \left(\frac{81}{80}\right)^x$, so ergiebt sich

$$x = \frac{\lg 9 - \lg 8}{\lg 81 - \lg 80} = \frac{511525}{53950},$$

was, auf kleinste Zahlen reducirt, $x = \frac{19}{2}$ giebt, woraus erhellt, dass das syntonische Komma $9\frac{1}{2}$ mal in dem grossen ganzen Ton $\frac{9}{8}$ enthalten ist. Auf dieselbe Weise findet man, dass sich dieses Komma zum grossen halben Ton $\frac{16}{15}$ verhält wie 5 : 26, also in diesem $5\frac{1}{5}$ mal enthalten ist.

Da nach dem vorigen § die verminderte kleine Terz $= \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81}$, und die verminderte Quinte $= \frac{3}{2} \cdot \frac{80}{81}$, so stehen diese verminderten Töne um ein syntonisches Komma tiefer als bzw. die reine Terz und die reine Quinte.

Was das Verhältniss $\frac{135}{128}$ (das kleine Limma) betrifft, um welches die übermässige Quarte höher steht als die reine, so ist dasselbe $= \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}$, also gleich dem um ein syntonisches Komma erhöhten kleinen halben Ton.

Setzt man endlich die kleine Diesis $\frac{128}{125} = \left(\frac{81}{80}\right)^x$, so findet man $x = \frac{21}{11}$. Diese Diesis ist also $1\frac{10}{11}$ mal in dem syntonischen Komma enthalten. Mithin ist auch der kleine halbe Ton $\frac{25}{24}$, welcher $= \frac{16}{15} : \frac{128}{125}$, um $1\frac{10}{11}$ des syntonischen Kommas kleiner als der grosse halbe Ton $\frac{16}{15}$.

Wir werden in der Folge unter einem Komma ohne weiteren Zusatz das syntonische verstehen.

4.

Die Töne, aus welchen die C-durscala gebildet wird, zerfallen nach der Zusammensetzung ihrer Schwingungsverhältnisse in die beiden Reihen

$$\begin{matrix} \overset{-1}{F}, & C, & G, & \overset{1}{D}, \\ \frac{1}{Q}, & 1, & Q, & Q^2, \end{matrix}$$

und

$$\begin{matrix} \overset{-1}{A}, & E, & H, \\ \frac{T}{Q}, & T, & QT. \end{matrix}$$

In beiden Reihen schreiten die Schwingungsverhältnisse in einer geometrischen Progression fort, deren Exponent Q. Die Glieder der zweiten Reihe haben aber überdiess den gemeinsamen Factor T. Sie hängen also von der Quinte und Terz zugleich ab, die Töne der ersten Reihe dagegen allein von der Quinte. Jede von beiden Reihen kann aufwärts und abwärts ins Unbegrenzte verlängert werden, und jede derselben enthält dann, so erweitert, nicht allein die sämmtlichen Töne der C-durscala in ihrer Aufeinanderfolge nach Quinten

$$F,\ C,\ G,\ D,\ A,\ E,\ H,$$

sondern auch als Fortsetzung dieser Reihe die Quintenfolge der einfach erhöhten und erniedrigten Töne, nämlich

aufwärts: *Fis, Cis, Gis, Dis, Ais, Eis, His,*
abwärts: *B, Es, As, Des, Ges, Ces, Fes,*

an die sich weiter, gleichfalls nach Quinten geordnet, die doppelt und mehrfach erhöhten und erniedrigten Töne

Fisis, Cisis, ... Hisis; Fisisis, Cisisis, ...
Bb, Eses, . . . Feses; Bbb, Eseses, ...

anschliessen. Denn die Bedeutung der Benennung eines jeden in der modernen Musik zur Verwendung kommenden Tons wird zunächst nur relativ durch das Verhältniss, das derselbe als Quinte zu einem andern Ton hat, bestimmt. Gehen wir fürs erste nicht über die einfach erhöhten und erniedrigten Töne hinaus, so giebt die Fortsetzung der ersten Reihe, wenn wir die Octaven, in welchen die Töne liegen, durch ihren Benennungen übergesetzte Stellenzahlen bemerken,

$$\text{aufwärts: } \begin{matrix} \overset{1}{A}, & \overset{2}{E}, & \overset{2}{H}, & \overset{3}{Fis}, & \overset{4}{Cis}, & \overset{4}{Gis}, & \overset{5}{Dis}, & \overset{5}{Ais}, & \overset{6}{Eis}, & \overset{6}{His}; \\ Q^3 & Q^4 & Q^5 & Q^6 & Q^7 & Q^8 & Q^9 & Q^{10} & Q^{11} & Q^{12} \end{matrix}$$

abwärts: $\overset{-2}{B}, \overset{-2}{Es}, \overset{-3}{As}, \overset{-3}{Des}, \overset{-4}{Ges}, \overset{-4}{Ces}, \overset{-5}{Fes},$

$\frac{1}{Q^2} \quad \frac{1}{Q^3} \quad \frac{1}{Q^4} \quad \frac{1}{Q^5} \quad \frac{1}{Q^6} \quad \frac{1}{Q^7} \quad \frac{1}{Q^8}.$

Die Fortsetzung der zweiten Reihe giebt

aufwärts: $\overset{1}{Fis}, \overset{2}{Cis}, \overset{2}{Gis}, \overset{3}{Dis}, \overset{3}{Ais}, \overset{4}{Eis}, \overset{4}{His};$

$Q^2T \quad Q^3T \quad Q^4T \quad Q^5T \quad Q^6T \quad Q^7T \quad Q^8T$

abwärts: $\overset{-1}{D}, \overset{-2}{G}, \overset{-2}{C}, \overset{-3}{F}, \overset{-4}{B}, \overset{-4}{Es}, \overset{-5}{As}, \overset{-5}{Des}, \overset{-6}{Ges}, \overset{-6}{Ces}, \overset{-7}{Fes}.$

$\frac{T}{Q^2} \quad \frac{T}{Q^3} \quad \frac{T}{Q^4} \quad \frac{T}{Q^5} \quad \frac{T}{Q^6} \quad \frac{T}{Q^7} \quad \frac{T}{Q^8} \quad \frac{T}{Q^9} \quad \frac{T}{Q^{10}} \quad \frac{T}{Q^{11}} \quad \frac{T}{Q^{12}}$

Versetzen wir nun diese Töne in die Octave zwischen C und c, indem wir ihre Ausdrücke durch Q und T mit denjenigen Potenzen von 2, deren Exponenten die den Benennungen der Töne übergeschriebenen Stellenzahlen sind, je nachdem dieselben positiv oder negativ, dividiren oder multipliciren, und setzen sodann $Q = \frac{3}{2}$ und $T = \frac{5}{4}$, so erhalten wir folgende zwei Reihen von Tonbestimmungen, von denen die der Töne der zweiten Reihe durch einen ihren Benennungen untergesetzten Strich von den gleichnamigen der ersten Reihe unterschieden werden. *His* und *His* fallen dabei allerdings in die Octave über *c*.

I		II	
$C = 1$	$= 1$		
$Des = \frac{2^3}{Q^5} = \frac{2^8}{3^5}$	$= 1{,}05350$	$\underline{Des} = \frac{2^5T}{Q^9} = \frac{2^{12}.5}{3^9}$	$= 1{,}04049$
$Cis = \frac{Q^7}{2^4} = \frac{3^7}{2^{11}}$	$= 1{,}06787$	$\underline{Cis} = \frac{Q^3T}{2^2} = \frac{3^3.5}{2^7}$	$= 1{,}05469$
$D = \frac{Q^2}{2} = \frac{3^2}{2^3}$	$= 1{,}125$	$\underline{D} = \frac{2T}{Q^2} = \frac{2.5}{3^2}$	$= 1{,}11111$
$Es = \frac{2^2}{Q^3} = \frac{2^5}{3^3}$	$= 1{,}18519$	$\underline{Es} = \frac{2^4T}{Q^7} = \frac{2^9.5}{3^7}$	$= 1{,}17055$
$Dis = \frac{Q^9}{2^5} = \frac{3^9}{2^{14}}$	$= 1{,}20136$	$\underline{Dis} = \frac{Q^5T}{2^3} = \frac{3^5.5}{2^{10}}$	$= 1{,}18652$
$Fes = \frac{2^5}{Q^8} = \frac{2^{13}}{3^8}$	$= 1{,}24859$	$\underline{Fes} = \frac{2^7T}{Q^{12}} = \frac{2^{17}.5}{3^{12}}$	$= 1{,}23317$
$E = \frac{Q^4}{2^2} = \frac{3^4}{2^6}$	$= 1{,}26562$	$\underline{E} = T = \frac{5}{2^2}$	$= 1{,}25$
$F = \frac{2}{Q} = \frac{2^2}{3}$	$= 1{,}33333$	$\underline{F} = \frac{2^3T}{Q^5} = \frac{2^6.5}{3^5}$	$= 1{,}31687$

$Eis = \frac{Q^{11}}{2^6} = \frac{3^{11}}{2^{17}} = 1{,}35152$	$\underline{Eis} = \frac{Q^7T}{2^4} = \frac{3^7.5}{2^{13}} = 1{,}33484$
$Ges = \frac{2^4}{Q^6} = \frac{2^{10}}{3^6} = 1{,}40466$	$\underline{Ges} = \frac{2^6T}{Q^{10}} = \frac{2^{14}.5}{3^{10}} = 1{,}38732$
$Fis = \frac{Q^6}{2^3} = \frac{3^6}{2^9} = 1{,}42383$	$\underline{Fis} = \frac{Q^2T}{2} = \frac{3^2.5}{2^5} = 1{,}40625$
$G = Q = \frac{3}{2} = 1{,}5$	$\underline{G} = \frac{2^2T}{Q^3} = \frac{2^3.5}{3^3} = 1{,}48148$
$As = \frac{2^3}{Q^4} = \frac{2^7}{3^4} = 1{,}58025$	$\underline{As} = \frac{2^5T}{Q^8} = \frac{2^{11}.5}{3^8} = 1{,}56074$
$Gis = \frac{Q^8}{2^4} = \frac{3^8}{2^{12}} = 1{,}60181$	$\underline{Gis} = \frac{Q^4T}{2^2} = \frac{3^4.5}{2^8} = 1{,}58203$
$A = \frac{Q^3}{2} = \frac{3^3}{2^4} = 1{,}6875$	$\underline{A} = \frac{2T}{Q} = \frac{5}{3} = 1{,}66667$
$B = \frac{2^2}{Q^2} = \frac{2^4}{3^2} = 1{,}77778$	$\underline{B} = \frac{2^4T}{Q^6} = \frac{2^8.5}{3^6} = 1{,}75583$
$Ais = \frac{Q^{10}}{2^5} = \frac{3^{10}}{2^{15}} = 1{,}80203$	$\underline{Ais} = \frac{Q^6T}{2^3} = \frac{3^6.5}{2^{11}} = 1{,}77979$
$ces = \frac{2^5}{Q^7} = \frac{2^{12}}{3^7} = 1{,}87288$	$\underline{ces} = \frac{2^7T}{Q^{11}} = \frac{2^{16}.5}{3^{11}} = 1{,}84976$
$H = \frac{Q^5}{2^2} = \frac{3^5}{2^7} = 1{,}89844$	$\underline{H} = QT = \frac{3.5}{2^3} = 1{,}875$
$c = 2 = 2$	$\underline{c} = \frac{2^3T}{Q^{14}} = \frac{2^5.5}{3^4} = 1{,}97531$
$His = \frac{Q^{12}}{2^6} = \frac{3^{12}}{2^{18}} = 2{,}02729$	$\underline{His} = \frac{Q^8T}{2^4} = \frac{3^8.5}{2^{14}} = 2{,}00226$

Mit Berücksichtigung dieser zwei unterschiedenen Tonreihen muss nun die C-durscala, da in ihr $E = T$, $A = \frac{2T}{Q}$ und $H = QT$, genauer geschrieben werden

$$C,\ D,\ \underline{E},\ F,\ G,\ \underline{A},\ \underline{H},\ c.$$

5.

Es ist leicht zu bemerken, dass die allgemeinen Ausdrücke der Töne in der Reihe II aus den gleichnamigen in der Reihe I durch Division mit $\frac{Q^4}{2^2T} = \frac{81}{80}$ oder Multiplication mit $\frac{2^2T}{Q^4} = \frac{80}{81}$ abgeleitet werden können. Da nun $\frac{81}{80}$ das syntonische Komma ist, so stehen alle Töne der Reihe II um ein solches Komma tiefer, als die gleichnamigen der Reihe I. Dieser Höhenunterschied

ist sehr wohl hörbar. Denn nach *Wilh. Weber's* Versuchen vermag ein geübter Violinspieler noch zwei Töne zu unterscheiden, deren Schwingungsverhältniss $\frac{4004}{4000}$. Setzt man diess $= \left(\frac{81}{80}\right)^x$, so erhält man $x = \frac{4344}{53950}$, d. i. nahe $\frac{1}{12,4}$. Ein zwischen $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{13}$ Komma liegender Tonunterschied kann also als äusserste Grenze des unter günstigen Bedingungen noch Hörbaren angesehen werden.

Ebenso leicht wird bemerklich, dass die Tonverhältnisse

$$\frac{Cis}{C}, \frac{Dis}{D}, \frac{Eis}{E}, \frac{Fis}{F}, \frac{Gis}{G}, \frac{His}{H},$$

desgleichen

$$\frac{D}{Des}, \frac{E}{Es}, \frac{F}{Fes}, \frac{G}{Ges}, \frac{A}{As}, \frac{H}{B}, \frac{c}{ces}$$

sämmtlich einander gleich, nämlich $= \frac{Q^7}{2^4} = \frac{3^7}{2^{11}}$ sind. Dividirt durch den grossen halben Ton $\frac{16}{15} = \frac{2^4}{3.5}$ erhält man den Quotienten $\frac{3^8.5}{2^{15}}$, welcher, $= \left(\frac{81}{80}\right)^x$ gesetzt, $x = 0{,}0909 = \frac{1}{11}$ giebt. Es übertreffen also die vorstehenden Tonverhältnisse den grossen halben Ton $\frac{F}{E} = \frac{c}{H} = \frac{16}{15}$ nur um $\frac{1}{11}$ Komma, welcher Unterschied kaum hörbar ist. Man kann also sagen, dass *Cis*, *Dis*, *Eis* etc. bzw. um den grossen halben Ton $\frac{16}{15}$ höher sind als *C*, *D*, *E* etc.

Ebenso ergiebt sich, dass auch die Verhältnisse der nächstbenachbarten erhöhten und erniedrigten Töne

$$\frac{Cis}{Des}, \frac{Dis}{Es}, \frac{E}{Fes}, \frac{Fis}{Ges}, \frac{Gis}{As}, \frac{Ais}{B}, \frac{H}{ces}, \frac{His}{c}$$

einander gleich, nämlich $= \frac{Q^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$ sind. Dieser Zahlwerth, welcher also das Verhältniss angiebt, in welchem die Schwingungszahl der 7ten Octave des Grundtons zu der Schwingungszahl der 12ten Quinte desselben steht, heisst das pythagorische Komma. Setzt man diesen Werth $= \left(\frac{81}{80}\right)^x$, so erhält man $x = \frac{53851}{53950} = 1\frac{1}{11}$. Das pythagorische Komma

ist also um $\frac{1}{11}$ grösser als das syntonische. Die vorstehenden Tonpaare sind demnach vollkommen unterscheidbar.

Dass alles dieses von der Tonreihe II genau ebenso wie von der Tonreihe I gilt, versteht sich von selbst, da die gleichnamigen Töne beider Reihen constant um ein syntonisches Komma differiren.

Noch kann in Frage kommen, ob in den Reihen I und II die Tonverhältnisse durch die 5 der Einheit zugefügten Decimalen hinlänglich scharf bestimmt sind. Es lässt sich aber zeigen, dass selbst schon 3 Decimalen völlig zureichend seyn würden. Denn alle angegebenen Tonverhältnisse liegen zwischen den Grenzen 1 und 2. Wird $C = 1$ um 0,001 vergrössert, so geht der Ton in $\frac{1001}{1000}$ über, welches Verhältniss, wie schon bemerkt, die äusserste Grenze des noch Hörbaren, $\frac{1}{12}$ Komma bezeichnet. Wird andrerseits $c = 2$ um ein Tausendel vermindert, so ist das Verhältniss des ursprünglichen Tons zu dem um soviel verminderten $\frac{2000}{1999}$, was, $= \left(\frac{81}{80}\right)^x$ gesetzt, giebt $x = \frac{2172}{53950} < \frac{1}{24}$. Die Erniedrigung von c um ein Tausendel beträgt also weniger als $\frac{1}{24}$ Komma. Nur für noch feinere Unterscheidungen der Töne ist demnach die 4te und 5te Decimale erforderlich.

6.

Da die gleichbenannten Töne der Reihen I und II um das syntonische Komma $\frac{Q^4}{2^2T}$ differiren, so ist es, so lange als Q die reine Quinte $\frac{3}{2}$ und T die reine Terz $\frac{5}{4}$ bezeichnet, daher $\frac{81}{80}$ der Werth des Kommas ist, unmöglich, diesen Tönen einen gemeinsamen Schwingungswerth beizulegen und dadurch die beiden Reihen auf eine einzige zu reduciren. Es kann jedoch in Frage kommen, ob sich nicht Werthe von Q und T auffinden lassen, die unmerklich von den reinen Werthen $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{4}$ abweichen, und bei welchen $\frac{Q^4}{2^2T} = 1$ wird, mithin der Unterschied zwischen den gleichnamigen Tönen der Reihen I und II

verschwindet, und die Töne einen gemeinsamen Werth erhalten. Nennen wir solche annäherungsweise reine Quinten und Terzen temperirte, so stellt sich eine dreifache Weise in Aussicht, nach welcher der vorstehenden Bedingungsgleichung Genüge gethan werden kann. Es kann nämlich entweder die Quinte rein bleiben und nur die Terz temperirt werden, oder umgekehrt kann die Terz rein bleiben und nur die Quinte temperirt werden, oder endlich die Temperirung sowohl die Quinte als die Terz treffen. Wir untersuchen der Reihe nach diese drei denkbaren Fälle.

7.

Bezeichne T_1 die temperirte Terz, so wird, wenn Q die reine Quinte, nach der angegebenen Bedingungsgleichung

$$T_1 = \frac{Q^4}{2^2} = \frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64} = \frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right).$$

Diese temperirte Terz steht also um ein Komma höher als die reine und weicht daher von dieser merklich ab. Hieraus ergiebt sich, da der Werth der Terz von dem der reinen Quinte abhängig gemacht wird, das pythagorische reine Quintensystem. Da dann die Schwingungswerthe der Töne der Reihe II mit den gleichbenannten der Reihe I identisch werden, so giebt die letztere schon allein die Höhen der Töne an, die denselben in diesem System zukommen. Die Töne, welche die C-durscala bilden, haben hier folgende Werthe:

$$D = \frac{Q^2}{2} = \frac{9}{8},$$

$$E = \frac{Q^4}{2^2} = \frac{81}{64} = \frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right),$$

$$F = \frac{2}{Q} = \frac{4}{3},$$

$$G = Q = \frac{3}{2},$$

$$A = \frac{Q^3}{2} = \frac{27}{16} = \frac{5}{3}\left(\frac{81}{80}\right),$$

$$H = \frac{Q^5}{2^2} = \frac{243}{128} = \frac{15}{8}\left(\frac{81}{80}\right).$$

Sowohl die grosse Terz E als die grosse Sexte A und die grosse Septime H stehen daher, mit den reinen Intervallen verglichen, um ein Komma höher als diese. Es folgt hieraus ferner

$$\text{die kleine Terz } \frac{Q}{T} = \frac{6}{5}\left(\frac{80}{81}\right),$$

$$\text{die kleine Sexte } \frac{2}{T} = \frac{8}{5}\left(\frac{80}{81}\right),$$

welche Töne also um ein Komma zu tief stehen. Dasselbe gilt von

$$\text{dem grossen halben Ton } \frac{2}{QT} = \frac{16}{15}\left(\frac{80}{81}\right).$$

Dagegen ist der kleine halbe Ton $\frac{T^2}{Q} = \frac{25}{24}\left(\frac{81}{80}\right)^2$

sogar um zwei Kommata zu hoch; endlich ist

$$\text{der kleine ganze Ton } \frac{T^2}{Q^2} = \frac{10}{9}\left(\frac{81}{80}\right) = \frac{9}{8}$$

um ein Komma zu hoch und gleich dem grossen ganzen Ton. Alle diese Abweichungen von der reinen Stimmung sind zu gross, als dass das pythagorische Quintensystem das feinere musikalische Gehör befriedigen könnte.

Bei der zweiten Voraussetzung, dass die Terz rein bleiben und die Quinte temperirt werden soll, giebt die Bedingungsgleichung $\frac{Q^4}{2^2T} = 1$ die temperirte Quinte

$$Q_1 = (2^2T)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{4}} = 1{,}49535.$$

Setzt man, da dieser Zahlwerth $< 1{,}5$,

$$\frac{3}{2} = 5^{\frac{1}{4}}\left(\frac{81}{80}\right)^x,$$

so erhält man hieraus $\frac{81}{80} = \left(\frac{81}{80}\right)^{4x}$; daher $x = \frac{1}{4}$, folglich $Q_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{80}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$, und erhalten die Leitertöne in C-dur folgende Werthe:

$$D = \frac{Q_1^2}{2} = \frac{9}{8}\left(\frac{80}{81}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$E = T = \frac{5}{4},$$

$$F = \frac{2}{Q_1} = \frac{4}{3}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$G = Q_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{80}{81}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$A = \frac{2T}{Q_1} = \frac{5}{3}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$H = Q_1T = \frac{15}{8}\left(\frac{80}{81}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Es folgt hieraus

die kleine Terz $\frac{Q_1}{T} = \frac{6}{5}\left(\frac{80}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$,

die kleine Sexte $\frac{2}{T} = \frac{8}{5}$,

der grosse halbe Ton $\frac{2}{Q_1 T} = \frac{16}{15}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{4}}$,

der kleine halbe Ton $\frac{T^2}{Q_1} = \frac{25}{24}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{4}}$,

der kleine ganze Ton $\frac{2T}{Q_1^2} = \frac{10}{9}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{2}}$.

In diesem Tonsystem, das man das reine Terzensystem nennen kann, ist also nur die grosse Terz und kleine Sexte rein, die grosse Secunde oder der grosse ganze Ton um ein halbes Komma zu tief, der kleine ganze Ton um ebensoviel zu hoch, die Quarte, grosse Sexte und der grosse und kleine halbe Ton um $\frac{1}{4}$ Komma zu hoch, die Quinte, grosse Septime und kleine Terz um ebensoviel zu tief. Obgleich hiernach die Abweichungen von fünf unter diesen elf Tönen geringer als im Quintensystem ist, auch zwei Töne, wie dort drei, rein sind, so ist doch die Unreinheit der Quinte und Quarte zu merklich, als dass das System für annehmbar gelten könnte.

8.

Dagegen scheint die dritte Voraussetzung, nach welcher Quinte und Terz temperirt werden sollen, eine Auswahl aus einer Mehrheit von Auflösungen der Aufgabe zuzulassen. Bezeichnet nämlich Q_1 die temperirte Quinte und T_1 die temperirte Terz, so giebt die Bedingungsgleichung $\frac{Q^4}{2^2 T} = 1$, $T_1 = \frac{1}{4} Q_1^4$. Da aber die Quinte Q_1 aufwärts und abwärts von der reinen Quinte $\frac{3}{2}$ abweichen kann, so sey $Q_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{81}{80}\right)^{\pm x}$. Dann wird

$$T_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{81}{80}\right)^{\pm 4x} = \frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right)^{1\pm 4x}.$$

Hieraus erhellt aber sofort, dass, da, wenn $Q_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{81}{80}\right)^{+x}$, die Quinte also aufwärts abweicht, und dann $T_1 = \frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right)^{1+4x}$ wird, diese Quinte eine Terz geben würde, die um mehr als der Be-

trag eines Kommas höher wäre als die reine, folglich noch unreiner als die bereits verworfene pythagorische Terz. Es kann also nur das Minuszeichen vor x gelten, also $T_1 = \frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right)^{1-4x}$ angenommen werden. Hiernach weicht nun die temperirte Terz T_1, je nachdem x kleiner oder grösser als $\frac{1}{4}$, aufwärts oder abwärts von der reinen Terz ab. Wäre aber $x > \frac{1}{4}$, so gäbe diess für Q_1 eine um mehr als $\frac{1}{4}$ Komma von der reinen nach Unten abweichende Quinte, welche, wie schon zuvor bemerkt, unzulässig ist. Es muss also $x < \frac{1}{4}$ seyn, und kann unzählige Werthe zwischen 0 und $\frac{1}{4}$ haben. Je kleiner aber x ist, um so reiner wird zwar die Quinte, um so mehr jedoch nähert sich die Terz der pythagorischen. Es kommt nun in Frage, ob unter den Werthen von x zwischen 0 und $\frac{1}{4}$ sich einer angeben lässt, bei dem Quinte und Terz zugleich zulänglich rein sind. — Nach *Delezenne*'s Versuchen[1]) ist das musikalische Gehör für die Unreinheit der Quinte doppelt so empfindlich als für die Unreinheit der Terz, so dass eine Abweichung der ersteren, die nur halb so gross ist als eine Abweichung der Terz, eben so bestimmt wie diese wahrgenommen wird. Denn die von Delezenne bei seinen Versuchen zugezogenen Quartettspieler von anerkanntem feinen und sichern musikalischen Gehör vermochten eine temperirte Quinte noch von der reinen zu unterscheiden, wenn ihre Abweichung nicht mehr als 0,1461 oder nahe $\frac{1}{7}$ Komma betrug, während ihnen bei der grossen Terz erst eine Abweichung von 0,284 oder nahe $\frac{2}{7}$ Komma bemerklich wurde. Hiernach scheint man nun annehmen zu können, dass eine Quinte, die nur um $\frac{1}{8}$ Komma von der reinen nach Unten abweicht, von dieser nicht mehr unterscheidbar ist, und dass dasselbe von einer Terz gilt, die um $\frac{1}{4}$ Komma von der reinen nach Oben abweicht. Setzt man nun $x = \frac{1}{8}$, so wird $Q_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{1}{8}}$, die davon abhängige Terz aber $T_1 = \frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right)^{1-4x} = \frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{2}}$. Dieselbe weicht also von der reinen um ein halbes Komma ab und ist daher von dieser

1) Mémoire sur les valeurs numériques des notes de la gamme, im Recueil des travaux de la société des sciences de Lille, 1827. p. 5.

nicht so ununterscheidbar, wie jene temperirte Quinte, aus der sie abgeleitet ist. Wollte man andrerseits, da nach Delezenne's Versuchen die Abweichung der Terz doppelt so gross seyn kann, als eine kleine Abweichung der Quinte, $1-4x = 2x$ setzen, so gäbe diess $x = \frac{1}{6}$, was $> \frac{1}{7}$ und $2x = \frac{1}{3}$, was $> \frac{2}{7}$. Es würden dann also sowohl Quinte als Terz merklich von der Reinheit abweichen. Bezweifelt man endlich, dass eine nur um $\frac{1}{8}$ Komma tiefere Quinte als die reine von dieser ununterscheidbar sey, und behauptet, dass die Ununterscheidbarkeit $x < \frac{1}{8}$ fordere, so würde diess $1-4x > \frac{1}{2}$, daher eine Terz geben, die stärker von der reinen Terz abwiche als bei der Annahme einer nur um $\frac{1}{8}$ Komma von der Reinheit abweichenden Quinte. Demnach giebt $x = \frac{1}{8}$ für die Quinte und Terz zusammengenommen immer noch das erträglichste Resultat. Zwar weicht die Quinte, wie wir im folgenden § zeigen werden, etwas mehr von der reinen ab als die der gleichschwebenden Temperatur, aber dafür die Terz erheblich weniger. Und so scheint sich das auf eine um $\frac{1}{8}$ Komma nach Unten abweichende Quinte und eine um $\frac{1}{2}$ Komma nach Oben abweichende Terz zu gründende temperirte Tonsystem zur Annahme zu empfehlen, in welchem, wie in dem System der gleichschwebenden Temperatur, die Töne in allen Tonarten dieselben Werthe haben, überdiess aber die nächst benachbarten erhöhten und erniedrigten Töne hörbar unterschieden bleiben. Aber gerade in dieser Hinsicht kommt dieses System in Widerstreit mit einer Forderung der reinen Stimmung. Nach dieser sind nämlich (§ 5) die Tonverhältnisse $\frac{Cis}{Des}, \frac{Dis}{Es}, \frac{E}{Fes}, \frac{Fis}{Ges}$ u. s. w. sämmtlich einander gleich, und zwar $= \frac{Q^{12}}{2^7} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{12}{11}}$, was grösser als 1 ist. Nach der reinen Stimmung liegen also *Cis*, *Dis*, *E*, *Fis* u. s. f. bzw. höher als *Des*, *Es*, *Fes*, *Ges* etc. In jedem temperirten Tonsystem dagegen, in welchem $Q_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{81}{80}\right)^{-x}$ an die Stelle von $\frac{3}{2}$ tritt, wird

$$\frac{Q_1{}^{12}}{2^7} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} \cdot \left(\frac{81}{80}\right)^{-12x},$$

folglich, da $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7}$, das pythagorische Komma, $= \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{12}{11}}$, $\frac{Q_1{}^{12}}{2^7} = \left(\frac{81}{80}\right)^{-12\left(x-\frac{1}{11}\right)}$, also, wenn $x > \frac{1}{11}$, kleiner als 1. Folglich liegen, wenn $x = \frac{1}{8}$, wo $\frac{Q_1{}^{12}}{2^7} = \left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{9}{22}} = 0{,}99493$ wird, *Cis*, *Dis*, *E*, *Fis* etc. bzw. tiefer als *Des*, *Es*, *Fes*, *Ges* etc., was mit der entgegengesetzten Forderung der reinen Stimmung in Widerspruch steht. Demnach lässt sich durch gleichzeitige Temperirung der Quinte und Terz zwar ein Tonsystem finden, in welchem die Quinte (wenigstens nach Delezenne) unmerklich, die Terz nur wenig von der Reinheit abweicht, auch die nächstbenachbarten erhöhten und erniedrigten Töne unterscheidbar bleiben, aber nicht diejenige Lage gegen einander haben, welche die reine Stimmung fordert, sondern gerade die umgekehrte. Daher kann dieses Tonsystem nicht als eine Annäherung an das der reinen Stimmung gelten.

9.

Die einzige temperirte Quinte, welche die Forderung der reinen Stimmung, dass $\frac{Q^{12}}{2^7}$ grösser als 1 sey, zwar nicht erfüllt, aber doch auch mit ihr nicht in Widerstreit, sondern gerade auf der Grenze des noch Statthaften steht, ist $Q_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{1}{11}}$, wodurch $\frac{Q_1{}^{12}}{2^7} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} \cdot \left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{12}{11}} = \left(\frac{81}{80}\right)^{0}$, also gleich 1, folglich $Q_1 = 2^{\frac{7}{12}}$ wird. Damit wird nun aber der Unterschied zwischen den enharmonischen Tonstufen *Des* und *Cis*, *Es* und *Dis* etc. aufgehoben und $= 0$ gesetzt, was allerdings, da dieser Unterschied $1\frac{1}{11}$ Komma beträgt, daher ein vollkommen hörbarer ist, als eine sehr merkliche Abweichung von der reinen Stimmung erscheint, die sich nur damit rechtfertigen lässt, dass durch dieselbe die Töne der Reihe II mit den gleichnamigen der Reihe I identisch werden, die Zahl der innerhalb einer Octave liegenden Töne sich von 21 auf 12 reducirt, und eine einfachere Construction solcher musikalischer Instrumente ermöglicht wird, die auf fest bestimmte Töne angewiesen sind. Setzt man nun

diese temperirte Quinte $Q_1 = 2^{\frac{7}{12}}$, die also nur um $\frac{1}{11}$ Komma tiefer als die reine, in den allgemeinen Ausdrücken der Reihe I für Q ein, so erhält man das folgende Tonsystem der gleichschwebenden Temperatur, welches als ein temperirtes Quintensystem anzusehen ist.

$$C = 1$$

$$\left.\begin{matrix} Cis \\ Des \end{matrix}\right\} = 2^{\frac{1}{12}} = 1{,}05946 = \frac{15{,}89490}{15} = \frac{16}{15}\left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{6}{11}}$$

$$D = 2^{\frac{2}{12}} = 1{,}12246 = \frac{8{,}97968}{8} = \frac{9}{8}\left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{2}{11}}$$

$$\left.\begin{matrix} Dis \\ Es \end{matrix}\right\} = 2^{\frac{3}{12}} = 1{,}18921 = \frac{5{,}94605}{5} = \frac{6}{5}\left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{8}{11}}$$

$$\left.\begin{matrix} E \\ Fes \end{matrix}\right\} = 2^{\frac{4}{12}} = 1{,}25992 = \frac{5{,}03968}{4} = \frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{7}{11}}$$

$$\left.\begin{matrix} F \\ Eis \end{matrix}\right\} = 2^{\frac{5}{12}} = 1{,}33484 = \frac{4{,}00452}{3} = \frac{4}{3}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{11}}$$

$$\left.\begin{matrix} Fis \\ Ges \end{matrix}\right\} = 2^{\frac{6}{12}} = 1{,}41421 = \frac{45{,}25471}{32} = \frac{45}{32}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{5}{11}}$$

$$G = 2^{\frac{7}{12}} = 1{,}49834 = \frac{2{,}99662}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{1}{11}}$$

$$\left.\begin{matrix} Gis \\ As \end{matrix}\right\} = 2^{\frac{8}{12}} = 1{,}58740 = \frac{7{,}93700}{5} = \frac{8}{5}\left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{7}{11}}$$

$$A = 2^{\frac{9}{12}} = 1{,}68179 = \frac{5{,}04537}{3} = \frac{5}{3}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{3}{11}}$$

$$\left.\begin{matrix} Ais \\ B \end{matrix}\right\} = 2^{\frac{10}{12}} = 1{,}78180 = \frac{16{,}03620}{9} = \frac{16}{9}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{9}{11}}$$

$$H = 2^{\frac{11}{12}} = 1{,}88775 = \frac{15{,}10200}{8} = \frac{15}{8}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{6}{11}}$$

$$\left.\begin{matrix} His \\ C \end{matrix}\right\} = 2$$

Die letzte Columne zeigt an, um wieviel Elftel des Kommas die temperirten Töne der Reihe nach von den in § 1 und 2 angegebenen reinen Werthen der kleinen und grossen Secunde, der kleinen und grossen Terz, der reinen und übermässigen Quarte, der Quinte, kleinen und grossen Sexte, kleinen und grossen Septime, theils abwärts theils aufwärts abweichen, und dass diese Abweichungen für die Quinte, Quarte, grosse Secunde und

kleine Septime gering, dagegen für die Terzen und alle übrigen Töne beträchtlich sind. Dieses System hat nur zwei Tonstufen,

$$\text{den ganzen Ton } 2^{\frac{2}{12}} = \frac{9}{8}\left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{2}{11}} = \frac{10}{9}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{9}{11}}$$

$$\text{und den halben Ton } 2^{\frac{1}{12}} = \frac{16}{15}\left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{6}{11}} = \frac{25}{24}\left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{15}{11}};$$

denn der kleine ganze Ton $\frac{2T}{Q^2}$ verschmilzt hier, da $Q = 2^{\frac{7}{12}}$ und $T = 2^{\frac{4}{12}}$ ist, mit dem grossen $\frac{Q^2}{2}$, und aus gleichem Grunde der kleine halbe Ton $\frac{T^2}{Q}$ mit dem grossen halben Ton $\frac{2}{QT}$.

10.

Kehren wir jetzt von der Temperatur der Töne zur reinen Stimmung zurück, so muss, wie schon zuvor (§ 4) bemerkt wurde, die *C*-durscala genauer geschrieben werden:

$$C,\ D,\ \underline{E},\ F,\ G,\ \underline{A},\ \underline{H},\ c.$$

Die reine Stimmung fordert aber, dass in jeder Tonart die Töne, welche die Durscala bilden, zu dem Grundton genau in denselben Verhältnissen stehen, wie die Töne der *C*-durscala zu dem Grundton *C*. Da nun diese Verhältnisse allgemein durch

$$\frac{Q^2}{2},\ T,\ \frac{2}{Q},\ Q,\ \frac{2T}{Q},\ QT,\ 2$$

ausgedrückt werden, so erhält man die Schwingungsverhältnisse, welche den Tönen der Durscala irgend eines andern Grundtons in Beziehung auf diesen zukommen, wenn man das Schwingungsverhältniss dieses Grundtons zu *C* der Reihe nach durch $\frac{Q^2}{2}$, T, $\frac{2}{Q}$ u. s. w. multiplicirt. Werde z. B. die *G*-durscala verlangt, so ist Q das Schwingungsverhältniss von *G* zu *C*. Die Töne der *G*-durscala müssen daher die Schwingungsverhältnisse

$$\frac{Q^3}{2},\ QT,\ 2,\ Q^2,\ 2T,\ Q^2T,\ 2Q$$

haben, und diesen entsprechen in den Reihen I und II die Töne

$$A,\ \underline{H},\ c,\ d,\ \underline{e},\ \underline{fis},\ g,$$

so dass, wenn man noch den Grundton G hinzufügt, die G-durscala sich der C-durscala völlig conform zeigt. Ebenso werden für den Grundton D, dessen Schwingungsverhältniss zu C gleich $\frac{Q^2}{2}$ ist, die Schwingungsverhältnisse der D-durscala

$$\frac{Q^4}{2^2},\ \frac{Q^2T}{2},\ Q,\ \frac{Q^3}{2},\ QT,\ Q^3T,\ Q^2,$$

welche den Tönen

$$E,\ \underline{Fis},\ G,\ A,\ \underline{H},\ \underline{cis},\ d$$

zugehören, so dass auch hier nach Hinzufügung des Grundtons D die Scala sich mit der von C-dur völlig conform zeigt, indem, wie in dieser (und in G-dur), der 3te, 6te und 7te Ton in die Reihe II, jeder der übrigen Töne aber in die Reihe I fällt.

11.

Diese Conformität der Dur-Tonleitern mit der C-durscala findet immer, aber auch nur dann statt, wenn der Grundton, der Reihe I entnommen, das in dieser angegebene Schwingungsverhältniss hat; sie findet aber nicht mehr statt, wenn das Schwingungsverhältniss des Grundtons zu C nach der Reihe II bestimmt ist. Es lassen sich dann zwar, wie zuvor, die Schwingungsverhältnisse seiner Durscala finden, aber die Benennung eines Theils der Töne derselben lässt sich weder aus der Reihe I noch aus der Reihe II bestimmen. Sey z. B. wiederum G der Grundton, aber sein Schwingungsverhältniss zu C nicht $= Q$, sondern nach der Reihe II $= \frac{2^2T}{Q^3}$, so ergeben sich durch Multiplication mit $\frac{Q^2}{2}$, T, $\frac{2}{Q}$ u. s. w. die Schwingungsverhältnisse seiner Durscala

$$\frac{2T}{Q},\ \frac{2^2T^2}{Q^3},\ \frac{2^3T}{Q^4},\ \frac{2^2T}{Q^2},\ \frac{2^3T^2}{Q^4},\ \frac{2^2T^2}{Q^2},\ \frac{2^3T}{Q^3}.$$

Hier ersieht man nun zwar aus II, dass das 1ste dieser Verhältnisse $\underline{A}$, das 3te $\underline{c}$, das 4te $\underline{d}$, das 7te $\underline{g}$ zugehört, aber die Bedeutung der übrigen drei, in welchen T^2 vorkommt, ergiebt sich weder aus II, noch weniger aus I, welche Reihe ja nur durch die Quinte bestimmte Töne enthält.

Sey zweitens D der Grundton, aber sein Schwingungsverhältniss zu C nach II $= \frac{2T}{Q^2}$, so erhält man auf dieselbe Weise für die Schwingungsverhältnisse seiner Durscala

$$T,\ \frac{2T^2}{Q^2},\ \frac{2^2T}{Q^3},\ \frac{2T}{Q},\ \frac{2^2T^2}{Q^3},\ \frac{2T^2}{Q},\ \frac{2^2T}{Q^2},$$

und erkennt ebenfalls aus II, dass das 1ste Schwingungsverhältniss den Ton $\underline{E}$, das 3te $\underline{Fis}$, das 4te $\underline{A}$ und das 7te $\underline{d}$ anzeigt, aber die Bedeutung der drei übrigen ist aus den Reihen I und II nicht nachweisbar.

12.

Die Benennungen solcher Töne wie diese, die T^2 proportional sind, lassen sich nur finden, wenn man eine dritte Tonreihe construirt, deren Töne hinsichtlich ihrer Schwingungsverhältnisse zu C sich zu den, dem einfachen T proportionalen Schwingungsverhältnissen der Reihe II ebenso verhalten, wie diese zu den nebenstehenden Schwingungsverhältnissen der Reihe I. Da nun die Töne der Reihe II um ein Komma tiefer stehen als die gleichbenannten der Reihe I, daher ihre Schwingungsverhältnisse aus den nebenstehenden der Reihe I durch Multiplication mit $\frac{2^2T}{Q^4} = \frac{80}{81}$ abgeleitet werden können, so erhält man die Schwingungsverhältnisse der verlangten dritten Reihe aufs einfachste aus denen der Reihe II, wenn man diese gleichfalls mit $\frac{2^2T}{Q^4} = \frac{80}{81}$ multiplicirt und denselben die nämliche Benennung giebt, wie die haben, aus welchen sie in solcher Weise abgeleitet sind, sie aber von diesen dadurch unterscheidet, dass man sie zweimal unterstreicht. Man erhält so folgende Reihe:

III

$$\underline{\underline{Des}} = \frac{2^7T^2}{Q^{13}} = \frac{2^{16}.5^2}{3^{13}} = 1{,}02764$$

$$\underline{\underline{Cis}} = \frac{T^2}{Q} = \frac{5^2}{2^3.3} = 1{,}04167$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{2^3T^2}{Q^6} = \frac{2^5.5^2}{3^6} = 1{,}09739$$

$$\underline{\underline{Es}} = \frac{2^6T^2}{Q^{11}} = \frac{2^{13}.5^2}{3^{11}} = 1{,}15610$$

$$\underline{\underline{Dis}} = \frac{QT^2}{2} = \frac{3.5^2}{2^6} = 1{,}17187$$

$$\underline{\underline{Fes}} = \frac{2^9T^2}{Q^{16}} = \frac{2^{21}.5^2}{3^{16}} = 1{,}21795$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{2^2T^2}{Q^4} = \frac{2^2.5^2}{3^4} = 1{,}23457$$

$$\underline{\underline{F}} = \frac{2^5T^2}{Q^9} = \frac{2^{10}.5^2}{3^9} = 1{,}30061$$

$$\underline{\underline{Eis}} = \frac{Q^3T^2}{2^2} = \frac{3^3.5^2}{2^9} = 1{,}31837$$

$$\underline{\underline{Ges}} = \frac{2^8T^2}{Q^{14}} = \frac{2^{18}.5^2}{3^{14}} = 1{,}37019$$

$$\underline{\underline{Fis}} = \frac{2T^2}{Q^2} = \frac{5^2}{2.3^2} = 1{,}38889$$

$$\underline{\underline{G}} = \frac{2^4T^2}{Q^7} = \frac{2^7.5^2}{3^7} = 1{,}46319$$

$$\underline{\underline{As}} = \frac{2^7T^2}{Q^{12}} = \frac{2^{15}.5^2}{3^{12}} = 1{,}54197$$

$$\underline{\underline{Gis}} = T^2 = \frac{5^2}{2^4} = 1{,}56250$$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{2^3T^2}{Q^5} = \frac{2^4.5^2}{3^5} = 1{,}64609$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{2^6T^2}{Q^{10}} = \frac{2^{12}.5^2}{3^{10}} = 1{,}73415$$

$$\underline{\underline{Ais}} = \frac{Q^2T^2}{2} = \frac{3^2.5^2}{2^7} = 1{,}75782$$

$$\underline{\underline{ces}} = \frac{2^9T^2}{Q^{15}} = \frac{2^{20}.5^2}{3^{15}} = 1{,}82692$$

$$\underline{\underline{H}} = \frac{2^2T^2}{Q^3} = \frac{2.5^2}{3^3} = 1{,}85185$$

$$\underline{\underline{c}} = \frac{2^5T^2}{Q^8} = \frac{2^9.5^2}{3^8} = 1{,}95092$$

$$\underline{\underline{His}} = \frac{Q^4T^2}{2^2} = \frac{3^4.5^2}{2^{10}} = 1{,}97754$$

13.

Aus dieser Tabelle erhalten nun die Schwingungsverhältnisse, die in den beiden Beispielen des § 11 namenlos blieben, ihre Benennungen, und werden dadurch Durscalen für die der Reihe II entnommenen Grundtöne gefunden, welche der *C*-durscala conform sind. Es erhalten nämlich, wenn $G = \frac{2^2T}{Q^3}$ gesetzt wird, für *G*-dur die Schwingungsverhältnisse

$$\frac{2^2T}{Q^3},\ \frac{2T}{Q},\ \frac{2^2T^2}{Q^3},\ \frac{2^3T}{Q^4},\ \frac{2^2T}{Q^2},\ \frac{2^3T^2}{Q^4},\ \frac{2^2T^2}{Q^2},\ \frac{2^3T}{Q^3}$$

die Benennungen

$$\underline{G},\ \underline{A},\ \underline{H},\ \underline{c},\ \underline{d},\ \underline{\underline{e}},\ \underline{\underline{fis}},\ \underline{g},$$

und für D-dur, wenn $D = \frac{2T}{Q^2}$ gesetzt wird, die Schwingungsverhältnisse

$$\frac{2T}{Q^2},\ T,\ \frac{2T^2}{Q^2},\ \frac{2^2T}{Q^3},\ \frac{2T}{Q},\ \frac{2^2T^2}{Q^3},\ \frac{2T^2}{Q},\ \frac{2^2T}{Q^2}$$

die Benennungen

$$\underline{D},\ \underline{E},\ \underline{\underline{Fis}},\ \underline{G},\ \underline{A},\ \underline{H},\ \underline{\underline{cis}},\ \underline{d}.$$

Conform mit der C-durscala sind aber diese Tonleitern nicht bloss wegen der Identität der Schwingungsverhältnisse ihrer Töne in Bezug auf den Grundton jeder derselben mit der entsprechenden der Durscala, sondern zugleich desshalb, weil ihre Töne sich in ganz analoger Weise auf die Reihen II und III, wie die der C-durscala, welche die Form

$$C,\ D,\ \underline{E},\ F,\ G,\ \underline{A},\ \underline{H},\ c$$

hat, sich auf die Reihen I und II beziehen; oder mit anderen Worten: weil hier die einmal und zweimal unterstrichenen Töne dieselben Stellen einnehmen, wie in der C-durscala bzw. die nicht unterstrichenen und einmal unterstrichenen Töne.

Alles Vorstehende gilt offenbar ganz allgemein von der Durscala jedes der Reihe II entnommenen Grundtons. Macht man die durch die C-durscala bestimmten Töne zu Grundtönen von Durscalen, so sind dieselben folgende:

$$\begin{array}{cccccccc}
G, & A, & \underline{H}, & c, & d, & \underline{e}, & \underline{\underline{fis}}, & c, \\
D, & E, & \underline{\underline{Fis}}, & G, & A, & \underline{H}, & \underline{\underline{cis}}, & d, \\
\underline{A}, & \underline{H}, & \underline{\underline{cis}}, & \underline{d}, & \underline{e}, & \underline{\underline{fis}}, & \underline{\underline{gis}}, & \underline{a}, \\
\underline{E}, & \underline{\underline{Fis}}, & \underline{\underline{Gis}}, & \underline{A}, & \underline{H}, & \underline{\underline{cis}}, & \underline{\underline{dis}}, & \underline{e}, \\
\underline{H}, & \underline{\underline{cis}}, & \underline{\underline{dis}}, & \underline{e}, & \underline{\underline{fis}}, & \underline{\underline{gis}}, & \underline{\underline{ais}}, & \underline{h}, \\
F, & G, & \underline{A}, & B, & c, & \underline{d}, & \underline{e}, & f.
\end{array}$$

Dass, wie man hieraus auf einen Blick übersieht, die durch ihre Grundtöne bestimmten Scalentöne in verschiedenen Tonarten bei gleicher Benennung nicht immer in Bezug auf C dieselben Schwingungsverhältnisse haben können, ist die unvermeidliche Consequenz der, conforme Tonleitern fordernden, reinen Stimmung. Ob aber der Grundton in die Tonreihe I oder in II fällt, hängt von verschiedenen Umständen ab. Da z. B. die Saiten der Streichinstrumente nach Quinten gestimmt werden, so wird der Violinist geneigt seyn, für G-dur, D-, A-, E-dur zunächst die

Töne der gleichbenannten freischwingenden Saiten zu benutzen; aber die Modulation kann in Tonarten überführen, deren Grundtöne nicht bloss durch Quinten, sondern durch Quinten und Terzen bestimmt werden, daher nicht in der Reihe I, sondern in der Reihe II liegen.

Bemerkt werden mag hier noch: 1) dass das in § 5 über die Verhältnisse der erhöhten und erniedrigten Töne zu ihren Haupttönen und zu einander in Bezug auf die Tonreihen I und II Vorgetragene selbstverständlich auch von den entsprechenden Tönen der Reihe III gilt, da alle ihre Töne um ein Komma tiefer stehen als die gleichnamigen der Reihe II und um zwei Kommata tiefer als die gleichnamigen der Reihe I; und 2) dass, wenn Veranlassung seyn sollte, einen Ton der Reihe III zum Grundton zu machen, es zu seiner Durscala der Bildung einer vierten Reihe bedürfen würde; deren Töne wieder um ein Komma tiefer stehen müssten, als die gleichnamigen der Reihe III; dass ferner die Durscalen der Töne dieser vierten Reihe die Bildung einer fünften Reihe mit abermaliger Vertiefung ihrer Töne um ein Komma erfordern würden, u. s. f. ohne Ende. — Wenden wir uns jetzt zunächst zu der Molltonleiter.

14.

Die normale Molltonleiter wird nach *Hauptmann* und *Helmholtz* gebildet aus den Mollaccorden des Grundtons und der Unterquinte und aus dem Duraccord der Oberquinte, also nach unserer Bezeichnung, aus den Accorden

$$\overset{-1}{F}\overset{-1}{As}C,\quad CEsG \text{ und } G\overset{1}{H}D.$$

Es ist aber hier *Es* die reine kleine Terz $\frac{6}{5}$ von *C* und ebenso $\overset{-1}{As}$ dieselbe reine kleine Terz von $\overset{-1}{F}$. Da nun die reine kleine Terz, als Ergänzung der grossen Terz zur Quinte, $= \frac{Q}{T}$, so sind in Bezug auf den Grundton *C* für die die *C*-mollscala bildenden Töne

$$\overset{-1}{F},\ \overset{-1}{As},\ C,\ Es,\ G,\ H,\ \overset{1}{D}$$

die relativen Schwingungszahlen

$$\frac{1}{Q},\ \frac{1}{T},\ 1,\ \frac{Q}{T},\ Q,\ QT,\ Q^2,$$

und ergiebt sich daraus, wenn man die Töne $\overset{-1}{F}$, $\overset{-1}{As}$ und $\overset{1}{D}$ in die Octave zwischen C und c verlegt, die normale C-mollscala

$$C,\ D,\ Es,\ F,\ G,\ As,\ H,\ c$$

mit den Schwingungszahlen

$$1,\ \frac{Q^2}{2},\ \frac{Q}{T},\ \frac{2}{Q},\ Q,\ \frac{2}{T},\ QT,\ 2$$

d. i.

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{6}{5},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{15}{8},\ 2.$$

Nun ist aber in der Reihe I (§ 4) der durch blosse Quinten bestimmten Töne $Es = \frac{2^2}{Q^3}$ und $As = \frac{2^3}{Q^4}$. Man erhält aus diesen Ausdrücken diejenigen, welche nach dem Vorstehenden Es und As in der C-mollscala zukommen, durch Multiplication mit $\frac{Q^4}{2^2T}$, d. i. der relativen Schwingungszahl des syntonischen Kommas. Das Es und das As der C-mollscala ist also um ein solches Komma höher als das nach blossen Quinten bestimmte Es und As. Bezeichnen wir nun diese Erhöhung beider Töne durch einen ihren Namen übergesetzten Strich und bemerken, dass auch H, weil der Tonreihe II (§ 5) angehörig, bestimmter durch $\underline{H}$ zu bezeichnen ist, so wird das genaue Schema der normalen C-mollscala

(1) $$C,\ D,\ \overline{Es},\ F,\ G,\ \overline{As},\ \underline{H},\ c,$$

mit den zuvor angegebenen Schwingungszahlen.

Hier wiederholen sich die Tonstufen der C-durscala

$$\frac{D}{C} = \frac{G}{F} = \frac{Q^2}{2} = \frac{9}{8},$$ der grosse ganze Ton,

$$\frac{F}{\overline{Es}} = \frac{2T}{Q^2} = \frac{10}{9},$$ der kleine ganze Ton,

$$\frac{\overline{Es}}{D} = \frac{\overline{As}}{G} = \frac{c}{\underline{H}} = \frac{2}{QT} = \frac{16}{15},$$ der grosse halbe Ton.

Es kommt aber als eine vierte neue, dieser Mollscala eigenthümliche Tonstufe noch hinzu

$$\frac{\underline{H}}{\overline{As}} = \frac{QT^2}{2} = \frac{75}{64},$$ die übermässige Secunde.

Da $\frac{QT^2}{2} = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{T^2}{Q}$, nach § 3 aber $\frac{T^2}{Q}$ die Schwingungszahl des kleinen halben Tons ist, so ist die übermässige Secunde um den kleinen halben Ton höher als die grosse Secunde oder der grosse

ganze Ton. Hiernach ist die Stufenfolge der Töne der normalen *C*-mollscala

$$\frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{75}{64}, \frac{16}{15}.$$

Während also die *C*-durscala (§ 3) die Stufe $\frac{9}{8}$ dreimal und die Stufen $\frac{10}{9}$ und $\frac{16}{15}$ zweimal enthielt, enthält diese *C*-mollscala die Stufe $\frac{9}{8}$ nur zweimal, die Stufe $\frac{10}{9}$ nur einmal, dagegen die Stufe $\frac{16}{15}$ dreimal und dazu die ihr eigenthümliche Stufe $\frac{75}{64}$.

15.

Da für den Sänger die übermässige Secunde $\frac{75}{64}$ ein schwer gelingender Sprung ist, so sind neben der vorstehenden *C*-mollscala, die *Helmholtz* die instrumentale nennt, noch zwei Abänderungen derselben in Gebrauch, die aufsteigende und die absteigende *C*-mollscala. In der aufsteigenden vertauscht man $\overline{As}$ mit $\underline{A} = \frac{2T}{Q}$. Hiernach wird das Schema der aufsteigenden *C*-mollscala

$$C,\ D,\ \overline{Es},\ F,\ G,\ \underline{A},\ \underline{H},\ c \qquad (2)$$

mit den relativen Schwingungszahlen

$$1,\ \frac{Q^2}{2},\ \frac{Q}{T},\ \frac{2}{Q},\ Q,\ \frac{2T}{Q},\ QT,\ 2,$$

oder $1,\ \frac{9}{8},\ \frac{6}{5},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{15}{8},\ 2.$

Es ist hier $\frac{\underline{A}}{G} = \frac{2T}{Q^2} = \frac{10}{9}$ und $\frac{\underline{H}}{\underline{A}} = \frac{Q^2}{2} = \frac{9}{8}$ wie in der *C*-durscala. Die grosse Secunde tritt damit an die Stelle der übermässigen und die Stufenfolge dieser *C*-mollscala ist

$$\frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15},$$

so dass sie der Anzahl und Grösse nach dieselben Stufen wie die *C*-durscala, nur in der ersten Hälfte in andrer Ordnung enthält.

Die absteigende *C*-mollscala vertauscht $\underline{H}$ mit dem um ein Komma erhöhten *B*, das wir daher, wie zuvor $\overline{Es}$ und $\overline{As}$,

durch $\overline{B}$ bezeichnen. Da nun B, durch blosse Quinten bestimmt, $= \frac{2^2}{Q^2}$, so ist $\overline{B} = \frac{2^2}{Q^2} \cdot \frac{Q^4}{2^2 T} = \frac{Q^2}{T} = \frac{9}{5}$. Demnach ist das Schema der absteigenden C-mollscala

(3) $C,\ D,\ \overline{Es},\ F,\ G,\ \overline{As},\ \overline{B},\ c$

mit den relativen Schwingungszahlen

$$1,\ \frac{Q^2}{2},\ \frac{Q}{T},\ \frac{2}{Q},\ Q,\ \frac{2}{T},\ \frac{Q^2}{T},\ 2,$$

oder $1,\ \frac{9}{8},\ \frac{6}{5},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5},\ 2.$

Da hier, wie in der aufsteigenden C-mollscala, $\frac{\overline{As}}{G} = \frac{2}{QT} = \frac{16}{15}$, aber $\frac{\overline{B}}{\overline{As}} = \frac{Q^2}{2} = \frac{9}{8}$, und $\frac{c}{\overline{B}} = \frac{2T}{Q^2} = \frac{10}{9}$, so kommen ebenfalls wie in der aufsteigenden Scala, nach Anzahl und Grösse dieselben Tonstufen wie in der C-durscala vor, aber in der Ordnung

$$\frac{9}{8},\ \frac{16}{15},\ \frac{10}{9},\ \frac{9}{8},\ \frac{16}{15},\ \frac{9}{8},\ \frac{10}{9}.$$

Man kann die aufsteigende C-mollscala aus dem Mollaccord $C\overline{Es}G$ und den beiden Duraccorden $G\overline{H}D$ und $F\overline{A}C$, die absteigende C-mollscala aus den drei Mollaccorden $C\overline{Es}G$, $G\overline{B}D$ und $F\overline{As}C$ construirt ansehen.

16.

Von den in den drei Formen der C-mollscala vorkommenden Tönen sind C, D, F, G, c in der Reihe I, $\overline{A}$ und $\overline{H}$ in der Reihe II (§ 4) enthalten, dagegen die Töne $\overline{Es}$, $\overline{As}$ und $\overline{B}$ weder in diesen noch in der Reihe III (§ 12). Verlegt man $\overline{As}$ in die Octave unter C, so bilden

$$\overline{As}^{-1},\ \overline{Es} \text{ und } \overline{B}$$

mit den relativen Schwingungszahlen

$$\frac{1}{T},\ \frac{Q}{T},\ \frac{Q^2}{T}$$

wieder eine geometrische, nach Quinten fortschreitende Reihe, in der aber jedes Glied mit dem Factor $\frac{1}{T}$ (wie in der Reihe II

mit dem Factor T) behaftet ist. Setzt man diese Reihe aufwärts fort, so erhält man die Töne

$$\overline{F},\ \overline{C},\ \overline{G},\ \overline{D},\ \overline{A},\ \overline{E},\ \overline{H},\ \overline{Fis},\ \overline{Cis},\ \overline{Gis} \text{ u. s. w.}$$

mit den Schwingungszahlen

$$\frac{Q^3}{T},\ \frac{Q^4}{T},\ \frac{Q^5}{T},\ \frac{Q^6}{T},\ \frac{Q^7}{T},\ \frac{Q^8}{T},\ \frac{Q^9}{T},\ \frac{Q^{10}}{T},\ \frac{Q^{11}}{T},\ \frac{Q^{12}}{T};$$

abwärts fortgesetzt, schliessen sich an $\overline{As}^{-1}$ zur Linken an die Töne

$$\overline{Des}^{-1},\ \overline{Ges}^{-2},\ \overline{Ces}^{-2},\ \overline{Fes}^{-3},\ \overline{Bb}^{-4},\ \overline{Eses}^{-4},\ \overline{Ases}^{-5} \text{ u. s. w.}$$

mit den Schwingungszahlen

$$\frac{1}{QT},\ \frac{1}{Q^2T},\ \frac{1}{Q^3T},\ \frac{1}{Q^4T},\ \frac{1}{Q^5T},\ \frac{1}{Q^6T},\ \frac{1}{Q^7T}.$$

Schliessen wir auch hier vorläufig die doppelt erhöhten und erniedrigten Töne aus und versetzen die übrigbleibenden in die Octave zwischen C und c, so erhalten wir die folgende vierte Tonreihe, in welcher alle Töne um das Komma $\frac{Q^4}{2^2T} = \frac{81}{80}$ höher stehen als die gleichnamigen der Reihe I, daher ihre Zahlwerthe aus denen dieser Reihe durch Multiplication mit $\frac{81}{80}$ leicht berechnet werden können.

IV

$$\overline{Des} = \frac{2}{QT} = \frac{2^4}{3.5} = 1{,}06667$$

$$\overline{Cis} = \frac{Q^{11}}{2^6T} = \frac{3^{11}}{2^{15}.5} = 1{,}08122$$

$$\overline{D} = \frac{Q^6}{2^3T} = \frac{3^6}{2^7.5} = 1{,}13906$$

$$\overline{Es} = \frac{Q}{T} = \frac{2.3}{5} = 1{,}2$$

$$\overline{Dis} = \frac{Q^{13}}{2^9T} = \frac{3^{13}}{2^{20}.5} = 1{,}21638$$

$$\overline{Fes} = \frac{2^3}{Q^4T} = \frac{2^9}{3^4.5} = 1{,}26420$$

$$\overline{E} = \frac{Q^8}{2^4T} = \frac{3^8}{2^{10}.5} = 1{,}28144$$

$$\overline{F} = \frac{Q^3}{2T} = \frac{3^3}{2^2.5} = 1{,}35$$

$$\overline{Eis} = \frac{Q^{15}}{2^8 T} = \frac{3^{15}}{2^{21}.5} = 1{,}36841$$

$$\overline{Ges} = \frac{2^2}{Q^2 T} = \frac{2^6}{3^2.5} = 1{,}42222$$

$$\overline{Fis} = \frac{Q^{10}}{2^5 T} = \frac{3^{10}}{2^{13}.5} = 1{,}44163$$

$$\overline{G} = \frac{Q^5}{2^2 T} = \frac{3^5}{2^5.5} = 1{,}51875$$

$$\overline{As} = \frac{2}{T} = \frac{2^3}{5} = 1{,}6$$

$$\overline{Gis} = \frac{Q^{12}}{2^6 T} = \frac{3^{12}}{2^{16}.5} = 1{,}62183$$

$$\overline{A} = \frac{Q^7}{2^3 T} = \frac{3^7}{2^8.5} = 1{,}70859$$

$$\overline{B} = \frac{Q^2}{T} = \frac{3^2}{5} = 1{,}8$$

$$\overline{Ais} = \frac{Q^{14}}{2^7 T} = \frac{3^{14}}{2^{19}.5} = 1{,}82456$$

$$\overline{ces} = \frac{2^3}{Q^3 T} = \frac{2^8}{3^3.5} = 1{,}89630$$

$$\overline{H} = \frac{Q^9}{2^4 T} = \frac{3^9}{2^{11}.5} = 1{,}92217$$

$$\overline{c} = \frac{Q^4}{2T} = \frac{3^4}{2^3.5} = 2{,}025$$

$$\overline{His} = \frac{Q^{16}}{2^8 T} = \frac{3^{16}}{2^{22}.5} = 2{,}05263$$

17.

Mittels dieser vierten Tonreihe, in Verbindung mit den unter I und II in § 4 gefundenen Tonreihen, können wir nun zuerst für jeden Grundton der in der Reihe I liegt, also nur durch Quinten bestimmt ist, die ihm zugehörige, mit der des Grundtons *C* conforme normale Mollscala, wenigstens soweit dieselbe nicht doppelt erhöhte oder erniedrigte Töne fordert (wovon später), darstellen. Denn multipliciren wir die Schwingungszahl des Grundtons mit den Schwingungszahlen der Töne der *C*-mollscala (1) in § 14, nämlich der Reihe nach mit

$$\frac{Q^2}{2},\ \frac{Q}{T},\ \frac{2}{Q},\ Q,\ \frac{2}{T},\ QT,\ 2,$$

so enthalten die Producte aus der 1sten, 3ten, 4ten und 7ten dieser Schwingungszahlen in die des Grundtons nur Potenzen

von Q und 2, zeigen also Töne an, die in der Reihe I liegen. Ferner giebt das Product aus der 6ten dieser Schwingungszahlen in die des Grundtons immer einen Ausdruck, der ausser Potenzen von Q und 2 den Factor T enthält, daher einen Ton bezeichnet, der in der Reihe II liegt. Endlich geben die Producte aus der 2ten und 5ten dieser Schwingungszahlen in die des Grundtons Ausdrücke, die ausser Potenzen von Q und 2 stets den Factor $\frac{1}{T}$ enthalten, daher Töne bezeichnen, die in der Reihe IV liegen. Aus der Form der Producte erkennt man also immer mittels der Reihen I, II und IV die Benennungen der Töne, deren Schwingungszahlen jene Producte sind, und ergiebt sich daraus die normale Mollscala des gewählten Grundtons, die der C-mollscala (1) conform ist.

Sey z. B. das G der Reihe I, dessen Schwingungszahl Q ist, der Grundton, so sind die Producte aus den vorstehend wiederholten Schwingungszahlen der Töne der C-mollscala in Q der Reihe nach

$$\frac{Q^3}{2},\ \frac{Q^2}{T},\ 2,\ Q^2,\ \frac{2Q}{T},\ Q^2T,\ 2,$$

welche in den Reihen I, II, IV die Töne

$$A,\ \overline{B},\ c,\ d,\ \overline{es},\ \underline{fis},\ g$$

geben und in Verbindung mit dem Grundton G die normale mit dem Schema (1) conforme normale G-mollscala bilden. Ebenso sind die Producte in die Schwingungszahl $\frac{Q^2}{2}$ des Grundtons D in I der Reihe nach

$$\frac{Q^4}{2^2},\ \frac{Q^3}{2T},\ Q,\ \frac{Q^3}{2},\ \frac{Q^2}{T},\ \frac{Q^3T}{2},\ Q^3,$$

und entsprechen denselben, wie die Reihen I, II, IV nachweisen, die Töne

$$E,\ \overline{F},\ G,\ A,\ \overline{B},\ \underline{cis},\ d$$

der normalen D-mollscala. Ebenso sind die Producte in die Schwingungszahl $\frac{2}{Q}$ des Grundtons F

$$Q,\ \frac{2}{T},\ \frac{2^2}{Q^2},\ 2,\ \frac{2^2}{QT},\ 2T,\ \frac{2^2}{Q},$$

und geben die Töne

$$G,\ \overline{As},\ B,\ c,\ \overline{des},\ \underline{e},\ f$$

der normalen F-mollscala u. s. f. Alle diese Scalen sind aber, wie man aus ihrer Ableitung und den Orten ihrer Töne in den drei Reihen I, II und IV ersieht, der C-mollscala (1) conform.

18.

Wenn nun hier für Grundtöne, die in der Reihe I liegen, die Mollscalen theils aus Tönen derselben Reihe, theils aus solchen, um ein Komma höher stehenden, der Reihe IV, theils endlich aus solchen, um ein Komma tiefer stehenden, der Reihe II gebildet werden, so lassen sich in ganz ähnlicher Weise auch dieselben Scalen für Grundtöne, die in der Reihe II liegen, theils durch Töne derselben Reihe, theils durch solche, um ein Komma höher stehende, der Reihe I, theils durch solche, um ein Komma tiefer stehende, der Reihe III darstellen. Sind die Scalen für Grundtöne aus der Reihe I abgeleitet, so bedarf es für Grundtöne aus der Reihe II gar keiner neuen Rechnung. Man braucht nur die weder unterstrichenen noch überstrichenen Töne in den Scalen für die Grundtöne aus der Reihe I mit den gleichnamigen, aber einmal unterstrichenen zu vertauschen, die einmal unterstrichenen mit zweimal unterstrichenen und die überstrichenen mit den gleichnamigen, die weder unter- noch überstrichen sind. So erhält man für den Grundton G der Reihe II, dessen Schwingungszahl $\frac{2^2T}{Q^3}$, aus der gefundenen Scala

$$A,\ \overline{B},\ c,\ d,\ \overline{es},\ \underline{fis},\ g$$

des Grundtons G der Reihe I seine Mollscala

$$\underline{A},\ B,\ \underline{c},\ \underline{d},\ es,\ \underline{\underline{fis}},\ \underline{g};$$

aus der gefundenen Scala

$$E,\ \overline{F},\ G,\ A,\ \overline{B},\ \underline{cis},\ d$$

des Grundtons D die des Grundtons $\overline{D}$

$$\underline{E},\ F,\ \underline{G},\ \underline{A},\ B,\ \underline{\underline{cis}},\ \underline{d};$$

aus der gefundenen Scala

$$G,\ \overline{As},\ B,\ c,\ \overline{dis},\ \underline{e},\ f$$

des Grundtons F die Scala des Grundtons $\overline{F}$

$$\underline{G},\ As,\ \underline{B},\ \underline{c},\ dis,\ \underline{\underline{e}},\ \underline{f}$$ u. s. f.

Hier mag aber noch zugleich hinsichtlich der Durscalen bemerkt werden, dass, da die *C*-durscala nur aus Tönen der Reihen I und II besteht, nach Herstellung der Tonreihe IV nun auch durch eine analoge Vertauschung der nicht bestrichenen Töne mit den gleichnamigen überstrichenen und der unterstrichenen mit nichtbestrichenen aus jeder Durscala für einen Grundton der Reihe I die Durscala für den gleichbenannten Grundton der Reihe IV abgeleitet werden kann. So folgt z. B. aus der *G*-durscala

$$G,\ A,\ \underline{H},\ c,\ d,\ \underline{e},\ \underline{fis},\ g$$

die $\overline{G}$-durscala

$$\overline{G},\ \overline{A},\ H,\ \overline{c},\ \overline{d},\ e,\ fis,\ \overline{g},$$

aus der *D*-durscala

$$D,\ E,\ \underline{Fis},\ G,\ A,\ \underline{H},\ \underline{cis},\ d$$

die $\overline{D}$-durscala

$$\overline{D},\ \overline{E},\ Fis,\ \overline{G},\ \overline{A},\ H,\ cis,\ \overline{d}\ \text{u. s. f.}$$

19.

Ganz auf dieselbe Weise lässt sich zuerst für jeden in der Reihe I liegenden Grundton die aufsteigende Mollscala aus der für den Grundton *C* ableiten. Nach dem Schema (2) in § 15 sind die Schwingungszahlen der aufsteigenden *C*-mollscala

$$\frac{Q^2}{2},\ \frac{Q}{T},\ \frac{2}{Q},\ Q,\ \frac{2T}{Q},\ QT,\ 2.$$

Bildet man nun die Producte aus denselben in die Schwingungszahl des gewählten Grundtons, so enthalten dieselben, da der Grundton nur von Q abhängt, theils nur Potenzen von Q und 2, theils enthalten sie ausser diesen den Factor T, theils ausser diesen Potenzen den Factor $\frac{1}{T}$. Sie liegen daher theils in der Reihe I, theils in der Reihe II, theils in IV, und diese Tabellen geben ihre Benennungen an. Für die aufsteigende *G*-mollscala z. B. sind diese Producte, da Q die Schwingungszahl von *G*,

$$\frac{Q^3}{2},\ \frac{Q^2}{T},\ 2,\ Q^2,\ 2T,\ Q^2T,\ 2Q,$$

die der Reihe nach den Tönen

$$A,\ \overline{B},\ c,\ d,\ \underline{e},\ \underline{fis},\ g$$

zugehören. Für den Grundton F, dessen Schwingungszahl $\frac{2}{Q}$, sind diese Producte

$$Q,\ \frac{2}{T},\ \frac{2^2}{Q^2},\ 2,\ \frac{2^2T}{Q^2},\ 2T,\ \frac{2^2}{Q},$$

und entsprechen denselben die Töne

$$G,\ \overline{As},\ B,\ c,\ \underline{d},\ \underline{e},\ f,$$

welche Scalen der aufsteigenden C-mollscala conform sind. Durch die nämliche zuvor angegebene Vertauschung findet man aus ihnen für die G-mollscala die Töne

$$\underline{A},\ B,\ \underline{c},\ \underline{d},\ \underline{e},\ \overline{fis},\ \underline{g};$$

für die F-mollscala

$$\underline{G},\ As,\ \underline{B},\ \underline{c},\ \underline{d},\ \underline{e},\ \underline{f}.$$

Die gleiche Bewandniss hat es mit den absteigenden Mollscalen. Nach dem Schema (3) in § 15 kommen in der absteigenden C-mollscala nur Töne vor, die in den Reihen I und IV liegen. Aus ihren Schwingungszahlen erhält man auf die nämliche Weise wie zuvor für die absteigende G-mollscala die Töne

$$A,\ \overline{B},\ c,\ d,\ \overline{es},\ \overline{f},\ g,$$

für die absteigende F-mollscala die Töne

$$g,\ \overline{As},\ B,\ c,\ \overline{des},\ \overline{es},\ f;$$

für die absteigende E-mollscala, da $E = \frac{Q^4}{2^2}$,

$$Fis,\ \overline{G},\ A,\ H,\ \overline{c},\ \overline{d},\ e;$$

für die absteigende A-mollscala, da $A = \frac{Q^3}{2}$,

$$H,\ \overline{c},\ d,\ e,\ \overline{f},\ \overline{g},\ a,$$

u. s. f., wo die Vergleichung dieser Tonleitern zeigt, dass die Form der absteigenden Mollscala die gewöhnliche Vorzeichnung bestimmt.

Durch blosse Vertauschung der Benennungen ergiebt sich aber auch aus der gefundenen absteigenden G-mollscala für den Grundton $\underline{G} = \frac{2^2T}{Q^3}$ die absteigende G-mollscala

$$\underline{A},\ B,\ \underline{c},\ \underline{d},\ es,\ f,\ \underline{g},$$

und für den Grundton $\underline{\underline{G}} = \frac{2^4T^2}{Q^7}$ die absteigende $\underline{G}$-mollscala

$$\underline{\underline{A}},\ \underline{B},\ \underline{\underline{c}},\ \underline{\underline{d}},\ es,\ \underline{f},\ g.$$

Ebenso erhält man durch blosse Vertauschung aus den gefundenen absteigenden Mollscalen für die Grundtöne *F*, *E* und *A* die absteigenden Mollscalen für die Grundtöne $\underline{F}$ und $\underline{\underline{F}}$, $\underline{E}$ und $\underline{\underline{E}}$; $\underline{A}$ und $\underline{\underline{A}}$, und ebenso aus allen Scalen, deren Grundtöne in der Reihe I liegen, die Scalen für die gleichnamigen Grundtöne der Reihen II und III.

20.

Wir haben bis hierher die doppelt erhöhten und erniedrigten Töne unberücksichtigt gelassen, und vervollständigen daher jetzt durch sie die gewonnenen Tonreihen I—IV.

An die nach Quinten fortschreitenden Töne, welche in § 4 auf die Tonreihe I führten, schliessen sich unmittelbar folgende Töne mit den übergeschriebenen Octaven, in denen sie liegen, und mit den untergesetzten relativen Schwingungszahlen an:

aufwärts: $\overset{7}{Fisis}_{Q^{13}}$, $\overset{8}{Cisis}_{Q^{14}}$, $\overset{8}{Gisis}_{Q^{15}}$, $\overset{9}{Disis}_{Q^{16}}$, $\overset{9}{Aisis}_{Q^{17}}$, $\overset{10}{Eisis}_{Q^{18}}$, $\overset{10}{Hisis}_{Q^{19}}$,

abwärts: $\overset{-6}{Bb}_{\frac{1}{Q^{9}}}$, $\overset{-6}{Eses}_{\frac{1}{Q^{10}}}$, $\overset{-7}{Ases}_{\frac{1}{Q^{11}}}$, $\overset{-7}{Deses}_{\frac{1}{Q^{12}}}$, $\overset{-8}{Geses}_{\frac{1}{Q^{13}}}$, $\overset{-8}{Ceses}_{\frac{1}{Q^{14}}}$, $\overset{-9}{Feses}_{\frac{1}{Q^{15}}}$.

Durch Versetzung dieser Töne in die Octave zwischen *C* und *c* erhalten wir folgende Vervollständigung der Reihe I:

I*

$Cisis = \frac{Q^{14}}{2^8} = \frac{3^{14}}{2^{22}} = 1{,}14035$		$Deses = \frac{2^7}{Q^{12}} = \frac{2^{19}}{3^{12}} = 0{,}98654$	
$Disis = \frac{Q^{16}}{2^9} = \frac{3^{16}}{2^{25}} = 1{,}28290$		$Eses = \frac{2^6}{Q^{10}} = \frac{2^{16}}{3^{10}} = 1{,}10986$	
$Eisis = \frac{Q^{18}}{2^{10}} = \frac{3^{18}}{2^{28}} = 1{,}44326$		$Feses = \frac{2^9}{Q^{15}} = \frac{2^{24}}{3^{15}} = 1{,}16923$	
$Fisis = \frac{Q^{13}}{2^7} = \frac{3^{13}}{2^{20}} = 1{,}52047$		$Geses = \frac{2^8}{Q^{13}} = \frac{2^{21}}{3^{13}} = 1{,}31539$	
$Gisis = \frac{Q^{15}}{2^8} = \frac{3^{15}}{2^{23}} = 1{,}71053$		$Ases = \frac{2^7}{Q^{11}} = \frac{2^{18}}{3^{11}} = 1{,}47981$	
$Aisis = \frac{Q^{17}}{2^9} = \frac{3^{17}}{2^{26}} = 1{,}92434$		$Bb = \frac{2^6}{Q^9} = \frac{2^{15}}{3^9} = 1{,}66479$	
$Hisis = \frac{Q^{19}}{2^{10}} = \frac{3^{19}}{2^{29}} = 2{,}16488$		$ceses = \frac{2^9}{Q^{14}} = \frac{2^{23}}{3^{14}} = 1{,}75385$	

Die Vergleichung dieser Zahlen mit denen der Reihe I zeigt, dass

Cisis	zwischen	*D*	und *Es*,	*Deses*	unter	*C*,	
Disis	,,	*E*	,, *F*,	*Eses*	zwischen	*Cis*	und *D*,
Eisis	,,	*Fis*	,, *G*,	*Feses*	,,	*D*	,, *Es*,
Fisis	,,	*G*	,, *As*,	*Geses*	,,	*E*	,, *F*,
Gisis	,,	*A*	,, *B*,	*Ases*	,,	*Fis*	,, *G*,
Aisis	,,	*H*	,, *c*,	*Bb*	,,	*Gis*	,, *A*,
Hisis	über	*His*,		*ceses*	,,	*A*	,, *B*

seine Stelle hat.

Da die Töne der Reihe II um ein Komma tiefer stehen als die der Reihe I, so erhalten wir aus den vorstehenden Tonbestimmungen diejenigen, welche die Reihe II vervollständigen, durch Multiplication mit $\frac{2^2T}{Q^4} = \frac{80}{81}$, wie folgt:

II*

Cisis	$= \frac{Q^{10}T}{2^6} = \frac{3^{10}.5}{2^{18}} = 1{,}12627$	*Deses*	$= \frac{2^9T}{Q^{16}} = \frac{2^{23}.5}{3^{16}} = 0{,}97436$
Disis	$= \frac{Q^{12}T}{2^7} = \frac{3^{12}.5}{2^{21}} = 1{,}26706$	*Eses*	$= \frac{2^8T}{Q^{14}} = \frac{2^{20}.5}{3^{14}} = 1{,}09616$
Eisis	$= \frac{Q^{14}T}{2^8} = \frac{3^{14}.5}{2^{24}} = 1{,}42544$	*Feses*	$= \frac{2^{11}T}{Q^{19}} = \frac{2^{28}.5}{3^{19}} = 1{,}15480$
Fisis	$= \frac{Q^9T}{2^5} = \frac{3^9.5}{2^{16}} = 1{,}50170$	*Geses*	$= \frac{2^{10}T}{Q^{17}} = \frac{2^{25}.5}{3^{17}} = 1{,}29915$
Gisis	$= \frac{Q^{11}T}{2^6} = \frac{3^{11}.5}{2^6} = 1{,}68941$	*Ases*	$= \frac{2^9T}{Q^{15}} = \frac{2^{22}.5}{3^{15}} = 1{,}46154$
Aisis	$= \frac{Q^{13}T}{2^7} = \frac{3^{13}.5}{2^{22}} = 1{,}90058$	*Bb*	$= \frac{2^8T}{Q^{13}} = \frac{2^{19}.5}{3^{13}} = 1{,}64424$
Hisis	$= \frac{Q^{15}T}{2^8} = \frac{3^{15}.5}{2^{25}} = 2{,}13815$	*ceses*	$= \frac{2^{11}T}{Q^{18}} = \frac{2^{27}.5}{3^{18}} = 1{,}73220$

Durch nochmalige Multiplication mit $\frac{2^2T}{Q^4} = \frac{80}{81}$ erhält man weiter aus diesen Tonbestimmungen diejenigen, welche die Reihe III vervollständigen, nämlich:

III*

Cisis	$= \frac{Q^6T^2}{2^4} = \frac{3^6.5^2}{2^{14}} = 1{,}11212$	*Deses*	$= \frac{2^{11}T^2}{Q^{20}} = \frac{2^{27}.5^2}{3^{20}} = 0{,}96233$
Disis	$= \frac{Q^8T^2}{2^5} = \frac{3^8.5^2}{2^{17}} = 1{,}25142$	*Eses*	$= \frac{2^{10}T^2}{Q^{18}} = \frac{2^{24}.5^2}{3^{18}} = 1{,}08263$

$\underline{\underline{Eisis}} = \frac{Q^{10}T^2}{2^6} = \frac{3^{10}.5^2}{2^{20}} = 1,40784$	$\underline{\underline{Feses}} = \frac{2^{13}T^2}{Q^{23}} = \frac{2^{32}.5^2}{3^{23}} = 1,14054$
$\underline{\underline{Fisis}} = \frac{Q^5T^2}{2^3} = \frac{3^5.5^2}{2^{12}} = 1,48316$	$\underline{\underline{Geses}} = \frac{2^{12}T^2}{Q^{21}} = \frac{2^{29}.5^2}{3^{21}} = 1,28311$
$\underline{\underline{Gisis}} = \frac{Q^7T^2}{2^4} = \frac{3^7.5^2}{2^{15}} = 1,66855$	$\underline{\underline{Ases}} = \frac{2^{11}T^2}{Q^{19}} = \frac{2^{26}.5^2}{3^{19}} = 1,44350$
$\underline{\underline{Aisis}} = \frac{Q^9T^2}{2^5} = \frac{3^9.5^2}{2^{18}} = 1,87712$	$\underline{\underline{Bb}} = \frac{2^{10}T^2}{Q^{17}} = \frac{2^{23}.5^2}{3^{17}} = 1,63629$
$\underline{\underline{Hisis}} = \frac{Q^{11}T^2}{2^6} = \frac{3^{11}.5^2}{2^{21}} = 2,11175$	$\underline{\underline{ceses}} = \frac{2^{13}T^2}{Q^{22}} = \frac{2^{31}.5^2}{3^{22}} = 1,71082$

Da endlich die Töne der Reihe IV um ein Komma höher stehen als die gleichnamigen Töne der Reihe I, so erhält man aus den Tonbestimmungen unter I* durch Multiplication mit $\frac{Q^4}{2^2T} = \frac{81}{80}$ diejenigen Tonbestimmungen, welche die Reihe IV vervollständigen, nämlich folgende:

IV*

$\overline{\overline{Cisis}} = \frac{Q^{18}}{2^{10}T} = \frac{3^{18}}{2^{28}.5} = 1,15460$	$\overline{\overline{Deses}} = \frac{2^5}{Q^8T} = \frac{2^{15}}{3^8.5} = 1,11137$
$\overline{\overline{Disis}} = \frac{Q^{20}}{2^{11}T} = \frac{3^{20}}{2^{29}.5} = 1,29894$	$\overline{\overline{Eses}} = \frac{2^4}{Q^6T} = \frac{2^{12}}{3^6.5} = 1,12373$
$\overline{\overline{Eisis}} = \frac{Q^{22}}{2^{12}T} = \frac{3^{22}}{2^{32}.5} = 1,46130$	$\overline{\overline{Feses}} = \frac{2^7}{Q^{11}T} = \frac{2^{20}}{3^{11}.5} = 1,18384$
$\overline{\overline{Fisis}} = \frac{Q^{17}}{2^9T} = \frac{3^{17}}{2^{24}.5} = 1,53948$	$\overline{\overline{Geses}} = \frac{2^6}{Q^9T} = \frac{2^{17}}{3^9.5} = 1,33183$
$\overline{\overline{Gisis}} = \frac{Q^{19}}{2^{10}T} = \frac{3^{19}}{2^{27}.5} = 1,73191$	$\overline{\overline{Ases}} = \frac{2^5}{Q^7T} = \frac{2^{14}}{3^7.5} = 1,49830$
$\overline{\overline{Aisis}} = \frac{Q^{21}}{2^{11}T} = \frac{3^{21}}{2^{30}.5} = 1,94839$	$\overline{\overline{Bb}} = \frac{2^4}{Q^5T} = \frac{2^{11}}{3^5.5} = 1,68560$
$\overline{\overline{Hisis}} = \frac{Q^{23}}{2^{12}T} = \frac{3^{23}}{2^{33}.5} = 2,19195$	$\overline{\overline{ceses}} = \frac{2^7}{Q^{10}T} = \frac{2^{19}}{3^{10}.5} = 1,77577$

Die Töne unter II*, III*, IV* liegen bezw. zwischen denselben Tönen der Reihen II, III, IV, wie die Töne unter I* zwischen den Tönen der Reihe I. — Durch diese Ergänzung der Reihen I—IV kann nun auch jede Dur- und Molltonleiter, welche doppelt erhöhte und erniedrigte Töne fordert, hergestellt werden.

21.

Die doppelt erhöhten und erniedrigten Töne stehen um eben soviel höher, bezw. tiefer als die ihnen entsprechenden einfach

erhöhten und erniedrigten, wie diese bezw. höher oder tiefer stehen, als die ihnen entsprechenden Haupttöne; und zwar sind alle diese Erhöhungen und Erniedrigungen einander gleich. Denn die Tonverhältnisse

$$\frac{Cisis}{Cis}, \frac{Disis}{Dis}, \frac{Eisis}{Eis}, \frac{Fisis}{Fis}, \frac{Gisis}{Gis}, \frac{Aisis}{Ais}, \frac{Hisis}{His},$$

desgleichen

$$\frac{Des}{Deses}, \frac{Es}{Eses}, \frac{Fes}{Feses}, \frac{Ges}{Geses}, \frac{As}{Ases}, \frac{B}{Bb}, \frac{ces}{ceses},$$

sind sämmtlich $= \frac{Q^7}{2^4}$ und betragen daher ebensoviel wie (nach § 5)

$$\frac{Cis}{C}, \frac{Dis}{D}, \frac{Eis}{E} \text{ etc.}, \quad \frac{D}{Des}, \frac{E}{Es}, \frac{F}{Fes} \text{ etc.}$$

Ebenso sind die Verhältnisse

$$\frac{Cisis}{D}, \frac{Disis}{E}, \frac{Eisis}{F}, \frac{Fisis}{G}, \frac{Gisis}{A}, \frac{Aisis}{H}, \frac{Hisis}{cis},$$

desgleichen

$$\frac{C}{Deses}, \frac{D}{Eses}, \frac{Es}{Feses}, \frac{F}{Geses}, \frac{G}{Ases}, \frac{A}{Bb}, \frac{B}{ceses},$$

sämmtlich $= \frac{Q^{12}}{2^7}$, d. i. gleich dem pythagorischen Komma; ebenso sind die Tonverhältnisse

$$\frac{Cisis}{Deses}, \frac{Disis}{Eses}, \frac{Eisis}{Fes}, \frac{Eis}{Feses}, \frac{Fisis}{Geses}, \frac{Gisis}{Ases}, \frac{Aisis}{Bb}, \frac{Hisis}{ces}, \frac{His}{ceses},$$

sämmtlich $= \frac{Q^{26}}{2^{15}}$, d. i. $= \frac{Q^2}{2}\left(\frac{Q^{12}}{2^7}\right)^2$ und somit um zwei pythagorische Kommata grösser als der grosse ganze Ton.

Dass alles dieses ebenmässig von den gleichbenannten Tönen der Reihen II, III und IV gilt, leuchtet nach den einfachen Beziehungen derselben zur Reihe I unmittelbar ein.

22.

Ein sehr bemerkenswerthes Resultat giebt die Vergleichung der Töne der Reihen II und II* mit denen der Reihe I. Es zeigt sich nämlich, dass auch die Tonverhältnisse

$$\frac{Cis}{Des}, \frac{Dis}{Es}, \frac{E}{Fes}, \frac{Eis}{F}, \frac{Fis}{Ges}, \frac{Gis}{As}, \frac{Ais}{B}, \frac{H}{ces}, \frac{His}{c},$$

desgleichen

$$\frac{\overline{Cisis}}{D}, \quad \frac{\overline{Disis}}{E}, \quad \frac{\overline{Eisis}}{Fis}, \quad \frac{\overline{Fisis}}{G}, \quad \frac{\overline{Gisis}}{A}, \quad \frac{\overline{Aisis}}{H}, \quad \frac{\overline{Hisis}}{cis},$$

sämmtlich unter einander gleich, und zwar $= \frac{Q^8 T}{2^5} = \frac{3^8.5}{2^{15}}$ sind. Setzt man diesen Zahlwerth $= \left(\frac{81}{80}\right)^x$, so erhält man $x = 0{,}0909$, d. i. $= \frac{1}{11}$[1]). Alle in den vorstehenden Ausdrücken unterstrichene, daher in den Reihen II und II* liegende Töne stehen also um ein Elftel des syntonischen Kommas höher als die unter ihnen stehenden nicht unterstrichenen aus der Reihe I. Dieses Intervall ist dasselbe, um welches die Quinte der gleichschwebenden Temperatur tiefer steht als die reine Quinte. Dieser Tonunterschied ist aber, selbst nach *Helmholtz* (der ihn »nicht der Rede werth« nennt) dem feinsten musikalischen Gehör nur unter den günstigsten Bedingungen erkennbar. Demnach lassen sich die angeführten unter einander stehenden Töne als identisch und nur nominell verschieden betrachten. Für unser Gehör ist *Cis* identisch mit *Des*, *Dis* identisch mit *Es*, *E* mit *Fes* u. s. f. Ebenso sind aber auch, wie man leicht bemerkt, *Cis* und *Des*, *Dis* und *Es*, *E* und *Fes* u. s. w. identisch, aber auch *Cis* und *Des*, *Dis* und *Es*, *E* und *Fes* etc. — Hierdurch vermindert sich die Anzahl der zur Herstellung reiner Scalen nothwendigen Töne.

23.

Da gleichwohl diese nicht unterscheidbaren Töne Schwingungszahlen haben, die von der dritten Decimale an differiren, so kann man, da im allgemeinen weder die unterstrichenen Töne vor den nicht unterstrichenen noch diese vor jenen einen Vorzug haben, um beiden gleichmässig gerecht zu werden, das geome-

---

[1]) Es sagt diess mit andern Worten aus, dass 8 Quinten und eine grosse Terz zusammengenommen nur $\frac{1}{11}$ Komma mehr betragen als 5 Octaven. Genau ist $\frac{3^8.5}{2^{15}} = \frac{32805}{32768}$, wovon die ersten genäherten Werthe sind $\frac{886}{885}$ und $\frac{887}{886}$, der letzte $\frac{7093}{7085}$.

trische Mittel aus den Schwingungszahlen der identischen Töne nehmen. So wird z. B., da $\underline{Cis} = \frac{Q^3T}{2^2}$ und $Des = \frac{2^3}{Q^5}$, das geometrische Mittel zwischen den Ausdrücken der Schwingungszahlen beider Töne $= \sqrt{\frac{Q^3T}{2^2} \cdot \frac{2^3}{Q^5}} = \sqrt{\frac{2T}{Q^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{10} = 1{,}05409$. Da jedoch die Schwingungszahlen, aus denen das Mittel genommen wird, sehr wenig verschieden sind, und das geometrische Mittel aus zwei Zahlen a und $a+\omega$, $\sqrt{a(a+\omega)}$, wenn ω gegen a sehr klein ist, in das arithmetische $\frac{1}{2}(2a+\omega)$ übergeht, so kann man sich mit völlig zureichender Schärfe des arithmetischen Mittels bedienen. Dieses weicht von den beiden Schwingungszahlen, die ihm zu Grunde liegen, nur um $\frac{1}{212}$ Komma ab. Hiernach erhalten wir nun für die angegebenen identischen Töne folgende Bestimmungen ihrer Schwingungszahlen:

$$\underline{Cis} = Des = \frac{1}{Q}\sqrt{2T} = \frac{1}{3}\sqrt{10} = 1{,}05409$$

$$\underline{Dis} = Es = \frac{Q}{2^3}\sqrt{2T} = \frac{3}{2}\sqrt{10} = 1{,}18585$$

$$\underline{E} = Fes = \frac{2^2}{Q^4}\sqrt{2T} = \frac{2^5}{3^4}\sqrt{10} = 1{,}24929$$

$$\underline{Eis} = F = \frac{Q^3}{2^2}\sqrt{2T} = \frac{3^3}{2^6}\sqrt{10} = 1{,}33409$$

$$\underline{Fis} = Ges = \frac{2}{Q^2}\sqrt{2T} = \frac{2^2}{3^2}\sqrt{10} = 1{,}40546$$

$$\underline{Gis} = As = \sqrt{2T} = \frac{1}{2}\sqrt{10} = 1{,}58114$$

$$\underline{Ais} = B = \frac{Q^2}{2}\sqrt{2T} = \frac{3^2}{2^4}\sqrt{10} = 1{,}77878$$

$$\underline{H} = ces = \frac{2^2}{Q^3}\sqrt{2T} = \frac{2^6}{3^3}\sqrt{10} = 1{,}87394$$

$$\underline{His} = c = \frac{Q^4}{2^2}\sqrt{2T} = \frac{3^4}{2^7}\sqrt{10} = 2{,}00113$$

$$\underline{Cisis} = D = \frac{Q^6}{2^4}\sqrt{2T} = \frac{3^6}{2^{11}}\sqrt{10} = 1{,}12564$$

$$\underline{Disis} = E = \frac{Q^8}{2^5}\sqrt{2T} = \frac{3^8}{2^{14}}\sqrt{10} = 1{,}26634$$

$$\underline{Eisis} = Fis = \frac{Q^{10}}{2^6}\sqrt{2T} = \frac{3^{10}}{2^{17}}\sqrt{10} = 1{,}42463$$

$$\underline{Fisis} = G = \frac{Q^5}{2^3}\sqrt{2T} = \frac{3^5}{2^9}\sqrt{10} = 1{,}50085$$

$$\underline{Gisis} = A = \frac{Q^7}{2^4}\sqrt{2T} = \frac{3^7}{2^{12}}\sqrt{10} = 1{,}68845$$

$$\underline{Aisis} = H = \frac{Q^9}{2^5}\sqrt{2T} = \frac{3^9}{2^{15}}\sqrt{10} = 1{,}89951$$

$$\underline{Hisis} = cis = \frac{Q^{11}}{2^6}\sqrt{2T} = \frac{3^{11}}{2^{18}}\sqrt{10} = 2{,}13694$$

Die übrigen Töne der Reihen I, I*, II und II* behalten ihre Schwingungszahlen unverändert.

24.

Wenn sich nun im Vorstehenden die Schwingungszahlen dieser Temperatur nahe gleich zeigten, so kann man sie völlig gleich machen, wenn man entweder die Schwingungszahl der Quinte Q, oder die der Terz T, oder beide so verändert, dass dadurch genau $\frac{Q^8T}{2^5} = 1$ wird, jedoch dabei die Abweichung dieser Töne von der Reinheit unmerklich ist. Mit andern Worten heisst diess aber: es muss die Quinte oder die Terz oder es müssen beide temperirt werden. Und da alle Töne theils allein durch Quinten, theils durch Quinten und Terzen bestimmt werden, so werden mit der Quinte zugleich alle Töne des Systems, mit der Terz aber nur die der Reihen II und II* temperirt.

Setzen wir zuerst fest, die Terz solle rein bleiben, so fordert die Bedingung $\frac{Q^8T}{2^5} = 1$, dass

$$Q = \left(\frac{2^5}{T}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{2^7}{5}\right)^{\frac{1}{8}} = 1{,}49979$$

sey. Setzt man, um zu bestimmen, um wie viel diese Schwingungszahl kleiner ist als die der reinen Quinte $\frac{3}{2}$,

$$\left(\frac{2^7}{5}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\frac{81}{80}\right)^{x} = \frac{3}{2}, \text{ woraus, da } \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{12}{11}},$$

folgt $\left(\frac{81}{80}\right)^{8x} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} \cdot \frac{80}{81} = \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{11}}$, so ergiebt sich $x = \frac{1}{88}$.

Diese temperirte Quinte steht also nur um $\frac{1}{88}$ Komma tiefer als die reine und ist daher als völlig rein zu betrachten. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die durch dieselbe und die reine Terz

bestimmten Töne in sehr verschiedenen Graden und nach entgegensetzten Seiten von der Reinheit abweichen. Das hierdurch sich ergebende temperirte Tonsystem ist dasjenige, welches Helmholtz's Harmonium zu Grunde liegt.

25.

Es haben nämlich die allgemeinen Ausdrücke der Schwingungszahlen aller in den Reihen I und II (§ 4), I* und II* (§ 20) enthaltenen Töne die gemeinsame Form $AQ^{\pm n}$. In den Reihen I und I* enthält A nur theils positive theils negative Potenzen von 2, in den Reihen II und II* dagegen ausserdem noch den constanten Factor T, die Terz, welche nach der Voraussetzung die reine ist, also keinen veränderlichen Werth hat. Ferner hat $+n$ in der Reihe I alle Werthe von 0 bis $+12$; $-n$ alle Werthe von -1 bis -8; in der Reihe I* aber hat $+n$ alle Werthe von $+13$ bis $+19$, und $-n$ alle Werthe von -9 bis -15. In der Reihe II dagegen sind die Werthe, die $+n$ hat, 0 bis $+8$, die, welche $-n$ zukommen, -1 bis -12; in der Reihe II* endlich hat $+n$ alle Werthe von $+9$ bis $+15$, und $-n$ alle Werthe von -13 bis -19.

Tritt nun an die Stelle der reinen Quinte $Q = \frac{3}{2}$ die temperirte $Q_1 = \left(\frac{2^7}{5}\right)^{\frac{1}{8}}$, so bewirkt diess, wie es sich zeigte, eine Erniedrigung der Quinte um $\frac{1}{88}$ Komma. Hieraus folgt, dass durch die Vertauschung der reinen Quinte Q mit der temperirten Q, jeder durch Q^{+n} bestimmte Ton um $\frac{n}{88}$ Komma erniedrigt, und ebenso, dass jeder durch Q^{-n} oder $\frac{1}{Q^n}$ bestimmte Ton um $\frac{n}{88}$ Komma erhöht wird. So steht z. B. der temperirte Ton $\frac{Q_1^4}{2^2}$ in Vergleich mit dem reinen $\frac{Q^4}{2^2}$ um $\frac{4}{88}$ Komma tiefer als dieser, der temperirte Ton $\frac{2^3}{Q_1^5}$ um $\frac{5}{88}$ Komma höher als der reine $\frac{2^3}{Q^6}$. — Hierdurch erhalten wir für die Tonpaare, deren Schwingungszahlen durch die Temperirung der Quinte gleich sind, und

die dadurch in einen einzigen Ton zusammenfliessen, die Abweichungen dieses Tons von den beiden reinen Tönen, aus deren Verschmelzung er hervorgeht, in Theilen des Komma's. Es ist z. B. das temperirte $\underline{Cis} = \frac{Q_1{}^3 T}{2^2}$ gleich dem temperirten $Des = \frac{2^3}{Q_1{}^5}$; daher steht der identificirte Ton $\underline{Cis} = Des$ um $\frac{5}{88}$ Komma höher als das reine $Des = \frac{2^3}{Q^5}$, und um $\frac{3}{88}$ Komma tiefer als das reine $\underline{Cis} = \frac{Q^3 T}{2^4}$.

26.

Wir können hiernach, ohne dass es nöthig ist, die Schwingungszahlen der durch Einführung der temperirten Quinte Q_1 identificirten Tonpaare zu berechnen, ihre Abweichungen von den gleichnamigen reinen Tönen, wie folgt angeben. Es ist, wenn wir die reinen Tonwerthe von den temperirten durch ein beigesetztes * unterscheiden,

$$\underline{Cis} = \frac{Q_1{}^3 T}{2^2} = Des = \frac{2^3}{Q_1{}^5} = \underline{Cis}^* - \frac{3}{88}\text{Komma} = Des^* + \frac{5}{88}\text{Komma}$$

$$\underline{Dis} = \frac{Q_1{}^5 T}{2^3} = Es = \frac{2^2}{Q_1{}^3} = \underline{Dis}^* - \frac{5}{88} \text{ ,, } = Es^* + \frac{3}{88} \text{ ,,}$$

$$\underline{E} = T = Fes = \frac{2^5}{Q_1} = \underline{E}^* = Fes^* + \frac{8}{88} \text{ ,,}$$

$$\underline{Eis} = \frac{Q_1{}^7 T}{2^4} = F = \frac{2}{Q_1} = \underline{Eis}^* - \frac{7}{88} \text{ ,, } = F^* + \frac{1}{88} \text{ ,,}$$

$$\underline{Fis} = \frac{Q_1{}^2 T}{2} = Ges = \frac{2^4}{Q_1{}^6} = \underline{Fis}^* - \frac{2}{88} \text{ ,, } = Ges^* + \frac{6}{88} \text{ ,,}$$

$$\underline{Gis} = \frac{Q_1{}^4 T}{2^2} = As = \frac{2^3}{Q_1{}^4} = \underline{Gis}^* - \frac{4}{88} \text{ ,, } = As^* + \frac{4}{88} \text{ ,,}$$

$$\underline{Ais} = \frac{Q_1{}^6 T}{2^3} = B = \frac{2^2}{Q_1{}^2} = \underline{Ais}^* - \frac{6}{88} \text{ ,, } = B^* + \frac{2}{88} \text{ ,,}$$

$$\underline{H} = Q_1 T = ces = \frac{2^5}{Q_1{}^7} = \underline{H}^* - \frac{1}{88} \text{ ,, } = ces^* + \frac{7}{88} \text{ ,,}$$

$$\underline{His} = \frac{Q_1{}^8 T}{2^4} = c = 2 = \underline{His}^* - \frac{8}{88} \text{ ,, } = c^*$$

$$\underline{Cisis} = \frac{Q_1{}^{10} T}{2^6} = D = \frac{Q_1{}^2}{2} = \underline{Cisis}^* - \frac{10}{88} \text{ ,, } = D^* - \frac{2}{88} \text{ ,,}$$

$$\underline{Disis} = \frac{Q_1{}^{12} T}{2^7} = E = \frac{Q_1{}^4}{2^2} = \underline{Disis}^* - \frac{12}{88} \text{ ,, } = E^* - \frac{4}{88} \text{ ,,}$$

$$\underline{Eisis} = \frac{Q_1^{14}T}{2^8} = Fis = \frac{Q_1^6}{2^3} = \underline{Eisis}^* - \frac{11}{88}\text{Komma} = Fis^* - \frac{6}{88}\text{Komma}$$

$$\underline{Fisis} = \frac{Q_1^9T}{2^5} = G = Q_1 = Fisis^* - \frac{9}{88}\text{ ,, } = G^* - \frac{1}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{Gisis} = \frac{Q_1^{11}T}{2^6} = A = \frac{Q_1^3}{2} = \underline{Gisis}^* - \frac{11}{88}\text{ ,, } = A^* - \frac{3}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{Aisis} = \frac{Q_1^{13}T}{2^7} = H = \frac{Q_1^5}{2^2} = \underline{Aisis}^* - \frac{13}{88}\text{ ,, } = H^* - \frac{5}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{Hisis} = \frac{Q_1^{15}T}{2^8} = cis = \frac{Q_1^7}{2^3} = \underline{Hisis}^* - \frac{15}{88}\text{ ,, } = cis^* - \frac{7}{88}\text{ ,,}$$

Wo hier die Abweichungen der temperirten Töne von den reinen nicht mehr als $\frac{8}{88}$ Komma betragen, da ist der Unterschied ein unhörbarer. Die Abweichungen der übrigen temperirten Töne von den gleichnamigen reinen sind folgende:

$$\underline{Des} = \frac{2^5T}{Q_1^9} = \underline{Des}^* + \frac{9}{88}\text{ Komma}$$

$$\underline{Es} = \frac{2^4T}{Q_1^7} = \underline{Es}^* + \frac{7}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{Fes} = \frac{2^7T}{Q_1^{12}} = \underline{Fes}^* + \frac{12}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{Ges} = \frac{2^6T}{Q_1^{10}} = \underline{Ges}^* + \frac{10}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{As} = \frac{2^5T}{Q_1^8} = As^* + \frac{8}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{B} = \frac{2^4T}{Q_1^6} = B^* + \frac{6}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{ces} = \frac{2^7T}{Q_1^{11}} = ces^* + \frac{11}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{D} = \frac{2T}{Q_1^2} = D^* + \frac{2}{88}\text{Komma} \qquad Dis = \frac{Q_1^9}{2^5} = Dis^* - \frac{9}{88}\text{Komma}$$

$$\underline{F} = \frac{2^3T}{Q_1^5} = F^* + \frac{5}{88}\text{ ,,} \qquad Eis = \frac{Q_1^{11}}{2^6} = Eis^* - \frac{11}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{G} = \frac{2^2T}{Q_1^3} = G^* + \frac{3}{88}\text{ ,,} \qquad Gis = \frac{Q_1^8}{2^4} = Gis^* - \frac{8}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{A} = \frac{2T}{Q_1} = A^* + \frac{1}{88}\text{ ,,} \qquad Ais = \frac{Q_1^{10}}{2^5} = Ais^* - \frac{10}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{c} = \frac{2^3T}{Q_1^4} = c^* + \frac{4}{88}\text{ ,,} \qquad His = \frac{Q_1^{12}}{2^6} = His^* - \frac{12}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{Deses} = \frac{2^9T}{Q_1^{16}} = Deses^* + \frac{16}{88}\text{ ,,} \qquad Deses = \frac{2^7}{Q_1^{12}} = Deses^* + \frac{12}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{Eses} = \frac{2^8T}{Q_1^{14}} = Eses^* + \frac{14}{88}\text{ ,,} \qquad Eses = \frac{2^6}{Q_1^{10}} = Eses^* + \frac{10}{88}\text{ ,,}$$

$$\underline{Feses} = \frac{2^{11}T}{Q_1{}^{19}} = Feses^* + \frac{19}{88}\text{Komma} \qquad \underline{Feses} = \frac{2^{9}}{Q_1{}^{15}} = Feses^* + \frac{15}{88}\text{Komma}$$

$$\underline{Geses} = \frac{2^{10}T}{Q_1{}^{17}} = Geses^* + \frac{17}{88}\ ,, \qquad \underline{Geses} = \frac{2^{8}}{Q_1{}^{13}} = Geses^* + \frac{13}{88}\ ,,$$

$$\underline{Ases} = \frac{2^{9}T}{Q_1{}^{15}} = Ases^* + \frac{15}{88}\ ,, \qquad \underline{Ases} = \frac{2^{7}}{Q_1{}^{11}} = Ases^* + \frac{11}{88}\ ,,$$

$$\underline{Bb} = \frac{2^{8}T}{Q_1{}^{13}} = Bb^* + \frac{13}{88}\ ,, \qquad \underline{Bb} = \frac{2^{6}}{Q_1{}^{9}} = Bb^* + \frac{9}{88}\ ,,$$

$$\underline{ceses} = \frac{2^{11}T}{Q_1{}^{18}} = ceses^* + \frac{18}{88}\ ,, \qquad \underline{ceses} = \frac{2^{9}}{Q_1{}^{14}} = ceses^* + \frac{14}{88}\ ,,$$

$$Cisis = \frac{Q_1{}^{14}}{2^{8}} = Cisis^* - \frac{14}{88}\text{ Komma}$$

$$Disis = \frac{Q_1{}^{16}}{2^{9}} = Disis^* - \frac{16}{88}\ ,,$$

$$Eisis = \frac{Q_1{}^{18}}{2^{10}} = Eisis^* - \frac{18}{88}\ ,,$$

$$Fisis = \frac{Q_1{}^{13}}{2^{7}} = Fisis^* - \frac{13}{88}\ ,,$$

$$Gisis = \frac{Q_1{}^{15}}{2^{8}} = Gisis^* - \frac{15}{88}\ ,,$$

$$Aisis = \frac{Q_1{}^{17}}{2^{9}} = Aisis^* - \frac{17}{88}\ ,,$$

$$Hisis = \frac{Q_1{}^{19}}{2^{10}} = Hisis^* - \frac{19}{88}\ ,,$$

Wie man hieraus ersieht, weichen die meisten doppelt erhöhten und erniedrigten temperirten Töne von den gleichnamigen reinen nicht ganz unmerklich ab. — Dagegen weichen unter allen diesen temperirten Tönen diejenigen, welche Helmholtz für sein Harmonium benutzt hat, nämlich *C*, *G*, *D*, *A*, *E*, *H*, *Fis*, *Cis*; ferner *As*, *Es*, *B*, *F*, *c*, *G*, *D*, *A*; endlich $\underline{E} = Fes$, $\underline{H} = ces$, $\underline{Fis} = Ges$, $\underline{Cis} = Des$, $\underline{Gis} = As$, $\underline{Dis} = Es$, $\underline{Ais} = B$, $\underline{Eis} = F$, von der Reinheit ganz unmerklich ab und geben daher, besonders in den auf dem Instrument ausführbaren Durtonarten, für das Gehör völlig reine Tonleitern.

27.

Man kann der Bedingung $\frac{Q^8T}{2^5} = 1$, unter welcher 16 Paare von Tönen vollkommen gleiche Schwingungszahlen erhalten, zweitens auch dadurch Genüge leisten, dass man festsetzt, die Quinte solle rein bleiben und die Terz temperirt werden. Dann wird

$$T = \frac{2^5}{Q^8} = \frac{2^{13}}{3^8} = 1{,}24859.$$

Setzt man, da diese Schwingungszahl kleiner als die der reinen Terz $\frac{5}{4}$, $\frac{2^{13}}{3^8}\left(\frac{81}{80}\right)^x = \frac{5}{4}$, so wird

$$\left(\frac{81}{80}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \frac{80}{81} = \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{12}{11}} \cdot \frac{80}{81} = \left(\frac{81}{80}\right)^{\frac{1}{11}} \text{ und hieraus } x = \frac{1}{11}.$$

Diese temperirte Terz steht also nur um $\frac{1}{11}$ Komma tiefer als die reine und ist daher so gut als rein [1]). Der Einfluss, den diese Temperirung der Terz ausübt, ist ein sehr einfacher. Da nämlich die Quinte rein bleibt, so bleiben es auch alle in den Reihen I und I* liegenden Töne; und da die Töne der Reihen II und II* sämmtlich den constanten Factor T enthalten, so stehen alle diese Töne nur um $\frac{1}{11}$ Komma tiefer als die gleichbenannten reinen. Bei der Gleichsetzung der 16 Tonpaare sinkt nur immer der in den Reihen II oder II* liegende Ton um $\frac{1}{11}$ Komma und accomodirt sich in diesem Maasse dem in den Reihen I oder I* liegenden andern, der rein bleibt. Die Temperatur der grossen Terz führt hier die Temperatur der kleinen Terz $\frac{Q}{T}$ herbei, die demnach um $\frac{1}{11}$ Komma zu hoch steht. Und da die Töne der Reihen IV und IV*, deren man für die Molltonleitern bedarf, den Factor $\frac{1}{T}$ enthalten, so stehen alle in ihnen enthaltenen Töne um $\frac{1}{11}$ Komma zu hoch.

28.

Man kann endlich drittens der Bedingung $\frac{Q^8 T}{2^5} = 1$ dadurch genügen, dass man sowohl die Quinte als die Terz von der Reinheit abweichen lässt, also beide zugleich temperirt. Diess kann auf unendlich verschiedene Weise geschehen. Denn die Abweichungen beider Töne können gleich oder ungleich seyn und im letztern Falle in jedem beliebigen Verhältniss zu einander stehen; sie können ferner beide entweder in demselben

---

1) Die Differenz zwischen 5 Octaven und 8 reinen Quinten giebt also eine Terz, die nur um $\frac{1}{11}$ Komma kleiner ist als die reine, wie diess auch schon aus § 22 Anm. folgt.

Sinne (aufwärts oder abwärts), oder im entgegengesetzten Sinne statt finden. Es lässt sich jedoch zeigen, dass Abweichungen der Quinte und Terz in demselben Sinne (mögen sie gleich oder ungleich seyn) fordern, dass beide abwärts statt finden, dass aber, wenn sie einander entgegengesetzt sind, die Quinte abwärts, die Terz aufwärts abweichen muss.

Denn sey $Q = \frac{3}{2}\left(\frac{81}{80}\right)^{\pm x}$, aber $T = \frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right)^{\pm y}$,

wo x und y gleiche oder ungleiche Werthe haben können, ihre Abweichungen in Theilen des Kommas aber, wie man aus den Vorzeichen sieht, in demselben Sinne statt finden, so muss in Folge der Bedingung $\frac{Q^8 T}{2^5} = 1$ oder $T = \frac{2^5}{Q^8}$ seyn

$$\frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right)^{\pm x} = \frac{2^5}{\left(\frac{3}{2}\right)^8 \left(\frac{81}{80}\right)^{\pm 8y}},$$

woraus folgt

$$\left(\frac{81}{80}\right)^{\pm(8x+y)} = \frac{2^7}{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{5} = \left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{12}{11}} \cdot \frac{81}{80} = \left(\frac{81}{80}\right)^{-\frac{1}{11}}$$

und sich also ergiebt $\pm (8x + y) = -\frac{1}{11}$;

was nur möglich ist, wenn das Minuszeichen vor x und y gilt, also Quinte und Terz beide abwärts von der Reinheit abweichen, und $8x + y = \frac{1}{11}$ wird. Sind jedoch ihre Abweichungen entgegengesetzt, so ist $\pm y$ mit $\mp y$ zu vertauschen, und wird dann

$$\pm (8x - y) = -\frac{1}{11};$$

woraus ersichtlich, dass, wenigstens so lange die absolute Abweichung der Terz kleiner ist als die 8fache absolute Abweichung der Quinte, diese abwärts, die Terz aber aufwärts abweichen muss und $8x - y = \frac{1}{11}$ ist. In der gleichschwebenden Temperatur ist $x = \frac{1}{11}$ und $y = \frac{7}{11}$, also die absolute Abweichung der Terz nur 7 mal so gross als die entgegengesetzte der Quinte. Aber einer der Mängel dieser Temperatur ist gerade, dass ihre grosse Terz zu hoch steht. Eine zulässige Tem-

peratur der Terz nach Oben muss also jedenfalls kleiner als das 8fache der Temperatur der Quinte nach Unten seyn.

Hiernach wird nun, wenn 1) die Abweichungen von Quinte und Terz gleich sind, also $x = y$, und in demselben Sinne (abwärts) statt haben,

$$8x + y = 9x = \frac{1}{11};\ x = y = \frac{1}{99};$$

2) wenn die Abweichungen wiederum gleich sind, aber die Quinte nach Unten, die Terz nach Oben abweichen soll, so ist

$$8x - y = 7x = \frac{1}{11};\ x = y = \frac{1}{77};$$

3) wenn nach Delezenne's Versuchen das musikalische Gehör für die Unreinheit der Quinte doppelt so empfindlich ist als für die Unreinheit der grossen Terz, so ist in den vorstehenden Formeln $y = 2x$ zu setzen, und wird dann, wenn beide Töne nach Unten abweichen,

$$x = \frac{1}{110},\ y = 2x = \frac{1}{55};$$

wenn aber die Quinte nach Unten, die Terz nach Oben abweicht,

$$x = \frac{1}{66},\ y = 2x = \frac{1}{33}.$$

Dass, wenn überhaupt Quinte und Terz zugleich temperirt werden, alle Töne der Reihen I, II etc. von der Reinheit abweichen müssen, leuchtet von selbst ein.

29.

Die Quinte der gleichschwebenden Temperatur $Q_1 = 2^{\frac{7}{12}}$ ist nur einer unter einer Mehrheit von Zahlwerthen, durch welche in derselben Form, nämlich durch gebrochene Potenzen von 2, die reine Quinte $\frac{3}{2}$ annäherungsweise ausgedrückt werden kann. Denn setzt man $\frac{3}{2} = 2^q$, so wird

$q = \frac{\lg 3}{\lg 2} - 1 = 0{,}5849626$. Verwandelt man diesen Decimalbruch in einen Kettenbruch, so erhält man die genäherten Werthe

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{7}{12},\ \frac{24}{41},\ \frac{31}{53},\ \frac{179}{306},\ \frac{389}{665}\ \text{etc.},$$

welche abwechselnd kleiner und grösser als der genaue Werth von q sind, von dem sie aber immer weniger differiren. Denn es ist z. B. $\frac{24}{45} = 0{,}5853659$ und $\frac{31}{53} = 0{,}5849057$. Der letztere Werth giebt logarithmisch berechnet

$$2^{\frac{31}{53}} = 1{,}499941.$$

Setzt man, da dieser Werth sehr wenig kleiner als $\frac{3}{2}$ ist,

$$\frac{3}{2} = 2^{\frac{31}{53}} \cdot \left(\frac{81}{80}\right)^x,$$

so erhält man

$$x = \frac{171}{53950}, \text{ nahe gleich } \frac{1}{315}.$$

Die Quinte $2^{\frac{31}{53}}$ ist also nur um $\frac{1}{315}$ Komma tiefer als die reine, ihre Abweichung fast nur $\frac{1}{19}$ der Abweichung der Quinte $2^{\frac{7}{12}}$ der gleichschwebenden Temperatur. Setzt man ferner, um zu untersuchen, ob sich auch die reine Terz durch eine Potenz von 2, deren Exponent ein Bruch mit dem Nenner 53, ausdrücken lässt,

$$\frac{5}{4} = 2^{\frac{t}{53}},$$

so ergiebt sich $t = 17{,}06218$. Setzt man dafür in runder Zahl $t = 17$ und somit als Ausdruck der Terz $2^{\frac{17}{53}} = 1{,}248985$, so erhält man ihre Abweichung von der reinen Terz durch die Gleichung

$$\frac{5}{4} = 2^{\frac{17}{53}} \left(\frac{81}{80}\right)^x,$$

aus der $x = \frac{3532}{53950}$ folgt, was kleiner ist als $\frac{1}{15}$. Die Terz $2^{\frac{17}{53}}$ steht also um weniger als $\frac{1}{15}$ Komma tiefer als die reine, was ein ganz unhörbarer Unterschied ist. Führt man nun $Q = 2^{\frac{31}{53}}$ und $T = 2^{\frac{17}{53}}$ in die allgemeinen Ausdrücke der Töne in den obigen Reihen I und II (§ 4) ein, so stellen sich ihre Schwingungswerthe mit völlig zureichender Schärfe der Annäherung als Potenzen von 2 dar, deren Exponenten Brüche mit dem Nenner 53 sind, ebenso wie die Töne der gleichschwebenden Temperatur sich

als Potenzen von 2 darstellen, deren Exponenten Brüche mit dem Nenner 12. Die folgenden zwei Reihen, die den obigen Reihen I und II entsprechen, zeigen diess im Einzelnen.

Ia	IIa
$C = 1$	
$Des = 2^{\frac{4}{53}} = 1{,}05371$	$Des = 2^{\frac{3}{53}} = 1{,}04001$
$Cis = 2^{\frac{5}{53}} = 1{,}06758$	$Cis = 2^{\frac{4}{53}} = 1{,}05371$
$D = 2^{\frac{9}{53}} = 1{,}12491$	$D = 2^{\frac{8}{53}} = 1{,}11029$
$Es = 2^{\frac{13}{53}} = 1{,}18533$	$Es = 2^{\frac{12}{53}} = 1{,}16992$
$Dis = 2^{\frac{14}{53}} = 1{,}20093$	$Dis = 2^{\frac{13}{53}} = 1{,}18533$
$Fes = 2^{\frac{17}{53}} = 1{,}24898$	$Fes = 2^{\frac{16}{53}} = 1{,}23276$
$E = 2^{\frac{18}{53}} = 1{,}26543$	$E = 2^{\frac{17}{53}} = 1{,}24898$
$F = 2^{\frac{22}{53}} = 1{,}33339$	$F = 2^{\frac{21}{53}} = 1{,}31606$
$Eis = 2^{\frac{23}{53}} = 1{,}35094$	$Eis = 2^{\frac{22}{53}} = 1{,}33339$
$Ges = 2^{\frac{26}{53}} = 1{,}40500$	$Ges = 2^{\frac{25}{53}} = 1{,}38674$
$Fis = 2^{\frac{27}{53}} = 1{,}42349$	$Fis = 2^{\frac{26}{53}} = 1{,}40500$
$G = 2^{\frac{31}{53}} = 1{,}49994$	$G = 2^{\frac{30}{53}} = 1{,}48045$
$As = 2^{\frac{35}{53}} = 1{,}58050$	$As = 2^{\frac{34}{53}} = 1{,}55996$
$Gis = 2^{\frac{36}{53}} = 1{,}60130$	$Gis = 2^{\frac{35}{53}} = 1{,}58050$
$A = 2^{\frac{40}{53}} = 1{,}68730$	$A = 2^{\frac{39}{53}} = 1{,}66538$
$B = 2^{\frac{44}{53}} = 1{,}77792$	$B = 2^{\frac{43}{53}} = 1{,}75482$
$Ais = 2^{\frac{45}{53}} = 1{,}80266$	$Ais = 2^{\frac{44}{53}} = 1{,}77792$
$ces = 2^{\frac{48}{53}} = 1{,}87340$	$ces = 2^{\frac{47}{53}} = 1{,}84906$
$H = 2^{\frac{49}{53}} = 1{,}89806$	$H = 2^{\frac{48}{53}} = 1{,}87340$
$c = 2^{\frac{53}{53}} = 2$	$c = 2^{\frac{52}{53}} = 1{,}97401$
$His = 2^{\frac{54}{53}} = 2{,}02633$	$His = 2^{\frac{53}{53}} = 2$

30.

Ueber diese beiden Reihen ist Folgendes zu bemerken.

1) Wie oben die Töne der Reihe II um das Komma $\frac{81}{80}$ tiefer sich erwiesen als die gleichnamigen Töne der Reihe I, so stehen hier die Töne der Reihe IIa um das Intervall $2^{\frac{1}{53}}$ tiefer als die gleichnamigen Töne der Reihe Ia. Es ist dasselbe aber in der That der Zahlwerth des syntonischen Kommas $\frac{Q^4}{2^2 T}$, wenn man, wie hier, $Q = 2^{\frac{31}{53}}$ und $T = 2^{\frac{17}{53}}$ substituirt. Setzt man $2^{\frac{1}{53}} = \left(\frac{81}{80}\right)^x$, so erhält man $x = \frac{56798}{53950}$, was nahe $= \frac{20}{19}$. Es ist daher $2^{\frac{1}{53}}$ nur um den 19ten Theil grösser als $\frac{81}{80}$.

2) Nennen wir zur Abkürzung $2^{\frac{1}{53}}$ das erhöhte Komma, so zeigt die vorstehende Tabelle unmittelbar, dass die erhöhten Töne *Cis*, *Dis*, *Eis* etc. um 5 solcher Kommata höher, und die erniedrigten Töne *Ces*, *Des*, *Es* etc. um ebensoviel tiefer stehen als die entsprechenden Haupttöne. Dasselbe gilt von *Cis*, *Dis* etc. und *Ces*, *Des* etc. Und ebensoviel erhöhte Kommata enthalten die Intervalle $\frac{F}{E}$ und $\frac{c}{H}$, die den grossen halben Ton $\frac{16}{15}$ darstellen. Es stellt sich hier ferner unmittelbar die bereits (§ 22) nachgewiesene Identität der Töne *Cis* und *Des*, *Dis* und *Es*, *E* und *Fes* u. s. f. für das Ohr dar.

3) Um die Abweichungen der unter Ia und IIa gegebenen Werthe von den reinen unter I und II genau zu bestimmen, verfahren wir wie in § 25 f.

Alle Töne der Reihe I in § 4 haben theils die Form AQ^n, theils die Form $\frac{A}{Q^n}$. Tritt in den Tönen von der ersteren Form an die Stelle der reinen Quinte $Q = \frac{3}{2}$ der genäherte Werth $2^{\frac{31}{53}}$, der um $\frac{1}{315}$ Komma kleiner ist, so steht der Ton AQ^n um $\frac{n}{315}$ tiefer als der gleichnamige reine. Nun ist der grösste Werth von $n = 12$, nämlich der in *His* $= \frac{Q^{12}}{2^6}$. Mithin ist der genä-

herte Werth $His = 2^{\frac{54}{53}}$ um $\frac{12}{315}$ oder $\frac{1}{26}$ des Komma $\frac{81}{80}$ tiefer als der reine Werth $\frac{3^{12}}{2^{18}}$, was ein ganz unhörbarer Unterschied ist. Da die Abweichungen aller anderen Töne dieser Form kleiner sind, so können ihre genäherten Werthe in Ia für so gut als rein gelten. — Unter den Tönen von der Form $\frac{A}{Q^n}$ ist der grösste Werth von $n = 8$ in $Fes = \frac{2^5}{Q^8}$. Tritt $Q = 2^{\frac{31}{53}}$ an die Stelle von $Q = \frac{3}{2}$, so steigt dieser Ton um $\frac{8}{315} = \frac{1}{39}$ Komma, und ist $Fes = 2^{\frac{17}{53}}$ um so viel zu hoch. Alle andern Töne dieser Form steigen weniger. — Alle Töne der Reihe Ia sind demnach von den gleichbenannten der Reihe I nicht zu unterscheiden.

Was zweitens die Töne der Reihe II betrifft, so haben sie die Formen AQ^nT und $\frac{AT}{Q^n}$. Tritt nun in den Tönen von der ersteren Form $Q = 2^{\frac{31}{53}}$ an die Stelle von $Q = \frac{3}{2}$, so sinkt, wie zuvor, der Ton um $\frac{n}{315}$ Komma. Weil aber zugleich $T = 2^{\frac{17}{53}}$ an die Stelle von $T = \frac{5}{4}$ tritt, welcher erstere Werth um $\frac{1}{15}$ Komma kleiner ist als der letztere, so sinkt deshalb der Ton um ebensoviel; er sinkt also im Ganzen um $\frac{n}{315} + \frac{1}{15}$ oder $\frac{n+21}{315}$ Komma. Nun ist der grösste Werth von $n = 8$ auch hier in $\underline{His} = \frac{Q^8T}{2^4}$; also steht der Ton $\underline{His} = 2^{\frac{53}{53}}$ um $\frac{29}{315}$ oder nahe $\frac{1}{11}$ Komma tiefer als der reine; alle anderen Töne von dieser Form weichen weniger ab. Alle insgesammt können also für völlig zureichend rein gelten. — Jeder Ton der Form $\frac{AT}{Q^n}$ steigt bei der Vertauschung von $Q = \frac{3}{2}$ mit $Q = 2^{\frac{31}{53}}$ um $\frac{n}{315}$ und sinkt bei Vertauschung von $T = \frac{5}{4}$ mit $T = 2^{\frac{17}{53}}$ um $\frac{1}{15}$ Komma, er ändert sich also im Ganzen um $\frac{21-n}{315}$ Komma, folglich sinkt er um so mehr, je kleiner n. Der kleinste Werth ist aber $n = 1$ in $\underline{A} = \frac{2T}{Q}$; demnach steht $\underline{A} = 2^{\frac{39}{53}}$ um $\frac{20}{315}$ oder weniger als

$\frac{1}{15}$ Komma tiefer als das reine $\underline{A}$. Der grösste Werth von n ist 12 in $\underline{Fes} = \frac{2^7 T}{Q^{12}}$; daher ist $\underline{Fes} = 2^{\frac{19}{53}}$ um $\frac{9}{315} = \frac{1}{35}$ Komma tiefer als das reine $\underline{Fes}$. — Hiermit ist nun nachgewiesen, dass sämmtliche unter Ia und IIa angegebenen Tonhöhen von den reinen völlig unmerklich abweichen.

31.

Auch die doppelt erhöhten und erniedrigten Töne lassen sich mit zulänglicher Schärfe durch Potenzen von 2, deren Exponenten 53stel, darstellen. Denn da (§ 21)

$$\frac{Cisis}{Cis} = \frac{Disis}{Dis} = \frac{Eisis}{Eis} \text{ etc.} = \frac{Des}{Deses} = \frac{Es}{Eses} = \frac{Fes}{Feses} \text{ etc.} = \frac{Q^7}{2^4},$$

und, wenn $Q = 2^{\frac{31}{53}}$, $\frac{Q^7}{2^4} = 2^{\frac{5}{53}}$ wird, so hat man nur, um die Ausdrücke für *Cisis*, *Disis*, *Eisis* etc. und *Deses*, *Eses*, *Feses* etc. zu erhalten, was die ersteren betrifft, die Exponenten von *Cis*, *Dis*, *Eis* etc. in Ia um $\frac{5}{53}$ zu vergrössern, hinsichtlich der letzteren aber die Exponenten von *Des*, *Es*, *Fes* etc. in Ia um $\frac{5}{53}$ zu vermindern. Offenbar ergeben sich auf dieselbe Weise die Exponenten von $\underline{Cisis}$, $\underline{Disis}$, $\underline{Eisis}$ etc. aus denen von $\underline{Cis}$, $\underline{Dis}$, $\underline{Eis}$ etc. in IIa, und ebenso die Exponenten von $\underline{Deses}$, $\underline{Eses}$, $\underline{Feses}$ etc. aus denen von $\underline{Des}$, $\underline{Es}$, $\underline{Fes}$ etc. ebendaselbst. Ihre Abweichungen von den in § 20 unter I* und II* verzeichneten reinen Werthen erhält man nach der in § 26 und im vorigen § befolgten Methode. Unterscheiden wir auch hier die reinen Werthbestimmungen durch einen ihren Benennungen beigesetzten Stern, so erhalten wir die folgenden Resultate.

$Cisis = 2^{\frac{10}{53}} = Cisis^* - \frac{1}{22}$ Komma	$Deses = 2^{-\frac{1}{53}} = Deses^* + \frac{1}{26}$ Komma
$Disis = 2^{\frac{19}{53}} = Disis^* - \frac{1}{20}$ „	$Eses = 2^{\frac{8}{53}} = Eses^* + \frac{2}{63}$ „
$Eisis = 2^{\frac{28}{53}} = Eisis^* - \frac{2}{35}$ „	$Feses = 2^{\frac{12}{53}} = Feses^* + \frac{1}{21}$ „
$Fisis = 2^{\frac{33}{53}} = Fisis^* - \frac{1}{24}$ „	$Geses = 2^{\frac{21}{53}} = Geses^* + \frac{1}{24}$ „
$Gisis = 2^{\frac{41}{53}} = Gisis^* - \frac{1}{21}$ „	$Ases = 2^{\frac{30}{53}} = Ases^* + \frac{1}{29}$ „

Aisis	$= 2^{\frac{50}{53}} =$	*Aisis** $-\frac{1}{19}$ Komma	*Bb*	$= 2^{\frac{39}{53}} =$	*Bb** $+\frac{1}{35}$ Komma
Hisis	$= 2^{\frac{59}{53}} =$	*Hisis** $-\frac{2}{33}$,,	*ceses*	$= 2^{\frac{43}{53}} =$	*ceses** $+\frac{1}{22}$,,
Cisis	$= 2^{\frac{9}{53}} =$	*Cisis** $-\frac{1}{10}$,,	*Deses*	$= 2^{-\frac{3}{53}} =$	*Deses** $-\frac{1}{63}$,,
Disis	$= 2^{\frac{18}{53}} =$	*Disis** $-\frac{1}{10}$,,	*Eses*	$= 2^{\frac{7}{53}} =$	*Eses** $-\frac{1}{45}$,,
Eisis	$= 2^{\frac{27}{53}} =$	*Eisis** $-\frac{1}{9}$,,	*Feses*	$= 2^{\frac{11}{53}} =$	*Feses** $-\frac{1}{152}$,,
Fisis	$= 2^{\frac{31}{53}} =$	*Fisis** $-\frac{2}{21}$,,	*Geses*	$= 2^{\frac{20}{53}} =$	*Geses** $-\frac{1}{79}$,,
Gisis	$= 2^{\frac{40}{53}} =$	*Gisis** $-\frac{1}{10}$,,	*Ases*	$= 2^{\frac{29}{53}} =$	*Ases** $-\frac{1}{52}$,,
Aisis	$= 2^{\frac{49}{53}} =$	*Aisis** $-\frac{1}{9}$,,	*Bb*	$= 2^{\frac{38}{53}} =$	*Bb** $-\frac{1}{39}$,,
Hisis	$= 2^{\frac{58}{53}} =$	*Hisis** $-\frac{1}{9}$,,	*ceses*	$= 2^{\frac{42}{53}} =$	*ceses** $-\frac{1}{105}$,,

Wie man hieraus ersieht, sind auch diese Abweichungen so gering, dass selbst die grössten unter ihnen, die von *Cisis* bis *Hisis* dem feinsten Ohr kaum bemerklich seyn werden. Somit lassen sich die in den Reihen I, I*, II und II* liegenden Töne, welche die reine Stimmung fordert, mit grosser Schärfe der Annäherung durch Potenzen von 2, deren Exponenten 53stel, darstellen.

32.

Man kann auch die in den Reihen III und III* (§ 12 u. 20), IV und IV* (§ 16 u. 20) enthaltenen Töne durch solche Potenzen ausdrücken. Denn da die Töne der beiden ersteren Reihen um ein Komma tiefer stehen als die gleichnamigen Töne der Reihen II und II*, die Töne der Reihen IV und IV* aber um ein Komma höher als die ihnen entsprechenden der Reihen I und I*, und hier das Komma durch $2^{\frac{1}{53}}$ vertreten wird, so hat man nur bzw. die Exponenten der Potenzen von 2 in IIa und der Tabelle im vor. § um $\frac{1}{53}$ zu vermindern, dagegen die Exponenten in Ia und derselben vorstehenden Tabelle um $\frac{1}{53}$ zu vergrössern, um die verlangten Ausdrücke zu erhalten. Die Abweichungen von der Reinheit fallen aber in diesen beiden Classen von Tönen ungleich aus.

Die Töne der Reihen III und III* haben die Formen AQ^nT^2 und $\frac{AT^2}{Q^n}$. Treten nun 1) in den Tönen von der ersteren Form an die Stelle der reinen Q und T die bzw. um $\frac{1}{315}$ und $\frac{1}{15}$ Komma kleineren Werthe, so sinkt jeder Ton von dieser Form um $\frac{n}{315} + \frac{2}{15} = \frac{n+42}{315}$ Komma. Folglich ist diese Abweichung nach Unten um so grösser, je grösser n. In der Reihe III ist der grösste Werth von $n = 4$ und trifft auf $\underline{\underline{His}} = \frac{Q^4T^2}{2^2}$. Daher ist $\underline{\underline{His}} = 2^{\frac{52}{53}}$ um $\frac{46}{315} = \frac{1}{7}$ Komma tiefer als das reine $\underline{\underline{His}}$. Der kleinste Werth von n ist $= 0$ und trifft auf $\underline{\underline{Gis}} = T^2$; daher ist $\underline{\underline{Gis}} = 2^{\frac{34}{53}}$ um $\frac{42}{315} = \frac{2}{15}$ Komma zu tief. In III* ist der grösste Werth von $n = 11$ und trifft auf $\underline{\underline{Hisis}} = \frac{Q^{11}T^2}{2^6}$; daher ist $\underline{\underline{Hisis}} = 2^{\frac{57}{53}}$ um $\frac{53}{315} = \frac{1}{6}$ Komma zu tief. Der kleinste Werth von n ist hier $n = 5$ und trifft auf $\underline{\underline{Fisis}} = \frac{Q^5T^2}{2^3}$; daher ist $\underline{\underline{Fisis}} = 2^{\frac{39}{53}}$ um $\frac{47}{315} = \frac{1}{7}$ Komma zu tief. — Tritt 2) in den Tönen von der Form $\frac{AT^2}{Q^n}$ dieselbe Vertauschung der reinen Q und T mit den verminderten Werthen ein, so sinkt jeder Ton um $\frac{2}{15}$, steigt aber um $\frac{n}{315}$, ändert sich also um $\frac{42-n}{315}$ Komma. Diese Aenderung ist also um so grösser (kleiner), je kleiner (grösser) n ist. In III ist der kleinste Werth von $n = 1$ in $\underline{\underline{Cis}} = \frac{T^2}{Q}$; daher beträgt die Abweichung von $\underline{\underline{Cis}} = 2^{\frac{3}{53}}$ nach Unten $\frac{41}{315} = \frac{1}{8}$ Komma und steht also der Ton um so viel zu tief. Der grösste Werth von n ist 16 und trifft auf $\underline{\underline{Fes}} = \frac{2^9T^2}{Q^{16}}$; daher ist $\underline{\underline{Fes}} = 2^{\frac{15}{53}}$ um $\frac{26}{315} = \frac{1}{12}$ Komma zu tief. In III* ist der kleinste Werth von $n = 17$ und trifft auf $\underline{\underline{Bb}} = \frac{2^{10}T^2}{Q^{17}}$; daher ist $\underline{\underline{Bb}} = 2^{\frac{37}{53}}$ um $\frac{25}{315} = \frac{1}{13}$ Komma zu tief. Der grösste Werth von n ist $= 23$

und trifft auf *Feses* $= \frac{2^{13}T^2}{Q^{23}}$; daher ist *Feses* $= 2^{\frac{10}{53}}$ um $\frac{18}{315} = \frac{1}{10}$ Komma zu tief.

Die Töne der Reihen IV und IV* haben die Formen $\frac{AQ^n}{T}$ und $\frac{A}{Q^nT}$. Die Abweichung von der Reinheit, die durch Vertauschung der reinen Werthe von Q und T mit den verminderten statt findet, ist 1) bei den Tönen von der ersteren Form $\frac{1}{15} - \frac{n}{315} = \frac{27-n}{315}$ Komma. In IV ist der kleinste Werth von $n = 0$ in $\overline{As} = \frac{2}{T}$; daher ist $\overline{As} = 2^{\frac{38}{53}}$ um $\frac{21}{315} = \frac{1}{15}$ Komma zu hoch. Der grösste Werth von n ist 16 und trifft auf $\overline{His} = \frac{Q^{16}}{2^8T}$; daher ist $\overline{His} = 2^{\frac{55}{53}}$ um $\frac{5}{315} = \frac{1}{63}$ Komma zu hoch. In IV* ist der kleinste Werth von $n = 17$ in $\overline{Fisis} = \frac{Q^{17}}{2^9T}$; daher $\overline{Fisis} = 2^{\frac{33}{53}}$ um $\frac{4}{315} = \frac{1}{79}$ Komma zu hoch. Der grösste Werth von n ist 23 in $\overline{Hisis} = \frac{Q^{23}}{2^{12}T}$; daher $\overline{Hisis} = 2^{\frac{50}{53}}$ um $\frac{2}{315} = \frac{1}{157}$ Komma zu tief. — 2) Bei den Tönen von der Form $\frac{A}{Q^nT}$ ist die Abweichung jedes Tons von der Reinheit $\frac{n}{315} + \frac{1}{15} = \frac{n+21}{315}$ immer nach Oben. In IV ist der kleinste Werth von $n = 1$ in $\overline{Des} = \frac{2}{QT}$; daher $\overline{Des} = 2^{\frac{5}{53}}$ um $\frac{22}{315} = \frac{1}{14}$ Komma zu hoch. Der grösste Werth von n ist 4 in $\overline{Fes} = \frac{2^3}{Q^4T}$; daher $\overline{Fes} = 2^{\frac{18}{53}}$ um $\frac{25}{315} = \frac{1}{13}$ Komma zu hoch. Endlich ist in IV* das kleinste $n = 5$ in $\overline{Bb} = \frac{2^4}{Q^5T}$; daher $\overline{Bb} = 2^{\frac{49}{53}}$ um $\frac{26}{315} = \frac{1}{12}$ Komma zu hoch; dagegen das grösste $n = 11$ in $\overline{Feses} = \frac{2^7}{Q^{11}T}$; daher $\overline{Feses} = 2^{\frac{13}{53}}$ um $\frac{32}{315} = \frac{1}{10}$ Komma zu hoch.

In der Darstellung der Töne durch Potenzen von 2, deren Exponenten 53stel, weichen hiernach verhältnissmässig am meisten ab die in den Reihen III und III* liegenden, was sich daraus erklärt, dass die reinen Töne hier um 2 Kommata tiefer stehen,

als die der Reihen I und I*, hier aber das Komma $\frac{81}{80}$ durch das um $\frac{1}{19}$ grössere $2^{\frac{1}{53}}$ vertreten wird. — Will man wegen der kleinen Abweichungen von der reinen Stimmung dieses Tonsystem nur als eine verfeinerte Temperatur gelten lassen, so ist auch dagegen nichts einzuwenden.

Gleichwie nun in der gleichschwebenden Temperatur die Stufen der Tonleitern durch Zwölftel des Octavenintervalls bestimmt werden können, so hier durch 53stel. Diese Stufen sind nämlich für die Durtonleiter, deren Schema

$$\begin{matrix} C, & D, & \underline{E}, & F, & G, & \underline{A}, & \underline{H}, & c, \\ 9, & 8, & 5, & 9, & 8, & 9, & 5; \end{matrix}$$

für die instrumentale Molltonleiter, nach dem Schema

$$\begin{matrix} C, & D, & \overline{Es}, & F, & G, & \overline{As}, & \underline{H}, & c, \\ 9, & 5, & 8, & 9, & 5, & 12, & 5; \end{matrix}$$

für die aufsteigende Molltonleiter, nach dem Schema

$$\begin{matrix} C, & D, & \overline{Es}, & F, & G, & \underline{A}, & \underline{H}, & c, \\ 9, & 5, & 8, & 9, & 8, & 9, & 5; \end{matrix}$$

für die absteigende Molltonleiter, nach dem Schema

$$\begin{matrix} C, & D, & \overline{Es}, & F, & G, & \overline{As}, & \overline{B}, & c, \\ 9, & 5, & 8, & 9, & 5, & 9, & 8. \end{matrix}$$

33.

Hat sich nun durch die vorstehende Ausführung ergeben, dass nicht allein die Töne der gleichschwebenden Temperatur, sondern auch die, welche die reine Stimmung fordert, mit zureichender Genauigkeit durch gebrochene Potenzen von 2 ausgedrückt werden können, so gilt diess ganz allgemein von allen Tönen (mögen sie musikalisch verwendbar seyn oder nicht), deren Schwingungsverhältniss zu einem beliebig angenommenen Grundton bekannt ist. Denn sey α die absolute Schwingungszahl dieses Grundtons, und n die absolute Schwingungszahl irgend eines andern Tons N, also das Schwingungsverhältniss desselben zum Grundton $\frac{n}{\alpha}$, welches, je nachdem N höher oder tiefer als der Grundton, > 1 oder < 1 ist, so wird, wenn man

$\frac{n}{\alpha} = 2^x$ setzt, $x = \frac{\log n - \log \alpha}{\log 2}$,

oder, wenn abgekürzt $y = \frac{n}{\alpha}$ das Schwingungsverhältniss bezeichnet,

$$x = \frac{\log y}{\log 2}, \text{ folglich } y = 2^x.$$

Allerdings aber ist der Zahlwerth des Exponenten x nur ausnahmsweise durch gemeine Brüche, deren Zähler und Nenner ein- oder zweiziffrige positive oder negative ganze Zahlen, darstellbar. Bei den Tönen, von welchen die Musik Gebrauch macht, ist diess, wie es sich gezeigt hat, wenigstens mit grosser Schärfe der Annäherung der Fall. Wir nennen aber allgemein mit *Euler*[1]) den Zahlwerth von $\frac{\log y}{\log 2}$ im engeren Sinne des Worts das Intervall zwischen dem Ton N und dem willkürlich angenommenen Grundton und unterscheiden dasselbe von dem Schwingungsverhältniss y dieses Tons zum Grundton. Das Intervall hat einen positiven oder negativen Zahlwerth, je nachdem der Ton N über oder unter dem Grundton liegt.

Da in der Musik die Schwingungsverhältnisse, Q der Quinte, T der grossen Terz und 2 der Octave zum Grundton die Schwingungsverhältnisse aller übrigen zur Verwendung kommenden Töne bestimmen, so scheint es angemessen, auch für die ihnen entsprechenden Intervalle eine allgemeine Bezeichnung einzuführen. Für die Octave, wo $y = 2$, ist das Intervall $\frac{\log 2}{\log 2} = 1$; für die Intervalle der Quinte und grossen Terz setzen wir bzw. $\frac{\log Q}{\log 2} = q$ und $\frac{\log T}{\log 2} = t$, so dass also q das Intervall der Quinte, t das der grossen Terz bezeichnet. Es vereinfachen sich dadurch die musikalischen Berechnungen und verdeutlicht sich ihr Sinn. Denn durch Einführung von q und t statt Q und T tritt an die Stelle der Multiplication und Division der Schwingungsverhältnisse durch einander die Addition und Subtraction ihrer Intervalle, und an die Stelle der Potenzirung der ersteren die Multiplication ihrer Intervalle durch den Exponenten der be-

1) Tentamen novum theoriae musicae p. 78.

treffenden Potenz. Ausdrücke wie z. B. dass Quinte und Quarte, grosse Terz und kleine Sexte, kleine Terz und grosse Sexte zusammen genommen gleich der Octave, grosse und kleine Terz zusammen genommen gleich der Quinte sind, dass überhaupt die Summe der Intervalle zweier auf derselben Seite des Grundtons liegenden Töne gleich dem Intervall des von dem Grundton entfernteren von beiden Tönen ist, u. dgl. m. werden dadurch unmittelbar verständlich.

34.

Wir geben in der folgenden Tabelle unter Ib und IIb die allgemeinen Ausdrücke und Zahlwerthe der Intervalle der Töne an, deren Schwingungsverhältnisse in § 4 unter I und II bestimmt worden sind. Den Zahlwerthen liegen die genauen Werthe von $q = 0{,}5849626$ und von $t = 0{,}3219280$ zu Grunde. Die scharf genäherten Zahlwerthe aller dieser Intervalle sind die Exponenten von 2 unter Ia und IIa in § 29.

Ib		IIb	
C	$= 0$		
Des	$= 3 - 5q = 0{,}07519$	$\underline{Des}$	$= 5 + t - 9q = 0{,}05726$
Cis	$= 7q - 4 = 0{,}09474$	$\underline{Cis}$	$= 3q + t - 2 = 0{,}07682$
D	$= 2q - 1 = 0{,}16993$	$\underline{D}$	$= 1 + t - 2q = 0{,}15200$
Es	$= 2 - 3q = 0{,}24511$	$\underline{Es}$	$= 4 + t - 7q = 0{,}22719$
Dis	$= 9q - 5 = 0{,}26466$	$\underline{Dis}$	$= 5q + t - 3 = 0{,}24674$
Fes	$= 5 - 8q = 0{,}32030$	$\underline{Fes}$	$= 7 + t - 12q = 0{,}30238$
E	$= 4q - 2 = 0{,}33985$	$\underline{E}$	$= t = 0{,}32193$
F	$= 1 - q = 0{,}41504$	$\underline{F}$	$= 3 + t - 5q = 0{,}39711$
Eis	$= 11q - 6 = 0{,}43459$	$\underline{Eis}$	$= 7q + t - 4 = 0{,}41667$
Ges	$= 4 - 6q = 0{,}49022$	$\underline{Ges}$	$= 6 + t - 10q = 0{,}47230$
Fis	$= 6q - 3 = 0{,}50978$	$\underline{Fis}$	$= 2q + t - 1 = 0{,}49185$
G	$= q = 0{,}58496$	$\underline{G}$	$= 2 + t - 3q = 0{,}56704$
As	$= 3 - 4q = 0{,}66015$	$\underline{As}$	$= 5 + t - 8q = 0{,}64223$
Gis	$= 8q - 4 = 0{,}67970$	$\underline{Gis}$	$= 4q + t - 2 = 0{,}66178$
A	$= 3q - 1 = 0{,}75489$	$\underline{A}$	$= 1 + t - q = 0{,}73697$

$B = 2 - 2q = 0{,}83007$	$\overline{B} = 4 + t - 6q = 0{,}81215$
$Ais = 10q - 5 = 0{,}84963$	$\overline{Ais} = 6q + t - 3 = 0{,}83170$
$ces = 5 - 7q = 0{,}90526$	$\overline{ces} = 7 + t - 11q = 0{,}88734$
$H = 5q - 2 = 0{,}92481$	$\overline{H} = q + t = 0{,}90689$
$c = 1$	$\overline{c} = 3 + t - 4q = 0{,}98208$
$His = 12q - 6 = 1{,}01955$	$\overline{His} = 8q + t - 4 = 1{,}00163$

Die Intervalle der doppelt erhöhten und erniedrigten Töne ergeben sich aus den Intervallen der gleichnamigen einfachen durch Addition bzw. Subtraction von $7q - 4$. Wir fügen noch die Schwingungswerthe und Intervalle der kleinsten in der theoretischen Musik gebräuchlichen Tonverhältnisse bei.

das Schisma	$\frac{Q^8T}{2^5}$	$= \frac{3^8.5}{2^{15}}$	$= \frac{32805}{32768}$	$= 1{,}00113$;	$8q+t-5 = 0{,}0016288$,
das Diaschisma	$\frac{2^3}{Q^4T^2}$	$= \frac{2^{11}}{3^4.5^2}$	$= \frac{2048}{2025}$	$= 1{,}01136$;	$3-4q-2t = 0{,}016294 = 10$ Schisma,
das synt. Komma	$\frac{Q^4}{2^2T}$	$= \frac{3^4}{2^4.5}$	$= \frac{81}{80}$	$= 1{,}01250$;	$4q-t-2 = 0{,}017922 = 11$,,
das pythag. Komma	$\frac{Q^{12}}{2^7}$	$= \frac{3^{12}}{2^{19}}$	$= \frac{531441}{524288}$	$= 1{,}01364$;	$12q-7 = 0{,}019551 = 12$,,
die kleine Diesis	$\frac{T^5}{2Q}$	$= \frac{5^5}{2^{10}.3}$	$= \frac{3125}{3072}$	$= 1{,}01725$;	$5t-q-1 = 0{,}024678 = 15\frac{1}{7}$,,
	$\frac{2}{T^3}$	$= \frac{2^7}{5^3}$	$= \frac{128}{125}$	$= 1{,}02400$;	$1-3t = 0{,}034216 = 21$,,
die grosse Diesis	$\frac{Q^4}{2T^4}$	$= \frac{3^8.3^4}{5^4}$	$= \frac{648}{625}$	$= 1{,}03680$;	$4q-4t-1 = 0{,}052138 = 32$,,
das pythag. Limma	$\frac{2^3}{Q^5}$	$= \frac{2^8}{3^5}$	$= \frac{256}{243}$	$= 1{,}05350$;	$3-5q = 0{,}075187 = 46\frac{1}{8}$,,
das kleine Limma	$\frac{Q^3T}{2^2}$	$= \frac{3^3.5}{3^7}$	$= \frac{135}{128}$	$= 1{,}05469$;	$3q+t-2 = 0{,}076816 = 47\frac{1}{8}$,,
das grosse Limma	$\frac{Q^3}{2T^2}$	$= \frac{3^3}{5^2}$	$= \frac{27}{25}$	$= 1{,}08000$;	$3q-2t-1 = 0{,}111032 = 68\frac{1}{8}$,,

Die Subtraction des Intervalls des syntonischen Kommas $4q-t-2=0{,}01792$ von den Intervallen der Töne unter Ib zeigt hier unmittelbar, da sich daraus die Intervalle der Töne unter IIb ergeben, dass diese letzteren um ein solches Komma tiefer sind als die ersteren. Die Subtraction des Intervalls dieses Kommas von den Intervallen unter IIb würde die Intervalle der in § 12 unter III bestimmten Töne geben, die Addition desselben Intervalls zu den Intervallen unter Ia die Intervalle der in § 16

unter IV bestimmten Töne. Das Intervall des Schismas, das sich hier als der 11te Theil des syntonischen Kommas und als der Unterschied der Intervalle des kleinen und des pythagorischen Limmas herausstellt, ist das, um welches die Intervalle der Töne *Cis*, *Dis*, *E* etc. bzw. grösser sind als die Intervalle der Töne *Des*, *Es*, *Fes* etc., und um welches das Intervall der Quinte der gleichschwebenden Temperatur kleiner ist als das der reinen Quinte.

35.

Um schliesslich noch ein paar Beispiele von der Anwendung dieser Intervalle zu geben, stellen wir uns zuerst folgende Aufgabe. Es wird diejenige temperirte Quinte gesucht, durch welche, wenn man nach dem Quintensystem die grosse Terz von der Quinte abhängig macht, daher $T = \frac{Q^4}{2^2}$, folglich $t = 4q - 2$ setzt (wodurch dann alle andern Töne durch die temperirte Quinte bestimmt werden), die Summe der Quadrate der Abweichungen der temperirten Intervalle sämmtlicher Leitertöne der *C*-durscala und der drei Formen der *C*-mollscala von den reinen Intervallen derselben ein Minimum wird.

Diese Leitertöne und die allgemeinen Ausdrücke ihrer Schwingungsverhältnisse sind folgende:

$$D = \frac{Q^2}{2},\ \overline{Es} = \frac{Q}{T},\ \underline{E} = T,\ F = \frac{2}{Q},\ G = Q,\ As = \frac{2}{T},\ \underline{A} = \frac{2T}{Q},$$
$$\overline{B} = \frac{Q^2}{T},\ \underline{H} = QT.$$

Bezeichnen wir ihre Intervalle durch ein ihren Benennungen vorgesetztes i und setzen in den Ausdrücken derselben durch q und t für t . . $4q-2$, wo nun q die gesuchte temperirte Quinte ist, so werden

$iD = 2q-1$, $i\overline{Es} = q-t = 2-3q$, $i\underline{E} = t = 4q-2$, $iF = 1-q$, $iG = q$,
$i\overline{As} = 1-t = 3-4q$, $i\underline{A} = 1+t-q = 3q-1$, $i\overline{B} = 2q-t = 2-2q$,
$i\underline{H} = q+t = 5q-2$ die temperirten Intervalle der 9 Töne.

Bezeichnen wir ferner die reinen Intervalle dieser Töne der Reihe nach durch d, $\overline{es}$, $\underline{e}$, f, g, $\overline{as}$, $\underline{a}$, $\overline{b}$, $\underline{h}$, so soll die Summe

$$(d-2q+1)^2 + (\overline{es}-2+3q)^2 + (\underline{e}-4q+2)^2 + (f-1+q)^2 + (g-q)^2$$
$$+ (\overline{as}-3+4q)^2 + (\underline{a}-3q+1)^2 + (\overline{b}-2+2q)^2 + (\underline{h}-5q+2)^2$$

ein Minimum seyn. Diess fordert, dass der Differentialquotient dieser Summe nach $q = 0$ sey. Die Differentiation giebt

$$2(d-2q+1)+3(2-3q-\overline{es})+4(\underline{e}-4q+2)+(1-q-f)+(g-q)$$
$$+4(3-4q-\overline{as})+3(\underline{a}-3q+1)+2(2-2q-\overline{b})+5(\underline{h}-5q+2)=0.$$

Hieraus folgt, da $1-f=g$,

$$85q = 45 + 2d + 4\underline{e} + 2g + 3\underline{a} + 5\underline{h} - 3\overline{es} - 4\overline{as} - 2\overline{b}.$$

Die Zahlwerthe der 5 ersten der hier zur Rechten des Gleichheitszeichens stehenden reinen Intervalle sind unter I b und II b im vorigen § enthalten; die 3 letzten erhält man durch Addition des Intervalls des syntonischen Kommas 0,01792 zu den unter I b angegebenen reinen Intervallen von *Es*, *As* und *B*. Man findet nämlich

$$d = 0{,}16993, \quad \underline{e} = 0{,}32193, \quad g = 0{,}58496, \quad \underline{a} = 0{,}73697,$$
$$\underline{h} = 0{,}90689, \quad \overline{es} = 0{,}26303, \quad \overline{as} = 0{,}67807, \quad \overline{b} = 0{,}84799,$$

und hieraus ergiebt sich

$$q = \frac{49{,}34551}{85} = 0{,}580535.$$

Da aber das Intervall der reinen Quinte = 0,584963, so ist die Differenz von dieser = 0,004428 und diese in dem Intervall des syntonischen Kommas 0,017922 mehr als 4 mal enthalten. Demnach steht diese temperirte Quinte nahe um $\frac{1}{4}$ Komma zu tief, was eine viel zu starke Abweichung ist. Ueberdiess würde das auf diese temperirte Quinte zu gründende Tonsystem auch deshalb zu verwerfen seyn, weil in ihm die nächstbenachbarten erhöhten und erniedrigten Töne die umgekehrte Lage als die haben, welche die reine Stimmung fordert. Denn da das Intervall der Verhältnisse $\frac{Cis}{Des}$, $\frac{Dis}{Es}$ etc. das des pythagorischen Kommas, d. i. $12q-7$, was für die reine Quinte + 0,01955 ist, so würde die temperirte Quinte, für welche $q = 0{,}580535$, statt dessen den negativen Werth — 0,03358 geben. — Die Auflösung der gestellten Aufgabe führt demnach nicht zu einem brauchbaren Resultat.

Ein zweites sehr einfaches, doch weiter greifendes Beispiel ähnlicher Art ist folgendes. In § 8 wurde gezeigt, dass, wenn es eine temperirte Quinte Q_1 und eine temperirte Terz T_1 giebt, durch welche die gleichbenannten Töne der Reihen I und II

identische Schwingungswerthe erhalten, die Formen dieser temperirten Quinte und Terz seyn müssen

$$Q_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{81}{80}\right)^{-x} \text{ und } T_1 = \frac{5}{4}\left(\frac{81}{80}\right)^{1-4x}.$$

Bezeichnen wir nun durch q_1 und t_1 die Intervalle dieser temperirten Quinte und Terz, durch q und t die Intervalle der reinen Töne $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{4}$, endlich durch k das Intervall des Kommas $\frac{81}{80}$, so wird

$$q_1 = q - xk, \quad t_1 = t + (1 - 4x)\, k,$$

und hieraus

$$q - q_1 = xk, \quad t - t_1 = (4x - 1)\, k.$$

Soll nun die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen der reinen und temperirten Quinte und Terz, d. i.

$$(q-q_1)^2 + (t-t_1)^2 = k^2[x^2 + (4x-1)^2] = k^2(17x^2 - 8x + 1)$$

ein Minimum werden, so muss der Differentialquotient dieser Summe nach x, d. i.

$$34x - 8 = 0$$

seyn, woraus

$$x = \frac{4}{17}$$

folgt. Eine Quinte, die um $\frac{4}{17}$ Komma tiefer als die reine, und eine grosse Terz, die um $\frac{1}{17}$ Komma höher als die reine, löst also theoretisch die Aufgabe. Die Terz wäre völlig befriedigend, aber die Quinte weicht, wie im vorigen Beispiel, sehr merklich von der reinen ab, und würde überdiess, wie im vorigen Beispiel, die nächst benachbarten erhöhten und erniedrigten Töne in die verkehrte Ordnung der reinen Stimmung bringen.

36.

Noch mag hier eine strengere Ableitung der Grössenbestimmung der Intervalle als die, welche Euler gegeben hat, ihre Stelle finden.

Wir definiren das Intervall als die Grösse des wahrnehmbaren Höhenunterschieds zweier Töne A und A_1, und bezeichnen dasselbe durch AA_1.

Die Grösse dieses Unterschiedes wird nun 1) nicht bestimmt durch die Differenz der Schwingungszahlen a und a_1 der beiden Töne A und A_1. Denn angenommen, es sey, wenn $a_1 > a$, $AA_1 = a_1 - a$, so wäre, da $2a$ und $2a_1$ die Schwingungszahlen der oberen Octaven A' und A_1' von A und A_1 sind, das Intervall der Töne A' und A_1', also $A'A_1' = 2a_1 - 2a = 2AA_1$, folglich doppelt so gross als das Intervall der um eine Octave tieferen Töne A und A_1, indess doch allgemein anerkannt wird, dass das Intervall zwischen zwei Tönen unverändert dieselbe Grösse behält, wenn beide Töne um eine Octave erhöht oder erniedrigt werden. — Ebensowenig ist 2) das Intervall AA_1 die Differenz der relativen Schwingungszahlen $\frac{a}{\alpha}$ und $\frac{a_1}{\alpha}$, welche A und A_1 in Bezug auf einen beliebigen dritten tieferen Ton haben, dessen Schwingungszahl $\alpha < a < a_1$. Denn angenommen, es wäre $AA_1 = \frac{a_1}{\alpha} - \frac{a}{\alpha}$, so wäre das Intervall zwischen den oberen Octaven A' und A_1' von A und A_1, nämlich $A'A_1' = \frac{2a_1}{\alpha} - \frac{2a}{\alpha} = 2AA_1$, also wiederum doppelt so gross als das Intervall AA_1.

Dagegen wird allgemein zugestanden, dass von den drei Intervallen zwischen je zweien von den drei Tönen A, A_1, A_2, deren Schwingungszahlen bzw. a, a_1, a_2, das Intervall AA_2 grösser ist als das Intervall AA_1, wenn $\frac{a_2}{a} > \frac{a_1}{a}$. Hiernach nimmt nun allgemein die Grösse des Intervalls zwischen einem Ton A_1, dessen Schwingungszahl a_1, und einem tieferen Ton A, dessen Schwingungszahl $a < a_1$, stetig zu oder ab, jenachdem die relative Schwingungszahl $\frac{a_1}{a}$ des höheren von beiden Tönen in Bezug auf den tieferen stetig zu- oder abnimmt. Folglich ist die Grösse des Intervalls AA_1 allerdings abhängig von der veränderlichen Grösse der relativen Schwingungszahl des höhern von beiden Tönen in Bezug auf den tieferen, wobei aber das Gesetz dieser Abhängigkeit zu bestimmen übrig bleibt. Mit anderen Worten: es ist die Grösse des Intervalls eine Function der relativen Schwingungszahl, die wir durch

$$AA_1 = f\left(\frac{a_1}{a}\right)$$

bezeichnen, und wo nun die Form dieser Function f zu finden ist.

Diese ergiebt sich auf folgende Weise. Kommt zu den beiden Tönen A und A_1 ein dritter A_2 hinzu, dessen Schwingungszahl $a_2 > a_1$, so ist das Intervall AA_2 die Summe der Intervalle AA_1 und A_1A_2, also

$$AA_2 = AA_1 + A_1A_2.$$

Denn sind m, n, p drei beliebige Zahlen, von denen m die grösste, p die kleinste, so ist die Differenz $m-p = (n-p)+(m-n)$. Da nun die drei Intervalle AA_2, AA_1, A_1A_2 ihrer Definition nach Differenzen sind, deren Grössen durch $f\left(\frac{a_2}{a}\right)$, $f\left(\frac{a_1}{a}\right)$, $f\left(\frac{a_2}{a}\right)$ ausgedrückt werden (wobei aber vorläufig noch nicht bekannt ist, von welchen Grössen sie die Differenzen sind), so gilt diess auch von den Grössen dieser Intervalle, und ist demnach

$$f\left(\frac{a_2}{a}\right) = f\left(\frac{a_1}{a}\right) + f\left(\frac{a_2}{a_1}\right).$$

Kommt ein vierter Ton A_3 noch hinzu, dessen Schwingungszahl $a_3 > a_2$, so ist ebenso das Intervall AA_3

$$f\left(\frac{a_3}{a}\right) = f\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + f\left(\frac{a_3}{a_2}\right),$$

folglich, nach der vorhergehenden Gleichung,

$$f\left(\frac{a_3}{a}\right) = f\left(\frac{a_1}{a}\right) + f\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + f\left(\frac{a_3}{a_2}\right).$$

Offenbar ist allgemein, wenn $a < a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_{n-1} < a_n$ die Schwingungszahlen der Töne A, A_1, A_2, A_3, $\ldots A_{n-1}$, A_n sind,

$$f\left(\frac{a_n}{a}\right) = f\left(\frac{a_1}{a}\right) + f\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + f\left(\frac{a_3}{a_2}\right) + \cdots + f\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$$

Es ist aber

$$\frac{a_n}{a} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

folglich auch

$$f\left(\frac{a_1}{a} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = f\left(\frac{a_1}{a}\right) + f\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + f\left(\frac{a_3}{a_2}\right) + \cdots + f\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$$

Sind nun die relativen Schwingungszahlen eines jeden der Töne A, A_1, A_2, A_3, $\ldots A_{n-1}$, A_n in Bezug auf den ihm nächst vorhergehenden Ton in dieser Reihe gleich, also

$$\frac{a_1}{a} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

so geht die vorstehende letzte Gleichung über in

$$f\left[\left(\frac{a_1}{a}\right)^n\right] = nf\left(\frac{a_1}{a}\right).$$

Durch diese Gleichung ist aber die Form der Function f bestimmt. Denn derselben genügt allein

$$f\left(\frac{a_1}{a}\right) = \log\frac{a_1}{a},$$

$$\text{da} \quad \log\left(\frac{a_1}{a}\right)^n = n\log\frac{a_1}{a},$$

wo die Basis des Logarithmensystems vorläufig beliebig ist. Es ist demnach das Intervall

$$AA_1 = \log\frac{a_1}{a}.$$

Ebenso ist nun auch für einen Ton A_p, dessen Schwingungszahl $a_p > a$, die aber $\gtrless a_1$ seyn kann, das Intervall

$$AA_p = \log\frac{a_p}{a},$$

$$\text{daher} \quad AA_1 : AA_p = \log\frac{a_1}{a} : \log\frac{a_p}{a}.$$

Ist nun AA_p das Intervall der Octave, mithin $\frac{a_p}{a} = 2$, und nimmt man dasselbe zur Maasseinheit für alle Grössenbestimmungen der Intervalle an, setzt also $AA_p = 1$, so giebt vorstehende Proportion

$$AA_1 = \frac{\log\frac{a_1}{a}}{\log 2},$$

und ist damit das Intervall zwischen dem angenommenen Grundton A und dem höhern Ton A_1 bestimmt. Ebenso ist für irgend einen andern höhern Ton A_m, dessen Schwingungszahl $a_m > a_1$,

$$AA_m = \frac{\log\frac{a_m}{a}}{\log 2},$$

folglich, da auch

$$AA_m = AA_1 + A_1A_m,$$

das Intervall

$$A_1A_m = AA_m - AA_1,$$

$$= \frac{1}{\log 2}\left(\log\frac{a_m}{a} - \log\frac{a_1}{a}\right) = \frac{\log\frac{a_m}{a_1}}{\log 2}$$

und damit das Intervall zwischen den beiden oberhalb des Grundtons A liegenden Tönen A_1 und A_m in Theilen des Octa-

venintervalls bestimmt. Ob $A_1 A_m$ grösser oder kleiner als das Octavenintervall, macht hierbei keinen Unterschied. Und da die Grösse eines Intervalls sich gleich bleibt, wenn die Töne, zwischen denen es statt hat, um eine oder mehrere Octaven erhöht oder erniedrigt werden, so gilt die gefundene Grössenbestimmung der Intervalle auch, wenn die beiden Töne unterhalb oder auf entgegengesetzten Seiten des Grundtons liegen. Da endlich, wenn man sich des Logarithmensystems bedient, dessen Basis 2, $\log 2 = 1$ ist, und dann

$$A_1 A_m = \log_2 \frac{a_m}{a_1} = \log_2 a_m - \log_2 a_1$$

wird, so ist die gesuchte Grösse des wahrnehmbaren Höhenunterschiedes zweier Töne, wodurch das Intervall definirt wurde, der Unterschied zwischen den Logarithmen von der Basis 2 ihrer Schwingungszahlen, und stellen sich damit diese Logarithmen dar als die Tonhöhen, deren Grössenunterschiede wir empfinden, wogegen die durch die Schwingungszahlen und ihre Verhältnisse repräsentirten Tonhöhen nur die nicht empfundenen äusseren Ursachen von jenen sind.

W. Hankel, *über das Crookes'sche Radiometer.* [1])

Es scheint nicht, als ob es bis jetzt gelungen wäre, eine genügende Erklärung für die Entstehung der Bewegung des Flügelkreuzes im Crookes'schen Radiometer zu geben. Im Folgenden werde ich versuchen, im Allgemeinen eine Theorie aufzustellen, welche, indem sie diese Bewegung an ähnliche Vorgänge in der Elektricitätslehre anschliesst, eine solche Erklärung zu liefern verspricht.

Vor Allem wird es darauf ankommen, in dem einfachsten Falle die Vorgänge anzugeben, welche bei den Bewegungen des Radiometerkreuzes auftreten und dieselben bedingen.

In einem weiten und hohen, aus doppelten Wänden gebildeten Zinkgefässe wurde das zwischen diesen Wänden enthaltene

1) Vorgetragen in der Sitzung am 12. Febr. 1876, zum Druck übergeben in der Sitzung am 5. März 1877.

Wasser bis gegen 40° C. erhitzt, und dann ein von Geissler in Bonn verfertigtes Radiometer, das zuvor in einem nicht geheizten verdunkelten Nebenzimmer aufbewahrt worden, auf den Boden des inneren Hohlraumes gestellt. Die vier Arme des Kreuzes in diesem Radiometer bestehen aus Aluminium, und tragen an ihrem Ende verticalstehende geglühte Glimmerplatten, welche auf der einen Seite geschwärzt sind, auf der andern aber ihr halbmetallisches Ansehn zeigen. Die obere Oeffnung des Zinkgefässes wurde durch eine Glasplatte bedeckt.

Das Metallkreuz, dessen Blättchen infolge der Strahlung seitens der Gefässwände auf der berussten Seite offenbar eine höhere Temperatur erhielten als auf der blanken, begann sofort sich lebhaft zu drehen, und zwar in der Richtung, dass die blanke Seite voranging. Doch nahm bald die Rotationsgeschwindigkeit ab, und nach 12 bis 15 Minuten war sie erloschen. Es hatte jetzt das Instrument wohl in allen seinen Theilen und auf allen Seiten nahe dieselbe Temperatur erlangt.

Das Radiometer, dessen Kreuz still stand, wurde nun aus dem Zinkgefässe herausgenommen, und in das ungeheizte dunkle Nebenzimmer von 8—10° C. gestellt. Sofort begann das Kreuz von Neuem zu rotiren, aber in entgegengesetzter Richtung als zuvor. Nach einigen Minuten hörte diese Bewegung auf. Während der Rotation war die schwarze Seite, welche durch Ausstrahlung mehr verlor als die blanke, die kältere, während sie zuvor, wie oben bemerkt, nach dem Einsetzen des Radiometers in das erwärmte Gefäss, die wärmere gewesen war.

Die Bewegung der Glimmerblättchen erfolgte also nur bei ungleicher Temperatur der beiden Seitenflächen des Glimmers und zwar stets in dem Sinne, als ob gegen die relativ wärmere Fläche ein Druck ausgeübt würde. Dass die Bewegung im Innern des warmen Zinkgefässes nicht etwa aufgehört hatte, weil das Wasser in dem Zwischenraume zwischen den beiden Wänden zu weit abgekühlt worden, konnte leicht dadurch bewiesen werden, dass, als das aus dem Nebenzimmer genommene Radiometer wieder in das Innere des Zinkgefässes, dessen Temperatur während des Verlaufs einer weiteren Viertelstunde sich noch mehr erniedrigt hatte, gestellt wurde, sofort die Rotation in der gewöhnlichen Richtung wieder eintrat.

Aus den vorstehend beschriebenen Versuchen ergibt sich, dass die Bewegung des Radiometerkreuzes nur infolge einer

Ungleichheit in der Temperatur oder in den Schwingungsverhältnissen der Wärme auf den beiden Seiten der Glimmerblättchen entsteht, und es fragt sich nun, in welcher Weise diese Ungleichheit der Temperatur eine Bewegung veranlassen kann.

Im Jahre 1865 habe ich in diesen Berichten [1]) eine Theorie der elektrischen Erscheinungen aufgestellt, und dieselben als kreisförmige Schwingungen (Wirbelbewegungen) aufgefasst. Diese Form wurde gefordert zur Erklärung des polaren Verhaltens der beiden Modificationen der Elektricität, die sich dann blos durch den Sinn ihrer Drehung unterscheiden. Die Bewegungen der elektrischen Körper (scheinbar Anziehung und Abstossung) entstehen durch die Ungleichheit der Schwingungsbewegungen, welche durch das Zusammentreffen der von den elektrischen Körpern ausgehenden Bewegungen auf den entgegengesetzten Seiten dieser Körper erzeugt werden. Bei der Uebertragung dieser Schwingungen an den umgebenden Aether entwickelt sich eine Abstossung zwischen den kreisförmigen Schwingungen des Körpers und der anliegenden in Bewegung zu setzenden Aetherschicht, die, wie sich zeigen lässt, mit dem Quadrate der Rotationsgeschwindigkeit zunimmt. Die relativ grössere Rotationsgeschwindigkeit auf der einen Seite bedingt dann eine grössere Abstossung und infolge dieser bewegt sich der elektrische Körper nach der Seite hin, wo der geringere Druck vorhanden ist.

In ähnlicher Weise entstehen nun auch die Bewegungen des Radiometerkreuzes; nur bedarf es für das Licht und die Wärme keiner drehenden Schwingungen.

Im ruhenden Aether ist die Summe der Abstossungen aller Molecüle ein Minimum. Wird ein Theil dieses Aethers parallel einer Ebene um eine in Bezug auf den Abstand e zweier benachbarter Molecüle nur kleine Strecke δ verschoben, so wird jene Abstossung vergrössert, und es lässt sich dieser Zuwachs der Abstossung in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine der Verschiebungsrichtung parallel geht, die andere aber gegen diese Richtung senkrecht steht. Die erste Componente überträgt die Bewegung von einer Schicht zur nächsten, und da sie mit der Richtung der Verschiebung ihr Vorzeichen wechselt, wird ihr

1) Berichte der math.-phys. Classe der K. S. Ges. d. Wiss. 1865. Pogg. Annal. Bd. 126. S. 440.

Werth, wenn wir denselben in eine Reihe nach Potenzen von $\frac{\delta}{e}$ entwickelt denken, mit dem Gliede $\frac{\delta}{e}$ beginnen. Die zweite Componente dagegen bewirkt eine Abstossung zwischen den beiden Schichten und ändert mit der Richtung der Verschiebung ihr Vorzeichen nicht; ihr Ausdruck wird also bei Entwickelung in eine Reihe nach Potenzen von $\frac{\delta}{e}$ mit dem Gliede $\left(\frac{\delta}{e}\right)^2$ beginnen. Behalten wir bei der Kleinheit des Bruches $\frac{\delta}{e}$ nur dies erste Glied bei, so wird die Abstossung mit dem Quadrate von $\left(\frac{\delta}{e}\right)$ oder wenn e als constant betrachtet, mit δ^2 steigen.

Wir können uns die Zunahme der Temperatur eines Körpers als einen erhöhten Spannungszustand oder eine vergrösserte Schwingungsbewegung unter Hinzutritt neuer Schwingungen von kürzerer Wellenlänge denken. Aber jedenfalls müssen wir, auch wenn wir die Erhöhung der Temperatur als eine erhöhte Spannung auffassen, doch im Acte der Ausstrahlung diese Spannung in Schwingungsbewegung übergehen lassen. Infolge der durch die höhere Temperatur bewirkten grösseren Schwingungsamplituden wird der Werth von δ steigen, und folglich auf Seiten der höheren Temperatur ein stärkerer Druck gegen die Glimmerscheibe des Radiometers ausgeübt werden.

Die Erfahrung lehrt übrigens, dass auch die Strahlungen der Glaswände, welche das Radiometerkreuz einschliessen, einen Einfluss auf die Bewegung desselben ausüben, sowie dass die verschiedenen Strahlen in ihren Wirkungen nicht gleich sind. Erst eine genaue Untersuchung aller dieser Verhältnisse kann uns in den Stand setzen, die einzelnen Erscheinungen, welche das Radiometer je nach den gegebenen Bedingungen darbietet, vollständig zu erklären; ich habe mich deshalb im Vorstehenden auf die Erläuterung des einfachsten Vorganges beschränkt.

ÖFFENTLICHE SITZUNG AM 23. APRIL.

W. Hankel, *über die Photoelektricität des Flussspathes.*[1])

Mit einer lithogr. Tafel.

Während früher eine Verschiedenheit in der Ausbildung der beiden Enden einer Axe, wie solche bei den sogenannten hemimorphen Krystallen auftritt, als unbedingt erforderlich zur Entstehung thermoelektrischer Erscheinungen betrachtet wurde, habe ich in einer Reihe von Abhandlungen[2]) nachgewiesen, dass zur Hervorrufung derselben bereits die blosse Verschiedenheit der Axen und der davon abhängigen Cohäsionsverhältnisse in den nicht zum Würfelsysteme gehörigen Krystallen ausreichend ist. Im Würfelsysteme sind nun allerdings die drei auf einander senkrechten Hauptaxen gleichwerthig; indess zeigen sich in den Cohäsionsverhältnissen nach den mit einer solchen Axe verschiedene Winkel bildenden Richtungen Unterschiede, und es konnte daher wohl gefragt werden, ob nicht auch schon eine solche Differenz für das Auftreten thermoelektrischer Erscheinungen genüge.

Behufs Beantwortung dieser Frage habe ich früher schon wiederholt Krystalle des Flussspathes von Strassberg und von Annaberg einer Prüfung unterworfen, jedoch ohne ein entscheidendes Resultat zu erzielen. Da ich seit jener Zeit die Empfindlichkeit meines Elektrometers wesentlich erhöht hatte[3]), so nahm ich die Versuche jetzt von Neuem auf, benutzte aber dieses Mal ziemlich dunkelviolett gefärbte Krystalle von Weardale. Nachdem dieselben mehrere Stunden einer Temperatur von

1) Zum Druck übergeben am 23. April 1877.

2) Abh. der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. Bd. XIV. S. 359 ff., Bd. XV. S. 273 ff., und S. 345 ff., Bd. XVIII. S. 203 ff., und S. 479 ff. Diese Abhandlungen enthalten die thermoelektrische Untersuchung der Krystalle folgender Mineralien: Topas, Schwerspath, Aragonit, Kalkspath, Baryt, Idocras, Apophyllit, Gyps, Diopsid, Orthoklas, Albit und Periklin.

3) Ueber diese Empfindlichkeit s. weiter unten.

95° C. ausgesetzt gewesen, wurde während des Erkaltens das elektrische Verhalten ihrer Oberfläche geprüft, und es erschien in der That eine schwache positive Spannung, welche bei den ersten Versuchen im Verlaufe der Abkühlung bis zu einer Ablenkung des Goldblättchens im Elektrometer von 2 Skalentheilen des Mikrometers (im Oculare des zur Beobachtung dienenden Mikroskopes) anwuchs, und dann nach längerer Zeit wieder abnahm.[1])

Da nun gerade diese Flussspäthe eine starke Fluorescenz zeigen und nach Bestrahlung mittelst Sonnenlichtes eine Zeitlang im Dunkeln phosphoresciren[2]), also gegen die Einwirkung des Lichtes so zu sagen empfänglich sind, und da ich ferner vor anderthalb Jahren die Entstehung elektrischer Ströme durch die Einwirkung des Lichtes auf in Wasser- und Salzlösungen befindliche Metallplatten beobachtet hatte[3]), so hielt ich es für sehr wahrscheinlich, dass auf jenen Flussspäthen auch unter dem Einflusse des Lichtes elektrische Erregungen entstehen könnten. Meine Voraussicht ward durch den Versuch auf das Glänzendste bestätigt. Diese Flussspäthe wurden nicht nur durch Bestrahlen mittelst des directen Sonnenlichtes, sondern sogar schon durch das Aussetzen an das zerstreute Tageslicht elektrisch, und es war namentlich die elektrische Spannung nach Bestrahlung mittelst directen Sonnenlichtes ziemlich beträchtlich. Zufälligerweise waren die zuerst auf dem Flussspathe infolge der Bestrahlung durch Licht entstandenen Spannungen gerade entgegengesetzt den zuvor durch Erwärmen erzeugten, und auch beträchtlich stärker als die letzteren; auch waren sie entgegengesetzt der durch Säubern und Reinigen der Krystallflächen mittelst eines Pinsels hervorgerufenen, so dass gleich diese ersten Beobachtungen die Entstehung einer elektrischen Spannung infolge der Einwirkung des Lichtes vollkommen zweifellos nachwiesen.

---

1) Ich habe bis jetzt keine Zeit gehabt, diese infolge der Temperaturänderung aufgetretene Spannung ihrer Entstehung und Bedeutung nach weiter zu untersuchen, da die nachstehenden Versuche mich vollständig in Anspruch nahmen.

2) Placidus Heinrich, die Phosphorescenz der Körper I. S. 22. Th. v. Grotthuss, Schweig. Journ. f. Chem. u. Phys. Bd. XIV. S. 133.

3) Berichte der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. 1875, S. 299 ff.

Verfahren bei den Beobachtungen.

Ehe ich zu näheren Angaben über die photoelektrischen Erscheinungen am Flussspathe übergehe wird es zweckmässig sein, einige Bemerkungen über das zur Beobachtung dieser Vorgänge beobachtete Verfahren und namentlich über die Empfindlichkeit des dabei benutzten Elektrometers vorauszuschicken.

Zur Beobachtung und Messung der photoelektrischen Spannungen auf den Flussspathkrystallen diente das von mir construirte Elektrometer[1]), welches ich auch während der letzten Jahre zur Untersuchung der Thermoelektricität der Krystalle benutzt habe. Es besteht dasselbe aus einem Goldblättchen, das an dem unteren Ende eines durch Schellack isolirten Messingstäbchens aufgehängt ist. Zu beiden Seiten befinden sich zwei durch Mikrometerschrauben bewegliche; gleichfalls durch Schellack isolirte Messingscheiben, welche mittelst eines Commutators mit den beiden Polen einer Volta'schen Säule in Verbindung stehen. Die Volta'sche Säule ist aus kleinen zusammengelötheten Zinkkupferelementen gebildet, welche in mit Wasser gefüllte und behufs vollkommener Isolirung auf einem grossen Harzkuchen stehende Gläschen eingetaucht sind. Während jedes Ende dieser Säule durch den Commutator, dessen mit Quecksilber gefüllte Näpfchen von Schellackstangen getragen werden, mit je einer Messingscheibe verbunden bleibt, ist die Mitte der Säule durch eine metallische Verbindung mit den Gasröhren des Hauses zur Erde abgeleitet.

Die Empfindlichkeit dieses Instrumentes lässt sich durch die Anzahl der in der angewandten Säule befindlichen Elemente, so wie auch durch die Annäherung oder Entfernung der beiden Messingscheiben gegen das mitten zwischen ihnen hängende Goldblättchen nach Belieben reguliren.

Der Ausschlag des Goldblättchens wird mittelst eines Mikroskops von 40facher Vergrösserung beobachtet, und auf einem im Oculare desselben befindlichen Glasmikrometer gemessen.

Bei mässiger Empfindlichkeit des Elektrometers, wenn z. B. die dem Goldblättchen mitgetheilte Spannung eines Elementes

---

1) Näheres darüber in diesen Berichten für 1850 S. 71 ff., Poggend. Annal. Bd. 84 S. 28; Abhandl. der K. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. 5 S. 392 ff.; Bd. 9, S. 6 ff.

Zink-Kupfer-Wasser eine Bewegung des Goldblättchens von 5 Skalentheilen hervorbringt, lässt sich die Spannung an den beiden Polen der in ihrer Mitte abgeleiteten Säule durch Zuhülfenahme einiger Zinn-Kupferelemente (anstatt der viel stärkeren Zinkkupferelemente) so weit gleich machen, dass während der Ableitung des Goldblättchens zur Erde beim Umlegen des Commutators, wodurch die Polarität in den Messingscheiben umgekehrt wird, das Goldblättchen fast unverändert an seinem Orte bleibt. Bei diesem Zustande des Instrumentes misst man dann zweckmässig die dem isolirten Goldblättchen mitgetheilten elektrischen Spannungen durch Umlegen des Commutators, wodurch der Ausschlag sich verdoppelt, und die Messung von der Ruhelage des Goldblättchens unabhängig wird.

Steigt jedoch die Empfindlichkeit des Elektrometers höher, so ist es ohne zu grosse Weitläufigkeiten nicht mehr möglich, die Einwirkung der beiden Hälften der Volta'schen Säule auf das Goldblättchen absolut gleich zu machen, oder vielmehr in diesem Zustande zu erhalten. Man lässt dann den Commutator in einer bestimmten Lage, und beobachtet einfach die bei eintretender Elektrisirung des Goldblättchens entstehenden Ausschläge. In dieser Weise ist das Instrument bei den nachfolgenden Versuchen benutzt worden. Die Empfindlichkeit desselben wurde dabei gewöhnlich so regulirt, dass die dem Goldblättchen mitgetheilte Spannung eines Elementes Zinn-Kupfer-Wasser, welches schon sehr lange Zeit in Wasser gestanden hatte, einen Ausschlag von nahe 25 Skalentheilen, und die Spannung eines Elementes Zink-Kupfer-Wasser einen Ausschlag von ungefähr 80 Skalentheilen erzeugte.

Trotz dieser grossen Empfindlichkeit wuchsen aber, da bei der beträchtlichen Zahl der in der Säule benutzten Elemente die Messingscheiben ziemlich weit von dem Goldblättchen abstehen konnten, die Ausschläge bis zu 30 Skalentheilen noch ziemlich nahe proportional den auf dem Goldblättchen befindlichen elektrischen Spannungen.

Bei den folgenden Versuchen liess sich nun aber, ebenso wie bei den meisten Beobachtungen über das thermoelektrische Verhalten der Krystalle, die zu bestimmende elektrische Spannung nicht direct dem Goldblättchen zuführen; es konnte dieselbe vielmehr nur durch die Vertheilungswirkung gemessen werden, welche die Oberfläche des photoelektrischen Krystalles auf einen

genäherten Leiter ausübte. Hiezu diente dieselbe Vorrichtung, welche bei der Untersuchung der thermoelektrischen Vorgänge von mir benutzt wird[1]): ein verticaler durch einen äusserst dünnen Platindraht mit dem Goldblättchen des Elektrometers leitend verbundener und durch Anschmelzen an einen Glasstab isolirter dickerer Platindraht wurde, nachdem er durch Ableitung zur Erde unelektrisch gemacht war, nach Aufhebung dieser Ableitung mittelst eines Hebelwerkes mit seiner unteren Spitze den verschiedenen Punkten der auf ihr elektrisches Verhalten zu untersuchenden Fläche möglichst genähert (jedoch ohne dass Berührung eintrat), und der dabei entstehende Ausschlag des Goldblattes beobachtet.

Die Grösse des Ausschlages hängt bei demselben elektrischen Zustande der untersuchten Fläche und bei stets gleicher Annäherung noch wesentlich von der Länge des Leitungsdrahtes (dünnen Platindrahtes), und der auf dem Wege der Leitung bis zum Goldblättchen infolge der Nachbarschaft von Metalltheilen mehr oder minder grossen Bindung der Elektricität, so wie auch von der Entfernung ab, bis zu welcher die untere Spitze des dickeren Platindrahtes von der Krystallfläche entfernt wird, um abgeleitet zu werden.

Um daher eine angenäherte Vorstellung von der Grösse der auf den untersuchten Flächen vorhandenen elektrischen Spannungen (dieselben als nur an der Oberfläche haftend angenommen) zu gewinnen, mögen folgende Angaben dienen.

Eine ebene kreisförmige horizontal liegende Kupferplatte von 95 mm Durchmesser wurde isolirt und mit dem einen Pole einer aus Zink, Kupfer und Wasser gebildeten Säule, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet war, verbunden. Wurde der Mitte dieser Platte die Spitze des dickeren Platindrahtes, welche ursprünglich bei ihrer Ableitung zur Erde 25 mm davon abstand, möglichst genähert, so entstand ein Ausschlag im Elektrometer, welcher für ein mit der Platte verbundenes Element Zink-Kupfer-Wasser ungefähr 1,2 Skalentheile betrug. Wurde die Spitze des Drahtes nicht der Mitte, sondern dem Rande der Platte genähert, so sank jener Ausschlag ungefähr auf die Hälfte

1) Eine ausführliche Beschreibung so wie Abbildung derselben findet sich in den Abhandl. der K. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. 14 S. 380 ff., und Taf. IV, Fig. 65.

herab. Ist nun auch die Vertheilung der Elektricität eine andere als auf den später untersuchten Krystallflächen, und sind auch die Oberflächen der Platte und des Krystalles an Grösse verschieden, so kann obige Angabe doch immerhin dienen, um eine angenäherte Vorstellung von der Intensität der elektrischen Erregung auf den untersuchten Krystallflächen zu gewinnen.

Das Elektrometer stand auf einer breiten Steinplatte, welche anstatt des sonst üblichen Brettes in die Fensternische eingemauert war. Um elektrische Erregungen durch das Tageslicht während der Beobachtungen zu verhindern, war ein dichtes graues Rouleau zwischen den beiden zur Abhaltung jedes stärkeren Luftzuges dienenden doppelten Fenstern niedergelassen worden. Schien die Sonne auf das Rouleau, so wurde noch durch einen an das Fenster gestellten Papierschirm die Einwirkung des Lichtes auf die Krystallfläche verhindert.

Die Krystalle waren bei den nachfolgenden Untersuchungen gerade ebenso wie bei der Prüfung auf ihr thermoelektrisches Verhalten in passende mit Kupferfeilicht gefüllte kupferne [1]) Gefässe eingesetzt, so dass allein diejenige Fläche, welche die Lichteinwirkung empfangen sollte, unbedeckt blieb. Dieses Verfahren hatte noch den grossen Vortheil, dass bei dem Transporte der so eingehüllten Krystalle von einer Stelle des Zimmers zu einer andern, jedes Entstehen von Reibungselektricität vollkommen ausgeschlossen war, weil die Krystalle in dem Kupferfeilicht sehr fest lagen und in keiner Weise mit der Hand berührt zu werden brauchten. Nachdem die Krystalle in der angegebenen Weise in Kupferfeilicht eingehüllt, sodann mittelst eines feinen Haarpinsels an ihrer Oberfläche vollkommen gereinigt und mittelst Anhauchens möglichst von der durch die letztere Operation erzeugten Elektricität befreit waren, wurden sie längere Zeit, gewöhnlich 24 Stunden in einen dunklen Raum (kupfernes ringsum geschlossenes Gefäss) gestellt, darauf nach Verlauf dieser Zeit eine bestimmte Anzahl Minuten hindurch dem Einflusse des Tageslichtes oder auch des Sonnenlichtes ausgesetzt, und dann

1) Die Gefässe dürfen nicht aus Messing bestehen, indem bei Annäherung der Platinspitze an das Messing bereits ein geringer positiver Ausschlag entsteht. Wurde auf den metallischen Träger, auf welchen die kupfernen Gefässe gestellt werden, eine Zinkplatte gelegt, und zur Erde abgeleitet, so entstand bei Annäherung der Platinspitze an diese Zinkplatte schon ein positiver Ausschlag von 1 Skalentheil.

auf einen neben dem Elektrometer befindlichen metallischen und zur Erde abgeleiteten Träger so gestellt, dass die untere Spitze des dickeren Platindrahtes den verschiedenen Punkten der freien Oberfläche der Krystalle mittelst des Hebelwerkes in bequemer Weise genähert werden konnte.

Sollte das Tages- oder Sonnenlicht vor seinem Auftreffen auf die Krystallfläche erst gewisse Modificationen erleiden, so wurden die kupfernen Gefässe mit den in ihnen enthaltenen Flussspäthen in einen schwarzen Kasten gestellt, dessen vordere dem Lichte oder der Sonne ausgesetzte Seite unter 45° gegen den Horizont geneigt war und eine grosse Oeffnung enthielt, welche entweder durch farbige Gläser oder durch mit verschiedenen Flüssigkeiten gefüllte Glasgefässe bedeckt werden konnte.

Beobachtungen der Photoelektricität des Flussspathes.

Krystall Nr. I. Blauvioletter Flussspathkrystall von Weardale in Durham (England).

Wie schon oben bemerkt, gab die Untersuchung eines blauvioletten Flussspathes aus Weardale auf sein thermoelektrisches Verhalten die Veranlassung zu der Entdeckung der Photoelektricität desselben.

Der betreffende Krystall war nur mit einem Theile seiner Flächen ausgebildet; die am meisten ausgebildete Fläche ist die in Fig. 1 mit 1 bezeichnete[1]); aber auch in diese drangen rechts und links andere Krystalle in zwillingsartiger Verwachsung ein. Auf ihr waren, wie die Zeichnung einigermassen nachweist, drei Flächen eines sehr stumpfen Pyramidenwürfels sichtbar.

Der beschriebene Flussspathkrystall wurde bis auf die Fläche 1 in Kupferfeilicht eingehüllt, und sodann in einem kupfernen Gefässe mit doppelten Wänden, deren Zwischenraum mit Wasser angefüllt war, mehrere Stunden einer Temperatur von 95° C. ausgesetzt. Beim Herausnehmen aus diesem Gefässe zeigte er nirgends elektrische Spannungen auf seiner Oberfläche; innerhalb einiger Minuten entwickelte sich aber eine positive Spannung von + 0,4 Skalentheilen des Ocularmikrometers, die in 25 Minuten bis auf 2 Skth. stieg, und im Verlaufe von

1) Die Bezeichnung der Flächen eines Würfels durch die Zahlen 1 bis 6 erhellt aus dem Fig. 5 abgebildeten Netze.

$4^1/_2$ Stunden auf + 0,8 Skth. zurücksank. Ich habe schon oben bemerkt, dass ich noch nicht Zeit gehabt habe, die Entstehung und Bedeutung dieser elektrischen Erregung weiter zu verfolgen.

Darauf ward der Krystall einige Zeit dem Sonnenlichte ausgesetzt; in der Mitte der Würfelfläche an der mit *e* bezeichneten Stelle erschien eine negativ elektrische Spannung von —23 Skth. Nachdem der Krystall dann einige Zeit im Dunkeln (in einem kupfernen Kasten) gestanden, war dieselbe bis auf —14 gesunken. Nun wurde der Krystall in dem kupfernen Gefässe (gegen jedes Licht geschützt) 3 Stunden lang einer Temperatur von 95° C. ausgesetzt, und zeigte sich beim Herausnehmen überall auf seiner freien Fläche unelektrisch.

Nachdem der Krystall dann wieder 24 Stunden in einem verschlossenen kupfernen Gefässe (also gegen jedes Licht geschützt) bei der Temperatur des Zimmers gestanden [1]), wurde er in das Licht der etwas verschleierten Sonne gestellt. Es entwickelte sich, wie durch wiederholte Prüfungen nachgewiesen wurde, eine mit der Dauer der Bestrahlung immer stärker werdende Elektricität, welche nach $1^1/_4$ Stunde auf den mit *a*, *b*, *c*, *d*, *e* bezeichneten Punkten der Krystallfläche die folgende Intensität zeigte: auf *a* —7,5, *b* —9,7, *c* —21,5, *d* —16, *e* (Mitte) —19,5, wie solche auch in die Zeichnung Fig. 1 Fläche 1 eingetragen ist. Wie hieraus ersichtlich, war die elektrische Spannung an den verschiedenen Punkten nicht gleich gross; das Maximum lag in *c* auf der rechten vorderen, und das Minimum diagonal gegenüber in *a* auf der linken hinteren Ecke.

Wie bereits bemerkt, war der Krystall während der Zeit von $1^1/_4$ Stunde wiederholt auf seinen elektrischen Zustand geprüft worden, und es zeigte sich, dass von Anfang an das Verhältniss der auf den verschiedenen Punkten der bestrahlten Fläche auftretenden Elektricitäten stets nahe dasselbe war, wie zwischen den oben angeführten Zahlen. Auch als darauf eine kurze Bestrahlung mittelst durch eine Linse concentrirten Sonnenlichtes angewandt wurde, stiegen die Intensitäten der elektrischen Spannungen in nahe gleichem Verhältnisse: es zeigte *a* —9, *b* —10, *c* —26, *d* —19,5, *e* —22.

1) Ich theile aus den mit diesem Krystalle ausgeführten Versuchen nur so viel mit, wie für das Verständniss der photoelektrischen Erscheinungen überhaupt Interesse hat.

Als der Krystall ins Dunkle (kupfernes Gefäss) gestellt wurde, und die Intensitäten wieder abnahmen, blieb das Verhältniss ebenfalls nahe dasselbe. Nachdem er 30 Minuten im Dunkeln gestanden, wurde gefunden: *a* —7,5, *b* —9, *c* —19, *d* —13,5, *e* —16. Nach weiterem Stehen im Dunkeln (während 1 Stunde 6 Minuten) zeigte *c* —8,5, *e* —7.

Nachdem noch einige andere Versuche an diesem Krystalle ausgeführt worden, wurde er wieder ins Dunkle gestellt und erschien am andern Tage völlig unelektrisch.

Während nun bisher stets Sonnenlicht zur Erregung der Photoelektricität angewandt worden, versuchte ich jetzt, ob nicht auch der Einfluss des blossen zerstreuten Tageslichtes zur Hervorrufung elektrischer Spannungen ausreichend sei. Der in das Kupferfeilicht eingehüllte Krystall ward mit seinem kupfernen Gefässe auf den Fensterstein innerhalb des Zimmers gestellt, jedoch gegen die übrigens mit einem ziemlich dichten Wolkenschleier bedeckte Sonne in Schatten. Da ich bei dem schwachen Lichte eine längere Zeit der Bestrahlung für nöthig erachtete, so prüfte ich den Krystall erst nach 2 Stunden, und fand dann *a* —0,3, *b* —0,6, *c* —2,2, *d* —1,6, *e* —1,7.[1])

Nachdem am nächsten Tage die Versuche über die Einwirkung des zerstreuten Tageslichtes mit gleichem Erfolge wiederholt worden, wurde am darauf folgenden Tage der Krystall wieder dem Sonnenlichte ausgesetzt. Da die Erscheinungen den früher beobachteten entsprachen, so wünschte ich durch eine längere Bestrahlung mittelst des durch eine grosse Linse concentrirten Sonnenlichtes die elektrischen Spannungen möglichst zu erhöhen; nachdem der Krystall und die kupferne Schaale, in welche er eingesetzt war, 30 Minuten lang von demselben bestrahlt worden, fand sich die Schaale so weit erhitzt, dass ich sie kaum mit den Händen halten konnte. Bei der unmittelbar darauf folgenden Prüfung ergab sich aber, dass die Fläche 1 dieses Krystalles fast keine Elektricität mehr zeigte.

Da eben dieser Krystall früher wiederholt stundenlang

1) Wie wir später sehen werden, genügen bei empfindlichen Krystallen wenige Minuten, um durch das blosse zerstreute Tageslicht ziemlich starke elektrische Spannungen zu erzeugen. Der obige Krystall Nr. 1 war aber durch das wiederholte Aussetzen ins Sonnenlicht und namentlich in das durch Linsen concentrirte Sonnenlicht bereits in seiner Empfindlichkeit sehr geschwächt.

einer viel höheren Temperatur (95° C.) als in dem vorstehend berichteten Versuche ausgesetzt gewesen, ohne seine Empfindlichkeit für das Licht zu verlieren, so kann der Verlust dieser Eigenschaft nur durch den Einfluss des Lichtes bewirkt worden sein; sehr wahrscheinlich ist durch die lange und intensive Lichteinwirkung der Farbstoff des Krystalles verändert worden.

Auch später nach dem Erkalten gewann der Krystall seine frühere Empfindlichkeit nicht wieder, selbst nicht nach mehrtägigem Stehen im Dunkeln [1]) oder Aufbewahren unter Wasser. Unter Einwirkung des Sonnenlichtes gab die Fläche 1 stets äusserst schwache elektrische Intensitäten, gegen das zerstreute Tageslicht war sie gar nicht mehr empfindlich.

Dagegen zeigte sich die Fläche 5 dieses Krystalles (die in Fig. 1 mit 5 bezeichnete), welche bei der Bestrahlung der Fläche 1 durch concentrirtes Sonnenlicht infolge des vorliegenden Kupferfeilichts gegen die directen Sonnenstrahlen geschützt gewesen war, sich selbst gegen das zerstreute Tageslicht noch empfindlich. Nach 1stündigem Aussetzen an das Tageslicht entstanden folgende elektrische Spannungen: in a —3,2, f —1,7, d —0,2, c —2,2, e —2,2, wie solche in der Abbildung dieser Fläche in Fig. 1 eingetragen worden sind. Das Vorhandensein der Lichtempfindlichkeit auf dieser Fläche ist ein neuer Beweis, dass bei dem obigen Versuche mit der Fläche 1 diese Eigenschaft nicht durch die eingetretene Temperaturerhöhung zerstört worden ist, da die in das Kupferfeilicht eingehüllte Fläche 5 sicher keine niedrigere Temperatur erlangt hat, als die freiliegende Fläche 1.

Krystall Nr. II. Dunkelgrüner Flussspathkrystall von Weardale.

Die dunkelgrünen Flussspathkrystalle von Weardale scheinen gegen das Licht noch empfindlicher zu sein, als die blauvioletten.

Da die zuvor über den Krystall Nr. I berichteten Versuche gelehrt hatten, dass durch die Lichteinwirkung selbst, das Vermögen durch eine solche elektrisch zu werden, geschwächt wird, ja so gut wie ganz vernichtet werden kann, so wurden alle spä-

1) Ob durch noch längeres Verweilen im Dunkeln oder durch andere Mittel sich die verlorene Eigenschaft wieder herstellen lässt, müssen weitere Versuche lehren.

teren Versuche nur mit dem zerstreuten Tageslichte angestellt, und die Krystalle nur kurze Zeit demselben ausgesetzt, sonst aber stets im Dunkeln aufbewahrt.

Gewöhnlich wurde so verfahren: die Krystalle wurden bis auf die zu untersuchende Fläche in Kupferfeilicht eingesetzt, durch Anhauchen möglichst von der durch das Abpinseln erzeugten Elektricität befreit, und darauf 24 Stunden im Dunkeln aufbewahrt. Nach dem Herausnehmen wurden sie dann auf das Nichtvorhandensein elektrischer Spannungen geprüft und waren sie frei davon befunden, dem Tageslichte eine bestimmte Anzahl Minuten ausgesetzt. Darauf wurden sie auf ihre photoelektrischen Spannungen geprüft, und nach dem Entfernen der Elektricität durch Anhauchen wieder bis zum andern Tage ins Dunkle gestellt, an welchem dann die Beobachtungen auf derselben Fläche nochmals ausgeführt wurden. Innerhalb der beiden Tage war der Krystall nirgends berührt worden, so dass jede andere Quelle einer Elektricitätserregung ausser durch das Licht vollkommen ausgeschlossen war. War die Helligkeit des Himmels nahe dieselbe, so erlangten die Krystalle bei der Wiederholung nahe dieselben elektrischen Spannungen wieder wie am ersten Tage.

Die kleine Krystalldruse, welcher der Krystall Nr. II angehörte, bestand vorzugsweise aus zwei grösseren zwillingsartig verwachsenen Krystallen mit glatten Oberflächen und einem dritten etwas kleineren mit gewissermassen blätterigen Oberflächen. Auf den meisten glatten Würfelflächen liegen sehr niedrige Achtundvierzigflächner oder Ikositetraëder. Die Farbe der beiden grössern Krystalle war etwas dunkler als die des dritten; im durchgehenden Lichte sahen sie smaragdgrün aus, während sie im auffallenden Lichte fast dunkel sapphirgrün und undurchsichtig erschienen.

Von dem grösseren Krystalle, dessen photoelektrisches Verhalten ich nachher genauer angeben werde, waren nur die Flächen 1, 4 und 6 zu einem grösseren, die Fläche 5 und 2 nur zu einem kleineren Theile frei; der übrige Theil der Fläche 2, so wie die Fläche 3 waren durch Bruchflächen ersetzt.

In Fig. 2 sind die Flächen 1, 4, 6 und 5 in halber Grösse abgebildet; ich werde in diese Zeichnung gleich die an den verschiedenen Stellen beobachteten elektrischen Spannungen eintragen und bemerke nur, dass die gemessenen elektrischen

Intensitäten wohl auf jeder Fläche unter sich vergleichbar sind, weil sie derselben Lichteinwirkung ihre Entstehung verdanken, dass dies aber nicht mehr gilt für die auf verschiedenen Flächen beobachteten Werthe, weil es bei dem veränderlichen Zustande des Himmels unmöglich war, auch nur angenähert eine gleichstarke Lichteinwirkung abzumessen.

Während nun auf den beiden Flächen des Krystalles Nr. I überall nur negative Elektricität beobachtet wurde [1]), erscheint auf den Flächen des Krystalles Nr. II ausserdem noch positive Elektricität, und zwar gewinnt es den Anschein, als ob bei den grünen Krystallen die positive Spannung vorzugsweise an den Ecken auftritt, während die negative die Mitte der Flächen einnimmt.

Die Fläche 1 war die erste, welche ich an diesem Krystalle unmittelbar nach den Beobachtungen am Krystalle Nr. I untersuchte, also zu einer Zeit, wo ich das Auftreten positiver Elektricität überhaupt nicht kannte. Es fragt sich, ob nicht durch Bedecken der stark negativen Stellen der Mitte auch auf den Ecken dieser Fläche positive Elektricität sichtbar gemacht werden kann. Auf den genäherten Platindraht wirken ja sämmtliche Elektricitäten der freien Fläche ein, und es kann leicht eine an einem bestimmten Punkte vorhandene schwache Polarität durch eine starke entgegengesetzte der benachbarten Flächenstücke verdeckt werden.

Der an der Stelle der Fläche 2 vorhandene Bruch entwickelt im Lichte zum Theil sehr starke positive Spannung.

Krystall Nr. III. Dunkelgrüner Flussspath von Weardale.

Der Krystall Nr. III glich in seiner Farbe und Beschaffenheit dem vorhergehenden und bestand aus zwei zwillingsartig verwachsenen. Von dem einen Krystall ist in Fig. 3 ein Theil der Flächen in halber Grösse abgebildet. Die Flächen 1, 4 und 6 waren glatt, jedoch an den Rändern zum Theil durch den zweiten Krystall oder durch Bruch unvollständig; die Fläche 2 war dagegen unvollkommen gebildet und zum Theil durch Bruch ersetzt.

Wie vorhin habe ich für diesen Krystall die beobachteten

1) Wie sich die übrigen Theile der Oberfläche dieses Krystalles Nr. I verhalten, habe ich noch nicht Zeit gehabt zu untersuchen.

Ausschläge des Elektrometers gleich in die Zeichnungen Fig. 3 eingetragen. Auch hier weisen die Flächen 1 und 4 wieder darauf hin, dass die Ecken oder der Rand der Würfelflächen positiv sind, während die Mitte stark negativ ist. Ebenso wie zuvor ist auch die Bruchfläche auf 2 wieder positiv.

Krystall Nr. IV. Dunkelgrüner Flussspath von Weardale.

Der Krystall Nr. IV glich in Farbe und Beschaffenheit den beiden vorhergehenden, und bestand vorzugsweise aus einem einzigen Individuum. Glatt ausgebildet war nur der vorhandene Theil der Fläche 1 (Fig. 4); auf den Flächen 3, 4 und 5 hatten sich kleinere Würfel ein- oder aufgelegt. Die Fläche 6 war nur zum kleinsten Theile vorhanden, und an Stelle der Fläche 2 bildete eine unregelmässige Bruchfläche die Begrenzung.

Aus den in die Zeichnung eingetragenen Beobachtungen ergibt sich ebenfalls wieder die im Allgemeinen positive Beschaffenheit der Ecken und der Ränder, während in den mittleren Theilen der Flächen negative Polarität auftritt. Ebenso wie zuvor ist auch die Bruchfläche bei 2 wieder positiv. Fig. 4 stellt die Flächen in halber Grösse dar.

Die Einwirkung des farbigen oder sonst modificirten Lichtes.

Da der stets veränderliche Zustand des Himmels und infolge dessen auch des zerstreuten Tageslichtes, wie er in den Tagen des jetzigen Aprils vorhanden war, jede auch nur einigermassen angenäherte Messung der auf den Flussspathkrystall wirkenden Lichtintensitäten absolut unmöglich machte, so habe ich versucht, wenigstens im Allgemeinen einen Ueberblick über die Wirkungen des farbigen oder sonst modificirten Lichtes zu gewinnen.

Der Versuch ergab, dass unter einem mit Kupferoxydul gefärbten rothen Glase die Wirkung des Lichtes fast ganz ausblieb, während sie unter einem sehr dunkelviolett gefärbten Glase hervortrat.

Beim Durchgange des Lichtes durch eine etwa zolldicke Schicht Wasser oder Alaunlösung erleidet die Wirkung desselben in Bezug auf die elektrische Erregung des Flussspathes keine Schwächung, wohl aber eine sehr beträchtliche beim Durchgange

durch eine Lösung von schwefelsaurem Chinin, wobei die sehr schwach gelbliche Färbung dieser letzteren Lösung nicht die Hauptursache dieser beträchtlichen Abnahme in der Einwirkung des Lichtes sein kann.

Es mögen hier zum Beweise des Vorstehenden einige Beobachtungen folgen.

Der Krystall Nr. II wurde mit der Fläche 1 nach oben in den S. 77 beschriebenen Kasten gestellt, und die Oeffnung in der um 45° gegen den Horizont geneigten Vorderwand mit einer parallelepipedischen, eine Lösung von schwefelsaurem Chinin enthaltenden Flasche bedeckt. Der Kürze wegen werde ich im Folgenden nur die in der Mitte der Fläche 1 beobachteten elektrischen Spannungen angeben.

Nachdem die Fläche 1 dieses Krystalles 10 Minuten lang in dem Kasten, dessen geneigte Fläche gegen den Himmel gerichtet war (gegen die Sonne aber im Schatten stand), den durch die Chininlösung gegangenen Lichtstrahlen ausgesetzt worden, zeigte die Mitte derselben eine elektrische Spannung —0,9. Nachdem der Krystall wieder 15 Minuten eben diesen Strahlen ausgesetzt gewesen, —1,5; nach einem weiteren Aussetzen an dieselben Strahlen während 10 Minuten —2,3.

Darauf wurde die die Oeffnung in der geneigten Vorderwand bedeckende Chininlösung durch eine Alaunlösung ersetzt, und nachdem der Krystall 10 Minuten lang dem durch diese Lösung hindurchgegangenen Lichte ausgesetzt gewesen, stieg in der Mitte der Fläche die elektrische Spannung auf —7. Schliesslich wurde die Oeffnung in der zweiten Wand mit einem tief dunkelblauen Kobaltglase anstatt der Alaunlösung bedeckt, und nach 18 Minuten hatte die Spannung in der Mitte der Fläche den Werth —11 erreicht.

Hiernach sind es also vorzugsweise die sogenannten chemischen Strahlen, welche die photoelektrischen Erscheinungen des Flussspathes hervorrufen, und es ist mir sehr wahrscheinlich, dass die Elektricität auf den bestrahlten Flussspathkrystallen gerade den durch das Licht bewirkten chemischen Vorgängen ihre Entstehung verdankt. Nach Wyrouboff besteht der Stoff, welchem die blauvioletten und dunkelgrünen Flussspäthe ihre Färbung verdanken, aus verschiedenen Kohlenwasserstoffverbindungen.

Fig. 1.

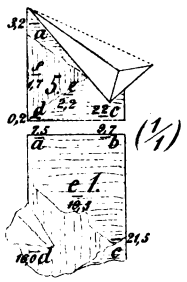


Fig. 2.

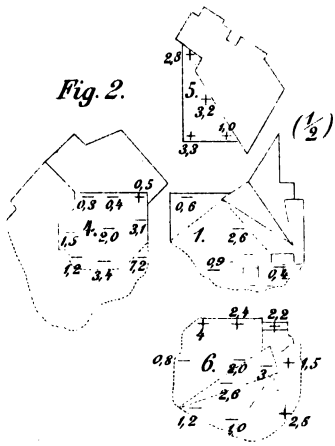


Fig. 3.

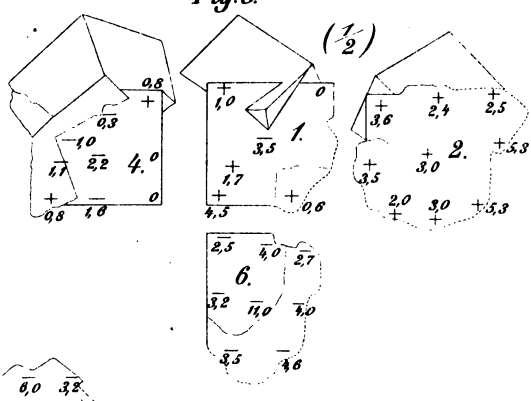


Fig. 5.

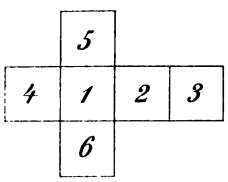
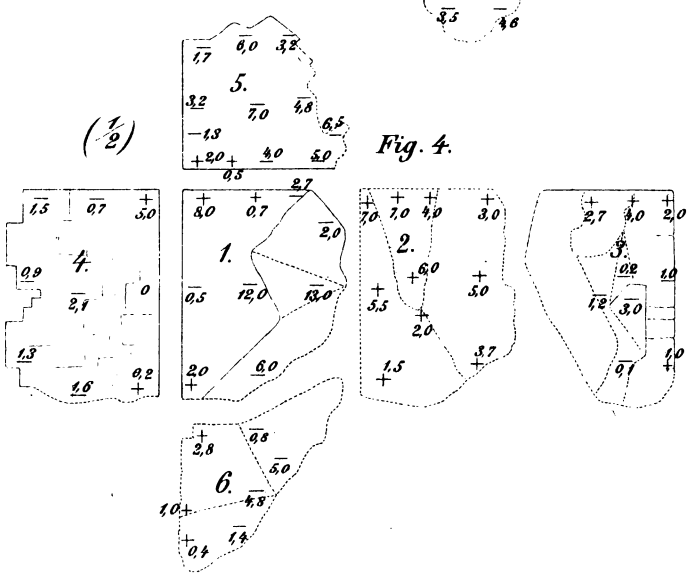


Fig. 4.



An die genauere Untersuchung der photoelektrischen Erscheinungen beim Flussspath wird sich die Beschäftigung mit einer Reihe von Fragen anschliessen, von denen hier nur einige erwähnt werden mögen Zeigen überhaupt fluorescirende Substanzen oder die sogenannten Phosphore (Leuchtsteine) photoelektrische Erscheinungen? Lassen sich auf den durch das Licht zersetzbaren Farbstoffen, soweit sie isoliren, elektrische Spannungen hervorrufen? Dürfen dabei diese Farbstoffe ungeformt sein, oder müssen sie wie bei den Flussspäthen mit krystallinischen Substanzen verbunden werden? Kann man in Fällen, wo die Farbstoffe in Leitern vorkommen, die Lichteinwirkung durch elektrische Ströme nachweisen, z. B. bei dem Chlorophyll in grünen Blättern? So habe ich in den letzten Tagen vergebens auf Sonnenlicht gewartet, um zu untersuchen, ob und welche elektrischen Ströme entstehen, wenn man zwei in Wasser befindliche grüne Blätter mit den Enden des Drahtes eines Galvanometers verbindet, und sodann das eine Blatt den Sonnenstrahlen aussetzt, während man das andere im Schatten oder im Dunkeln erhält.

A. Mayer, *Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte.* [1])

Setzt man:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \,(x'_i{}^2 + y'_i{}^2 + z'_i{}^2)$$

und W gleich einer beliebigen Function von t, von den $3n$ unbekannten Functionen $x_i\, y_i\, z_i$ von t und von deren ersten Differentialquotienten $x'_i\, y'_i\, z'_i$, so führt das Problem:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + W)\, dt = 0$$

auf die $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$m_i x''_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'_i},$$
$$m_i y''_i = \frac{\partial W}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial y'_i},$$
$$m_i z''_i = \frac{\partial W}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial z'_i}.$$

Dieselben Gleichungen sind auch, wenn man $m_1, m_2, \ldots, m_n$ als die Massen von n Punkten und die Variabeln $x_i\, y_i\, z_i$ als die Coordinaten des Punktes m_i in einem festen rechtwinkligen Axensystem zur Zeit t auffasst, die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems materieller Punkte, bei welcher die an dem Punkte m_i wirksamen Kraftcomponenten zur Zeit t die Werthe haben:

$$\text{(I.)} \qquad \begin{cases} X_i = \dfrac{\partial W}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial x'_i}, \\ Y_i = \dfrac{\partial W}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial y'_i}, \\ Z_i = \dfrac{\partial W}{\partial z_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial z'_i}. \end{cases}$$

---

1) Zum Druck übergeben am 23. April 1877.

Kräfte, deren analytische Ausdrücke von dieser Form sind, nenne ich, wie üblich, *Potentialkräfte* und die Function W, durch deren Angabe dieselben vollständig bestimmt sind, ihr *Potential*. Unter *inneren* Kräften des Systems ferner verstehe ich solche, die nur von den gegenseitigen Wirkungen der Punkte des Systems herrühren, und die sich also in jedem Augenblicke an dem System das Gleichgewicht halten würden, wenn in demselben Augenblicke durch Einschaltung starrer Verbindungsgeraden zwischen seinen Punkten das System in einen festen Körper verwandelt worden wäre. Die Aufgabe, mit deren Lösung sich diese Note hauptsächlich beschäftigen wird, ist die, *den möglich allgemeinsten analytischen Ausdruck der inneren Kräfte eines in Bewegung befindlichen Systems materieller Punkte zu finden, wenn man festsetzt, dass diese Kräfte ein Potential besitzen sollen.*

Nach ihrer Definition sind die inneren Kräfte des Systems charakterisirt durch die 6 Bedingungsgleichungen:

$$\text{(II.)} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0 \,, \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0 \,, \sum_{i=1}^{i=n} Z_i = 0 \,;$$

$$\text{(III.)} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \,, \\ \sum_{i=1}^{i=n} (z_i X_i - x_i Z_i) = 0 \,, \\ \sum_{i=1}^{i=n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \,. \end{cases}$$

Analytisch ausgedrückt handelt es sich also um die Frage:

Welches sind die allgemeinsten Werthe der Kräfte $X_i\ Y_i\ Z_i$, die sich aus den Gleichungen (I) ergeben, wenn man verlangt, dass W eine solche, von den Beschleunigungen freie Function der Zeit, der Coordinaten und der Geschwindigkeiten sein soll, welche den sechs, durch Substitution der Werthe (I) in die Gleichungen (II) und (III) entspringenden Bedingungen identisch genügt?

Auf den ersten Anblick könnte es scheinen, als ob diese Aufgabe sich weit einfacher so aussprechen liesse:

Man soll den allgemeinsten Werth des Potentials W finden, welcher den gestellten Forderungen genügt.

Allein, wenngleich die Lösung dieser letzteren Aufgabe eo

ipso auch die der ersten nach sich zieht, so ist doch, in Folge einer bekannten Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung, das zweite Problem nicht vollständig identisch mit dem ursprünglichen, vielmehr dieses weit einfacher als jenes.

Ist nämlich φ irgend welche Function der Zeit und der Coordinaten allein und setzt man:

$$\psi = \frac{d\varphi}{dt},$$

so wird:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x'_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

und folglich:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial x'_i} = 0,$$

welche Formel natürlich auch noch gilt, wenn man darin x mit y, oder mit z vertauscht.

Besitzt daher das Potential W die Form:

$$W = V + \frac{d\varphi}{dt},$$

so hebt sich der Theil $\frac{d\varphi}{dt}$ von selbst aus den Formeln (I) weg und ist daher auf die Werthe X_i Y_i Z_i ohne jeden Einfluss.

Auf Grund dieser, übrigens keineswegs neuen Bemerkung können und werden wir im Folgenden alle diejenigen Glieder des Potentials W, die vollständige Differentialquotienten nach der Zeit sind, als für unsere Frage vollkommen gleichgültig vernachlässigen. Oder mit anderen Worten, wenn wir nach C. Neumann's Vorgange[1]) *effectives Potential* das nennen, was von dem Gesammtpotential W nach Weglassung aller jener Glieder übrig bleibt, wir brauchen nicht das Gesammtpotential, sondern nur das effective Potential zu bestimmen.

Diese Aufgabe nun zerlegen wir in zwei, von einander unabhängige Theile, indem wir die Function W einmal nur den Bedingungen (II), das andere Mal nur den Bedingungen (III) unterwerfen. Aus der Vergleichung der allgemeinsten Werthe des effectiven Potentiales, die sich aus der einen und aus der andern Forderung ziehen lassen, wird sich dann unmittelbar die Beantwortung unserer Frage ergeben, die schliesslich noch mit

1) C. Neumann. Die Principien der Elektrodynamik. Tübingen 1868.

einer anderen und weit einfacheren Aufgabe combinirt werden soll, die aber, soviel ich weiss, ebensowenig als die vorhergehende bisher allgemein behandelt worden ist, mit der Aufgabe nämlich, die allgemeinsten Werthe der Potentialkräfte (1) zu finden, welche die Forderung des Princips der lebendigen Kraft, d. h. die Bedingung erfüllen, dass der Ausdruck:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i x'_i + Y_i y'_i + Z_i z'_i)$$

ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sei. [1])

---

1) Nimmt man die Kräfte X_i Y_i Z_i unabhängig von den Geschwindigkeiten und von den Beschleunigungen an, so zieht bekanntlich die Forderung, dass identisch:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i x'_i + Y_i y'_i + Z_i z'_i) = \frac{dU}{dt}$$

sei, indem sich dieselbe in die Gleichungen auflöst:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

umgekehrt nach sich, dass die Kräfte ein Potential besitzen müssen, oder es kann dann das Princip der lebendigen Kraft niemals gelten ohne das Hamilton'sche Princip. Dies ist aber durchaus nicht mehr der Fall, wenn die Kräfte auch von den Geschwindigkeiten und von den Beschleunigungen abhängig sind. So wird z. B., wenn V irgend eine, von t freie Function von $x\ y\ z\ x'\ y'\ z'$ ist, der Gleichung:

$$Xx' + Yy' + Zz' = \frac{d}{dt}\left(V - x'\frac{\partial V}{\partial x'} - y'\frac{\partial V}{\partial y'} - z'\frac{\partial V}{\partial z'}\right)$$

identisch genügt durch die Substitutionen:

$$X = Cz' - By' + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'},$$

$$Y = Bx' - Az' + \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial y'},$$

$$Z = Ay' - Cx' + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial z'},$$

welche Werthe auch die Functionen $A\ B\ C$ haben mögen. Setzt man aber hierin etwa

$$A = x', \ B = y', \ C = z',$$

so erhält man Formeln, die sich ebensowenig auf die Form:

$$X = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'}, \ldots .$$

bringen lassen, als der Forderung des Princips der lebendigen Kraft genügt werden kann durch solche Kräfte X_i Y_i Z_i, deren analytische Ausdrücke die Geschwindigkeiten, nicht aber zugleich auch die Beschleunigungen enthalten.

Um den Gegenstand einigermaassen vollständig zu behandeln, ist in dem letzten § auch einiges bereits Bekannte von Neuem abgeleitet worden. —

§ 1.

Bestimmung des effectiven Potentials aus den Forderungen (II).

Substituirt man die Werthe (I) in die Bedingungen (II), so erhält man 3 Bedingungsgleichungen für das Potential W, von denen die erste ist:

$$1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial x'_i} \right) = 0$$

und die beiden anderen aus dieser durch Vertauschung von x mit y, resp. z hervorgehen. Es soll sich zunächst darum handeln, das Potential W bis auf die zu vernachlässigenden Glieder in allgemeinster Weise aus der Gleichung 1) zu bestimmen. Ich setze zu dem Ende:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial W}{\partial x'_i} = A$$

und verwandle hierdurch die Gleichung 1) in:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{dA}{dt} .$$

Nach Voraussetzung ist nun W und damit auch die linke Seite der letzten Gleichung frei von den zweiten Differentialquotienten $x''\ y''\ z''$. Die Gleichung kann daher nicht anders identisch stattfinden, als wenn die Function A selbst gar keine Differentialquotienten der $x\ y\ z$ enthält. Aus der Forderung 1) ergeben sich folglich für das Potential W die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen 1. 0.:

$$2) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial W}{\partial x'_i} = A , \\ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{dA}{dt} , \end{cases}$$

in denen A eine willkürliche Function von t und von den Coordinaten ist.

Ist nun $W = U$ irgend eine gemeinsame Lösung dieser beiden Gleichungen und setzt man:

$$W = U + V,$$

so gehen dieselben über in:

3) $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x'_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Wir können also die Gleichungen 2) zurückführen auf die weit einfacheren 3), sobald wir irgend eine gemeinsame Lösung der Gleichungen 2) gefunden haben. Eine solche Lösung ergiebt sich aber sofort aus der Annahme

$$W = \frac{d\varphi}{dt},$$

wo φ eine unbekannte Function der Zeit und der Coordinaten bedeutet. Diese Annahme nämlich liefert:

$$\frac{\partial W}{\partial x'_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

und führt also die Gleichungen 2) über in:

4) $$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = A,$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{dA}{dt}.$$

Von diesen beiden Gleichungen ist aber die zweite eine unmittelbare Folge der ersten. Wenn demnach φ irgend eine Lösung der Gleichung 4) und V die allgemeine Lösung des Systems 3) ist, so ist:

$$W = V + \frac{d\varphi}{dt}$$

die allgemeine Lösung der beiden Gleichungen 2), oder also, nach der vorausgeschickten Bemerkung,

$$W = V$$

der allgemeinste Werth des effectiven Potentiales, der sich aus der Bedingung 1) ergiebt.

Die beiden Gleichungen 3) sagen aber nichts anderes aus, als dass V die Variabeln $x_1 \cdots x_n\, x'_1 \cdots x'_n$ nur in den Verbindungen:

$x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1$; $x'_2 - x'_1, \ldots x'_n - x'_1$ enthalten darf, also ist $W =$ einer willkürlichen Function dieser Differenzen, in der überdies t, die y, z und deren erste Differentialquotienten in beliebiger Weise eingehen können, die allgemeinste Lösung unserer ersten Aufgabe.

Indem nun die beiden anderen Bedingungsgleichungen, die aus (I) und (II) entspringen, sich von der Gleichung 1) nur dadurch unterscheiden, dass darin y, resp. z an die Stelle von x getreten ist, haben wir hiermit den Satz gewonnen:

I. *Die allgemeinsten Ausdrücke der Potentialkräfte (I), welche den Bedingungen (II) identisch genügen, werden erhalten, wenn man das Potential W einer willkürlichen Function der Zeit, der relativen Coordinaten und der relativen Geschwindigkeiten der Punkte des Systems gleich setzt.*

§ 2.

Bestimmung des effectiven Potentials aus den Forderungen (III).

Die Substitution der Formeln (I) in die Gleichungen (III) liefert für das Potential W drei Bedingungsgleichungen, von denen die erste

$$1) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ y_i \left(\frac{\partial W}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial z'_i} \right) - z_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial y'_i} \right) \right\} = 0$$

ist und die beiden anderen aus dieser erhalten werden, wenn man die Buchstaben y, z mit den Buchstaben z, x, resp. x, y vertauscht.

Wir betrachten zunächst wieder nur die Bedingung 1).

Addiren wir zu derselben die Identität:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ y'_i \frac{\partial W}{\partial z'_i} + y_i \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial z'_i} - z'_i \frac{\partial W}{\partial y'_i} - z_i \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial y'_i} \right\} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial W}{\partial z'_i} - z_i \frac{\partial W}{\partial y'_i} \right),$$

so verwandelt sie sich in:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ y_i \frac{\partial W}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial W}{\partial y_i} + y'_i \frac{\partial W}{\partial z'_i} - z'_i \frac{\partial W}{\partial y'_i} \right\} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial W}{\partial z'_i} - z_i \frac{\partial W}{\partial y'_i} \right)$$

und lässt sich demnach in die beiden folgenden zerfällen:

$$2)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial W}{\partial z'_i} - z_i \frac{\partial W}{\partial y'_i} \right) = M , \\ \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial W}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial W}{\partial y_i} + y'_i \frac{\partial W}{\partial z'_i} - z'_i \frac{\partial W}{\partial y'_i} \right) = \frac{dM}{dt} . \end{cases}$$

Die zweite dieser Bedingungen lehrt, dass M nur eine Function von t und von den Coordinaten sein kann. Setzen wir weiter:

$$W = \frac{d\psi}{dt} ,$$

wo ψ eine ebensolche Function bedeutet, so verwandeln sich hierdurch die Gleichungen 2) in:

$$3)\quad \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial \psi}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right) = M ,$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial \psi}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right) = \frac{dM}{dt} .$$

Also erfüllt die Substitution $W = \frac{d\psi}{dt}$ die beiden Gleichungen 2), sobald ψ eine Lösung der Gleichung 3) ist. Unter dieser Voraussetzung werden aber durch die Annahme:

$$W = V + \frac{d\psi}{dt}$$

die beiden Gleichungen 2) übergeführt in die folgenden:

$$4)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial V}{\partial z'_i} - z_i \frac{\partial V}{\partial y'_i} \right) = 0 , \\ \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial V}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial V}{\partial y_i} + y'_i \frac{\partial V}{\partial z'_i} - z'_i \frac{\partial V}{\partial y'_i} \right) = 0. \end{cases}$$

Zur Bestimmung des effectiven Potentiales kommt es demnach nur darauf an, die allgemeinste gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen 4) zu ermitteln.

Nach dem Vorhergehenden genügt nun die Annahme:

$$V = \frac{d\psi}{dt}$$

gleichzeitig diesen beiden Gleichungen, so oft ψ eine Lösung der Gleichung:

5) $$\sum_{i=1}^{i=n}\left(y_i\frac{\partial\psi}{\partial z_i}-z_i\frac{\partial\psi}{\partial y_i}\right)=0$$

ist. Diese Gleichung aber ist äquivalent dem System von $2n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$dz_i : dy_h = y_i : -z_h ,$$

dessen $2n-1$ Integrale sind:

6) $$\begin{cases} 2u_i = y_i^2 + z_i^2 = \text{const.} \\ u_{hk} = y_h y_k + z_h z_k = \text{const.} \end{cases}$$

wo $i = 1, 2, \ldots n$, k eine gegebene dieser Zahlen und $h = 1, \ldots k-1, k+1, \ldots n$ ist. Folglich sind die $2n-1$ Ausdrücke:

7) $$\begin{cases} u'_i = y_i y'_i + z_i z'_i \\ u'_{hk} = y'_h y_k + y_h y'_k + z'_h z_k + z_h z'_k \end{cases}$$

gemeinsame Lösungen der beiden Gleichungen 4). Man reducirt diese beiden Gleichungen aber auch dadurch auf die eine Gleichung 5), dass man V einer von den y', z' freien Function ψ direkt gleichsetzt. Also sind auch die $2n-1$ Ausdrücke 6) selbst gemeinsame Lösungen der Gleichungen 4). Diese beiden Gleichungen können überdies nicht mehr als $4n-2$ in Bezug auf die Variabeln y, z, y', z' von einander unabhängige Lösungen gemein haben, und dieser Bedingung genügen die $4n-2$ Ausdrücke 6) und 7). Die allgemeine Lösung V der beiden Gleichungen 4) hat folglich die Form:

8) $$V = F(u_i, u_{hk}, u'_i, u'_{hk}, t, x_h, x'_h),$$

wo F eine willkürliche Function bezeichnet und von den verschiedenen Argumenten, die diese willkürliche Function ausser t enthalten kann, immer nur je ein Repräsentant angegeben ist; und nach dem Vorhergehenden ist dies zugleich der allgemeinste Werth des effectiven Potentials, der sich aus der Bedingung 1) ziehen lässt.

Die zweite Bedingungsgleichung nun, die aus den Forderungen (III) für das Potential W entspringt, unterscheidet sich von 1) nur dadurch, dass z, x die Stellen von y, z eingenommen haben. Die allgemeinste Lösung dieser zweiten Gleichung, die in Betracht kommen kann, ist folglich:

$$W = \Phi(v_i, v_{hk}, v'_i, v'_{hk}, t, y_h, y'_h) ,$$

wo Φ eine willkürliche Function und:

$$\begin{aligned} 2v_i &= z_i^2 + x_i^2 , \\ v_{hk} &= z_h z_k + x_h x_k , \\ v'_i &= z_i z'_i + x_i x'_i , \\ v'_{hk} &= z'_h z_k + z_h z'_k + x'_h x_k + x_h x'_k \end{aligned}$$

ist. Vergleicht man aber diese Function mit den Formeln 6), 7), 8), so erkennt man sofort, dass der allgemeinste Werth des effectiven Potentials W, der gleichzeitig den beiden ersten Bedingungen (III) genügt, von der Form ist:

$$9) \qquad W = \Psi(p_i , p_{hk} , p'_i , p'_{hk} , t) ,$$

wo Ψ eine willkürliche Function und:

$$10) \quad \begin{cases} 2p_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ p_{hk} = x_h x_k + y_h y_k + z_h z_k \\ p'_i = x_i x'_i + y_i y'_i + z_i z'_i \\ p'_{hk} = x'_h x_k + x_h x'_k + y'_h y_k + y_h y'_k + z'_h z_k + z_h z'_k \end{cases}$$

ist, und da diese Argumente ungeändert bleiben, wenn man die Buchstaben $x\ y\ z$ mit einander vertauscht, so erhellt zugleich, dass dieser Werth von W schon von selbst der dritten Bedingung genügt, die sich aus den Forderungen (III) für diese Function ergiebt.

Die letztere Bemerkung zeigt, dass von Potentialkräften stets derjenige Satz gilt, der für die Bewegung eines Systems materieller Punkte unter dem Einflusse eines von den Geschwindigkeiten unabhängigen Potentiales sich so aussprechen lässt, dass niemals zwei von den 3 Flächensätzen gelten können, ohne den dritten, der Satz nämlich, dass, wenn Kräfte von der analytischen Form (I) zwei von den drei Bedingungen (III) erfüllen, sie nothwendig immer auch der dritten genügen.[1])

---

1) Dieser Satz ergiebt sich auch ohne jede Integration auf folgende Weise:

Für das effective Potential $W = V$ reducirt sich die Bedingung 4) auf die beiden Gleichungen 4). Bezeichnet man also die linken Seiten dieser beiden Gleichungen durch $X_1(V)$ und $X_2(V)$ und versteht unter $Y_1(V)$ und $Y_2(V)$, resp. $Z_1(V)$ und $Z_2(V)$ diejenigen Ausdrücke, die aus $X_1(V)$ und $X_2(V)$ durch Vertauschung der Buchstaben y, z mit den Buchstaben z, x, resp. x, y entstehen, so ergeben die Forderungen (III) für das effective Potential V der Reihe nach die Bedingungen

$$\begin{aligned} X_1(V) &= 0 \text{ und } X_2(V) = 0 , \\ Y_1(V) &= 0 \ \text{»} \ Y_2(V) = 0 , \\ Z_1(V) &= 0 \ \text{»} \ Z_2(V) = 0 . \end{aligned}$$

Es ist aber identisch:

Setzen wir endlich:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$
$$r^2_{hk} = (x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + z_h - z_k)^2,$$

so folgt aus 10) und durch Differentiation nach t:

$$\begin{aligned} r^2_i &= 2p_i\,, \\ r^2_{hk} &= 2p_h + 2p_k - 2p_{hk}\,, \\ r_i r'_i &= p'_i\,, \\ r_{hk} r'_{hk} &= p'_h + p'_k - p'_{hk}\,. \end{aligned}$$

Also können wir die Formel 9) auch ersetzen durch die:

$$W = F(r_i\,,\ r'_i\,,\ r_{hk}\,,\ r'_{hk}\,,\ t)\,,$$

womit der Satz gewonnen ist:

II. *Die allgemeinsten Ausdrücke der Potentialkräfte (I) welche die Forderungen (III) erfüllen, entstehen dadurch, dass man für W eine willkürliche Function von der Zeit, von den Entfernungen der Punkte des Systems vom Coordinatenanfange, von ihren gegenseitigen Entfernungen und von den ersten Differentialquotienten dieser beiden Arten von Entfernungen nach der Zeit substituirt.*

§ 3.

Das Princip der lebendigen Kraft.

Aus der Forderung. dass die Summe:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i x'_i + Y_i y'_i + Z_i z'_i)$$

ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sein soll, ergiebt sich, wenn man diesen Differentialquotienten mit $\frac{dU}{dt}$ bezeichnet und für die Kräfte $X_i\ Y_i\ Z_i$ ihre Werthe (I) einsetzt, die Bedingung:

$$1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ x'_i \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial x'_i} \right) + y'_i \left(\frac{\partial W}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial y'_i} \right) + z'_i \left(\frac{\partial W}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial z'_i} \right) \right\} = \frac{dU}{dt}\,.$$

$$Y_1(X_1(V)) - X_1(Y_1(V)) = Z_1(V)\,,$$
$$Y_1(X_2(V)) - X_2(Y_1(V)) = Z_2(V)\,.$$

Jede gemeinsame Lösung V der 4 Gleichungen:

$$X_1(V) = 0\,,\ X_2(V) = 0\,,$$
$$Y_1(V) = 0\,,\ Y_2(V) = 0$$

genügt daher immer gleichzeitig auch den beiden Gleichungen:

$$Z_1(V) = 0\,,\ Z_2(V) = 0\,.$$

Indem man hierzu die Identität:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left\{x''_i\frac{\partial W}{\partial x'_i}+x'_i\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial x'_i}+\cdots\right\}-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n}\left\{x'_i\frac{\partial W}{\partial x'_i}+\cdots\right\}=0$$

addirt, verwandelt man diese Bedingung in die folgende:

$$2)\qquad \frac{d}{dt}\left\{W-\sum_{i=1}^{i=n}\left(x'_i\frac{\partial W}{\partial x'_i}+y'_i\frac{\partial W}{\partial y'_i}+z'_i\frac{\partial W}{\partial z'_i}\right)\right\}-\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{dU}{dt}$$

Damit dieselbe identisch stattfinde, ist also nothwendig und hinreichend, dass der partielle Differentialquotient $\frac{\partial W}{\partial t}$ ein vollständiger Differentialquotient nach der Zeit sei. Nun enthält das Potential W nur die ersten Differentialquotienten der Coordinaten und wir können daher diejenige Function, von der $\frac{\partial W}{\partial t}$ der vollständige Differentialquotient sein soll, immer auffassen als den partiellen Differentialquotienten einer nur von der Zeit und den Coordinaten abhängigen Function φ nach t. Die Formel:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

ergiebt aber:

$$W=\frac{d\varphi}{dt}+V,$$

wo V frei von t und eine blosse Function der $x\,y\,z\,x'\,y'\,z'$ ist. Das effective Potential V darf also die Zeit nicht enthalten, d. h.

III. *Man erhält die allgemeinsten Ausdrücke der Potentialkräfte (I), welche der Forderung des Princips der lebendigen Kraft genügen, wenn man das Potential W frei von der Zeit t annimmt.*

§ 4.

Zusammenfassung der erhaltenen Resultate und Folgerungen.

Combiniren wir nunmehr die erhaltenen drei Sätze, so ergiebt sich das folgende Resultat:

IV. *Die allgemeinsten analytischen Ausdrücke solcher inneren Potentialkräfte eines bewegten Systems materieller Punkte, welche*

der Forderung des Princips der lebendigen Kraft genügen, werden erhalten aus den Formeln (I), wenn man darin für das Potential W eine willkürliche Function der gegenseitigen Entfernungen der Punkte des Systems und der ersten Differentialquotienten dieser Entfernungen setzt.

Lässt man, um die Antwort auf unsere ursprüngliche Frage zu erhalten, die Forderung des Princips der lebendigen Kraft fallen, so darf das Potential W überdies noch in beliebiger Weise die Zeit selbst enthalten.

Unterwerfen wir ferner das bisher freie System den Bedingungen:

1) $$\varphi_1 = 0\ ,\ \varphi_2 = 0\ ,\ \cdots\ ,$$

in denen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ gegebene Functionen von t und von den Coordinaten der Punkte des Systems sind, so werden die Differentialgleichungen seiner Bewegung jetzt:

2) $$\begin{cases} m_i x''_i = X_i + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \cdots \\ m_i y''_i = Y_i + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i} + \cdots \\ m_i z''_i = Z_i + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_i} + \cdots \end{cases}$$

Aus diesen und den Gleichungen 1) ergiebt sich:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i x'_i + Y_i y'_i + Z_i z'_i) - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \cdots ,$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i x'_i = \sum_{i=1}^{i=n} X_i + \lambda_1 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \cdots ,$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (y_i z'_i - z_i y'_i) = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i Y_i) + \lambda_1 \sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} \right) + \cdots .$$

Aus diesen letzteren Gleichungen verschwinden aber die in die λ multiplicirten Glieder vollständig, wenn man jede der Functionen φ den Bedingungen unterwirft:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\ ,\ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(y_i \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) = 0\ ,$$

und man erhält daher unter dieser Voraussetzung und, wenn man überdies den Kräften $X_i\ Y_i\ Z_i$ die aus dem Satze IV folgenden Werthe beilegt, ganz so, als ob das System frei wäre, die folgenden Integrale der Bewegungsgleichungen:

$$T - W + \sum_{i=1}^{i=n} \left(x'_i \frac{\partial W}{\partial x'_i} + y'_i \frac{\partial W}{\partial y'_i} + z'_i \frac{\partial W}{\partial z'_i} \right) = \text{const.}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x'_i = \text{const.}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i (y_i z'_i - z_i y'_i) = \text{const.}$$

Woraus sich nach dem Vorhergehenden der Satz ergiebt:

V. *Wird ein System materieller Punkte lediglich von solchen Kräften sollicitirt, deren analytische Ausdrücke aus den Formeln (I) hervorgehen, wenn man darin für W eine blosse Function der gegenseitigen Entfernungen r_{hk} der Punkte des Systems und der ersten Differentialquotienten r'_{hk} dieser Entfernungen nach der Zeit setzt, so gehorcht die Bewegung des Systems, und zwar gleichgültig, ob dasselbe frei oder aber dem Zwange solcher Bedingungen unterworfen ist, in denen nur jene gegenseitigen Entfernungen eine Rolle spielen, stets dem Principe der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, dem Principe der Erhaltung der Flächenräume und dem Principe der lebendigen Kraft, welches die Form:*

$$T - W + \sum_{hk} \frac{\partial W}{\partial r'_{hk}} r'_{hk} = \text{const.}$$

annimmt.

Lassen wir endlich das System sich auf zwei Punkte m_1 und m_2 reduciren und nennen r ihre Entfernung, so ergeben sich bei Zugrundelegung des Satzes IV für die Componenten der zwischen beiden Punkten thätigen Kraft die Werthe:

$$X_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial x'_1}, \cdots,$$

in denen W eine blosse Function von r und r' ist. Diese Werthe stellen sich nach Ausführung der Differentiationen also dar:

$$X_1 = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial x_1} - \frac{\partial r'}{\partial x'_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial r'} - \frac{\partial W}{\partial r'} \frac{d}{dt} \frac{\partial r'}{\partial x'_1}, \cdots$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial r'}{\partial x'_1} = \frac{\partial r}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial r'}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{\partial x_1},$$

also reduciren sich dieselben [1]) auf:

$$X_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'}\right)\frac{\partial r}{\partial x_1}, \ldots$$

und wir erhalten somit den Satz:

VI. *Setzt man als Axiom fest, dass die zwischen zwei Punkten während ihrer Bewegung stattfindende Wechselwirkung ein Potential besitzen und der Forderung des Princips der lebendigen Kraft genügen muss, so folgt, dass diese Wechselwirkung in einer, zwischen den beiden Punkten in Richtung ihrer Verbindungslinie thätigen Kraft R besteht, deren analytischer Ausdruck die Form hat:*

$$R = \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r'},$$

oder, was dasselbe ist,

$$R = \frac{1}{r'}\frac{d}{dt}\left(W - r'\frac{\partial W}{\partial r'}\right),$$

wo W eine blosse Function der Entfernung r beider Punkte und ihres Differentialquotienten r' ist.

---

1) Vgl. C. Neumann a. a. O. p. 27.

Berichtigung.

P. 89 Z. 5 v. u. ist »nicht« statt »ebensowenig« zu setzen und dafür der Schlusssatz »als der Forderung . . . . enthalten« wegzulassen.

SITZUNG VOM 4. JUNI 1877.

O. Schlömilch, *Ueber einige unendliche Reihen.* [1])

Wenn die Werthe zweier Integrale von den Formen

$$1) \qquad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos nt\,dt,$$

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin nt\,dt$$

bekannt sind, so lassen sich die verallgemeinerten Fourier'schen Sätze [2])

$$2) \qquad \tfrac{1}{2}A_0 + \Sigma A_n \cos nx = f(x) + \Sigma f(2n\pi - x) + \Sigma f(2n\pi + x),$$

$$3) \qquad \Sigma B_n \sin nx = f(x) - \Sigma f(2n\pi - x) + \Sigma f(2n\pi + x),$$

$$0 < x < 2\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

als Transformationen auffassen, durch welche zwei periodische Reihen in andere, meistens nicht periodische Reihen umgesetzt werden. Für die Gleichung 2) bietet die Annahme $f(t) = e^{-at^2}$ ein bekanntes Beispiel; für die Gleichung 3) mag hier ein neues folgen, welches zu mehreren bemerkenswerthen Resultaten führt.

Aus der schon mehrfach bewiesenen Integralformel [3])

1) Zum Druck übergeben am 4 Juni 1877.

2) M. s. des Verf. Compendium der höheren Analysis, Bd. II, S. 151.

3) Ebendas. Bd. I, § 93, Formel 7.

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda\vartheta}{e^{2\pi\vartheta}-1}\,d\vartheta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^\lambda-1} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

erhält man zunächst

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{2\pi\vartheta}-1} - \frac{1}{2\pi\vartheta}\right)\sin\lambda\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^\lambda-1} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

und allgemeiner für $\lambda = 2n\pi\varrho$, $\vartheta = \frac{t}{2\pi\varrho}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{\frac{t}{\varrho}}-1} - \frac{\varrho}{t}\right)\sin nt\,dt = 2\varrho\left(\frac{1}{e^{2n\pi\rho}-1} - \frac{1}{2n\pi\varrho}\right);$$

man hat also

$$f(t) = \frac{1}{e^{\frac{t}{\rho}}-1} - \frac{\varrho}{t}, \qquad B_n = 2\varrho\left(\frac{1}{e^{2n\pi\rho}-1} - \frac{1}{2n\pi\varrho}\right).$$

Die Formel 3) giebt nun, wenn die Summirungen

$$\Sigma\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},$$

$$\frac{1}{x} - \Sigma\frac{1}{2n\pi - x} + \Sigma\frac{1}{2n\pi + x} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x$$

benutzt werden,

4) $$2\varrho\,\Sigma\frac{\sin nx}{e^{2n\pi\rho}-1} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{x}{\rho}}-1} - \Sigma\frac{1}{e^{\frac{2n\pi - x}{\rho}}-1} + \Sigma\frac{1}{e^{\frac{2n\pi + x}{\rho}}-1} - \frac{\varrho}{2}\cot\frac{x}{2}.$$

Die beiden rechter Hand vorkommenden Reihen lassen sich dadurch transformiren, dass man die Entwickelung

$$\frac{\xi}{1-\xi} = \xi + \xi^2 + \xi^3 + \ldots, \qquad \xi^2 < 1$$

sowohl für $\xi = e^{-\frac{2n\pi - x}{\rho}}$ als für $\xi = e^{-\frac{2n\pi + x}{\rho}}$ in Anwendung bringt; es wird dann

$$\Sigma \frac{1}{e^{\frac{2n\pi - x}{\rho}} - 1} - \Sigma \frac{1}{e^{\frac{2n\pi + x}{\rho}} - 1} = \Sigma \frac{e^{\frac{nx}{\rho}} - e^{-\frac{nx}{\rho}}}{e^{\frac{2n\pi}{\rho}} - 1}.$$

Beachtet man noch die identische Gleichung

$$\frac{1}{e^{\frac{x}{\rho}} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2\rho}} + e^{-\frac{x}{2\rho}}}{e^{\frac{x}{2\rho}} - e^{-\frac{x}{2\rho}}} - \frac{1}{2},$$

so hat man

5)
$$\frac{x}{2\pi} + 2\varrho \Sigma \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\rho} - 1}$$

$$= -\frac{\varrho}{2} \cot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{2\rho}} + e^{-\frac{x}{2\rho}}}{e^{\frac{x}{2\rho}} - e^{-\frac{x}{2\rho}}} - \Sigma \frac{e^{\frac{nx}{\rho}} - e^{-\frac{nx}{\rho}}}{e^{\frac{2n\pi}{\rho}} - 1},$$

oder auch wenn man von den Bezeichnungen

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = \operatorname{cshp} u, \qquad \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \operatorname{snhp} u$$

Gebrauch macht, mit $\sqrt{\varrho}$ dividirt und etwas anders ordnet,

6)
$$\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}} + \frac{\sqrt{\varrho}}{2} \cot \frac{x}{2} + 2\sqrt{\varrho} \Sigma \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\rho} - 1}$$

$$= -\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{2\sqrt{\varrho}} \operatorname{cthp} \frac{x}{2\varrho} - \frac{2}{\sqrt{\varrho}} \Sigma \frac{\operatorname{snhp} \frac{nx}{\rho}}{e^{\frac{2n\pi}{\rho}} - 1}.$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung mit $\Phi(z, \varrho)$, so liegt in der vorstehenden Gleichung der Satz

$$\Phi(iz, \varrho) = -i\Phi\left(\frac{z}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right).$$

Durch Differentiationen oder Integrationen in Beziehung auf x oder ϱ lassen sich aus No. 6) weitere Resultate ähnlicher Art ableiten, von denen einige Platz finden mögen. Wird die Gleichung 6) nach x differenzirt und dann mit $\pi\sqrt{\varrho}$ multiplicirt, so entsteht

$$7)\qquad \frac{1}{4} - \frac{\pi\varrho}{4\sin^2\frac{x}{2}} + 2\pi\varrho\sum' \frac{n\cos nx}{e^{2n\pi\varrho}-1}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{4\varrho\,\mathrm{snhp}^2\frac{x}{2\varrho}} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum' \frac{n\,\mathrm{cshp}\frac{nx}{\varrho}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}}-1}$$

d. i. wenn die linke Seite mit $\Psi(x, \varrho)$ bezeichnet wird,

$$\Psi(iz, \varrho) = -\Psi\left(\frac{z}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right).$$

Nicht ohne Interesse ist der Fall $x = o$, für welchen periodische, nach Cosinus fortschreitende Reihen gültig bleiben. Die Differenz

$$\frac{\varrho}{4\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{4\varrho\,\mathrm{snhp}^2\frac{x}{2\varrho}}$$

geht dann in $\frac{1}{12}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)$ über und es wird

$$8)\qquad \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho\sum' \frac{n}{e^{2n\pi\varrho}-1}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum' \frac{n}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}}-1},$$

wonach der Function

$$\Psi(\varrho) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + \sum' \frac{2n\pi\varrho}{e^{2n\pi\varrho}-1}$$

die Eigenschaft

$$\Psi(\varrho) + \Psi\left(\frac{1}{\varrho}\right) = o$$

zukommt. Bezeichnet man ferner mit s_n die Summe der Theiler von n, so kann man der Gleichung 8) auch folgende Form ertheilen

$$9)\qquad \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho\sum' s_n e^{-2n\pi\varrho}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho}\sum' s_n e^{-\frac{2n\pi}{\varrho}}$$

und daraus ergiebt sich für $\varrho = 1$

$$\sum' \frac{n}{e^{2n\pi}-1} = \sum' s_n e^{-2n\pi} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi}\right) = 0{,}00187793.$$

Bei kleinen ϱ convergiren die in No. 8) und 9) linker Hand vorkommenden Reihen sehr langsam, die rechts verzeichneten Reihen dagegen so rapid, dass jene Gleichungen als Summenformeln benutzt werden können.

Multiplicirt man die Gleichung 8) mit $-\frac{d\varrho}{\varrho}$ und integrirt von $\varrho = \varrho$ bis $\varrho = 1$, so erhält man

10)
$$\frac{\pi}{12}\varrho - \frac{1}{4} l\varrho - \sum' l\left(1 - e^{-2n\pi\varrho}\right)$$
$$= \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{4} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \sum' l\left(1 - e^{-\frac{2n\pi}{\varrho}}\right)$$

oder, entsprechend der Gleichung

11)
$$\frac{\pi}{12}\varrho - \frac{1}{4} l\varrho + \sum' \frac{1}{n} s_n e^{-2n\pi\varrho}$$
$$= \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{4} l\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \sum' \frac{1}{n} s_n e^{-\frac{2n\pi}{\varrho}}.$$

Schliesslich möge noch bemerkt sein, dass sich manche dieser Resultate mittelst der Theorie der elliptischen Functionen verificiren lassen. So ist z. B. wenn die Jacobi'sche Bezeichnung

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

angewendet wird, nach den Formeln auf S. 136 und 137 der Fundam. n. theor. funct. ellipt.

$$\sum' \frac{n q^{2n}}{1 - q^{2n}} = \frac{1}{24\pi^2}\left\{\pi^2 + 4(2 - x^2)K^2 - 12KE\right\};$$

lässt man hier x' an die Stelle von x treten und eliminirt aus beiden Gleichungen x^2, so fallen zufolge der Relation $KE' + K'E - KK' = \frac{1}{2}\pi$ alle elliptischen Integrale heraus und die übrig bleibende Gleichung geht für $\frac{K'}{K} = \varrho$ in die Formel 8) über.

O. Schlömilch, *Ueber die Summen von Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen.*[1])

Nachdem ich bereits im Jahre 1849 den Zusammenhang zwischen der Function

$$1) \qquad \psi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \frac{1}{7^\mu} + \ldots, \quad 0 < \mu < 1$$

und der complementären Function $\psi(1-\mu)$ nachgewiesen hatte,[2]) lag die Vermuthung nahe, dass zwischen den Functionen

$$2) \qquad \varphi(\mu) = \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \frac{1}{4^\mu} + \ldots$$

und $\varphi(1-\mu)$ eine ähnliche Relation bestehen würde. Auf dem früheren Wege liess sich letztere nicht entdecken, dagegen ergiebt sie sich sehr leicht, wenn man das Integral

$$3) \qquad U = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}} \right\} x^{\mu-1} dx, \quad \mu > 0$$

auf zwei verschiedene Weisen entwickelt.

Ersetzt man zunächst x durch $2x$, so hat man

$$2^{1-\mu} U = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2x} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} \right\} x^{\mu-1} dx$$

mithin durch Subtraction

$$(2^{1-\mu} - 1) U = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{e^x - e^{-x}} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} \right\} x^{\mu-1} dx.$$

---

1) Zum Druck übergeben am 2. Juli 1877.

2) Archiv d. Mathem. u. Phys., Bd. XII und Bd. XXX, wo Clausen einen Beweis der mitgetheilten Relation liefert, ferner Zeitschr. f. Mathem. u. Phys., Bd. III, S. 130.

Es ist nun weiter

$$\frac{1}{e^x - e^{-x}} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} - \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$= e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} - \ldots - (e^{-2x} - e^{-4x} + e^{-6x} - \ldots)$$

mithin durch Substitution in die vorige Gleichung und nach Ausführung der Integrationen

$$(2^{1-\mu} - 1)\, U = \Gamma(\mu) \left(\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \ldots\right)$$

$$- \Gamma(\mu) \left(\frac{1}{2^\mu} - \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{6^\mu} - \ldots\right)$$

oder zufolge der Bedeutung von $\varphi(\mu)$

4) $$U = \frac{1}{2^{1-\mu} - 1} \left(1 - \frac{1}{2^\mu}\right) \Gamma(\mu)\, \varphi(\mu).$$

Eine andere, nicht für alle positiven μ geltende Entwickelung von U entsteht dadurch, dass man in No. 3) von der bekannten Gleichung

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \frac{x}{\pi^2 + x^2} - \frac{x}{(2\pi)^2 + x^2} + \frac{x}{(3\pi)^2 + x^2} - \ldots$$

Gebrauch macht und die einzelnen Integralwerthe nach der Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^\mu\, dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2}\mu\pi} \cdot \frac{1}{a^{1-\mu}}, \quad -1 < \mu < +1$$

bestimmt; diess giebt

$$U = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2}\mu\pi} \left\{\frac{1}{\pi^{1-\mu}} - \frac{1}{(2\pi)^{1-\mu}} + \frac{1}{(3\pi)^{1-\mu}} - \ldots\right\}$$

$$= \frac{\pi^\mu}{2 \cos \frac{1}{2}\mu\pi}\, \varphi(1 - \mu).$$

Die Vergleichung dieses und des unter No. 4) verzeichneten Werthes von U führt nun zu der Relation

5) $$\frac{\varphi(1-\mu)}{\varphi(\mu)} = \frac{2^\mu - 1}{2^{1-\mu} - 1} \cdot \frac{2\,\Gamma(\mu) \cos \frac{1}{2}\mu\pi}{(2\pi)^\mu}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Symmetrischer gestaltet sich dieselbe, wenn man die Function $F(\mu)$ durch folgende Gleichung definirt

$$6)\quad F(\mu) = (2^\mu - 1)\left(\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \ldots\right)\sqrt{\frac{\Gamma(\mu)}{(2\pi)^\mu \sin\frac{1}{2}\mu\pi}};$$

es ist dann

$$7)\qquad F(1-\mu) = F(\mu).$$

Mittelst eines ganz analogen Verfahrens gelangt man auch rasch zu der anfangs erwähnten Relation zwischen $\psi(\mu)$ und $\psi(1-\mu)$. Wird nämlich in dem Integrale

$$V = \int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, x^{\mu-1}\, dx$$

die Entwickelung

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5x} - \ldots\ldots$$

benutzt, so ergiebt sich für jedes $\mu > 0$

$$V = \Gamma(\mu)\,\psi(\mu);$$

durch Anwendung der Formel

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + x^2} - \frac{3}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + x^2} + \frac{5}{(\frac{5}{2}\pi)^2 + x^2} - \ldots\right\}$$

wird dagegen unter der Voraussetzung $0 < \mu < 1$

$$V = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\mu \frac{\psi(1-\mu)}{\sin\frac{1}{2}\mu\pi}$$

mithin durch Vergleichung beider Werthe von V

$$8)\qquad \frac{\psi(1-\mu)}{\psi(\mu)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^\mu \Gamma(\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi, \quad 0 < \mu < 1.$$

Um auch hier eine symmetrische Form herbeizuführen möge die Function $f(\mu)$ durch die Gleichung

$$9)\quad f(\mu) = \left(\frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \ldots\right)\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^\mu \Gamma(\mu)\sin\tfrac{1}{2}\mu\pi}$$

definirt werden; die Relation

10) $$f(1-\mu) = f(\mu)$$

gilt dann für die Function f wie früher für F.

Aus den Gleichungen 5) und 8) kann man durch Differentiation nach μ weitere Relationen ableiten, die jedoch von wenig Bedeutung sein dürften.

W. Knop, *Einige neue Resultate der Untersuchung über die Ernährung der Pflanze.*[1])

Die Salzmischung, welche ich bei Vegetationsversuchen am häufigsten zur Ernährung der Pflanzen angewandt habe, besteht aus 4 Gew. Theilen salpetersauren Kalk, 1 Th. Kalisalpeter, 1 Th. saurem phosphorsauren Kali und 1 oder auch 2 Th. krystallisirtem Bittersalz.

In den Lösungen dieser Salze, welche je nach der Natur der Pflanze 0,5 bis 5,0 pro Mille, gewöhnlich 1 bis 2 pro Mille, Concentration haben, vertheilt man noch ein geringes Quantum, bis etwa 1 Centigramm, phosphorsaures Eisenoxyd auf 1 Liter Flüssigkeit.

Bei quantitativen Untersuchungen ist es nicht selten gerathen, die einzelnen Salze nach Aequivalenten mit einander in die Lösungen zu bringen. Den angegebenen Zahlen kommen nun die nach folgender Formel:

$$5\,(N_2\,C_a\,O_6) + 2\,(NKO_3) + 2\,(PKH_2\,O_4) + 2(S\,Mg\,O_4 + 7\,H_2O)$$

berechneten ganz nahe, wenn man sie halbirt, so wie die ältere Schreibweise derselben:

$$5\,(Ca\,O,\,NO_5) + KO,\,NO_5 + KO,\,2\,HO,\,PO_5 + MgO\;\;SO_3 + 7\,HO$$

sie ohne weiteres angiebt. Die darnach berechneten Proportionen geben nämlich in Grammen ausgedrückt:

---

1) Vorgetragen in der Sitzung vom 4. Juni 1877, zum Druck übergeben am 2. Juli 1877.

Salzmischung *A*.	In halben Aeq.	Wasserfrei berechnet, Gramm:
5. $(N_2 Ca O_6)$	410	$410 = 140\,CaO + 270\,N_2O_5$
2. (NKO_3)	101	$101 = 47\,K_2O + 54\,N_2O_5$
2. (PKH_2O_4)	136	$118 = 47\,K_2O + 71\,P_2O_5$
2. $(SMgO_4 + 7\,H_2O)$	246	$120 = 40\,MgO + 80\,SO_3$
	749	2474 Basen 475 Säuren

Statt der oben angegebenen Verhältnisse 4 : 1 : 1 : 1 erhält man nach dieser Vorschrift für die wasserfrei berechneten Salze die äquivalenten Proportionen: 4,10 : 1,01 : 1,18 : 1,20.

Diese Salzmischung bringt bei Bereitung der Lösungen, mit welchen Pflanzen ernährt werden sollen, mehrere Uebelstände mit sich. Das Bittersalz setzt sich mit einem Theil des salpetersauren Kalks um und erzeugt ein Quantum Gyps, das nur durch eine grosse Menge Wasser in Lösung erhalten werden kann. Concentrirte Lösungen kann man wegen der Schwerlöslichkeit des Gypses gar nicht herstellen und da auch das Kalksuperphosphat, welches durch Einwirkung des sauren phosphorsauren Kalis auf einen anderen Theil des salpetersauren Kalks entsteht, in den concentrirten Lösungen der übrigen Salze nicht sehr löslich ist, so sieht man sich bei Vegetationsversuchen grösseren Umfangs genöthigt, die einzelnen Salze für sich zu lösen, so dass man 4 concentrirte Normallösungen erhält, welche beim Beginn des Versuchs in den erforderlichen Quantitäten mit Wasser verdünnt und gemischt werden.

Noch andere Uebelstände entspringen aus der geringen Löslichkeit des phosphorsauren Eisenoxyds in den verdünnten Lösungen des Salzgemisches. Ein ganzes Liter von 1 bis 2 Concentration pro Mille löst noch nicht 1 Milligramm desselben. In solchen eisenarmen Flüssigkeiten cultivirte Pflanzen werden leicht gelbsüchtig. Ich habe bereits früher angegeben, dass man dieser Krankheit dadurch begegnen kann, dass man das Eisensalz täglich mindestens einmal in der Flüssigkeit aufrührt, so dass es beim Absetzen auf die Wurzeln fällt und an deren Oberflächen haften bleibt. Die Pflege einer grösseren Anzahl Pflanzen wird aber mühsam durch diese Operation.

In den beiden verflossenen Jahren habe ich mich bemüht, diese Uebelstände zu beseitigen und bin jetzt im Stande anzugeben, wie dieselben vollständig gehoben werden können.

Was zunächst das phosphorsaure Eisenoxyd anbetrifft, so

kann dessen Auflösung durch Zusatz freier Säuren zur Nährstofflösung gesteigert werden. Die Grenze aber, bis zu der man eine Nährstofflösung ansäuern darf, liegt sehr nahe an dem Säuregrade, den die Lösung *A* durch die Anwendung des sauren phosphorsauren Kalis annimmt.

Auf Grund der Versuche, welche ich im Sommer 1859 angestellt hatte, habe ich bereits angegeben, dass ein Gehalt von 0,1 Gramm freier Säure im Liter (die Säure war Phosphorsäure) schädlich wirke.

Ich habe neuerdings weiter über das Verhalten verschiedener freier Säuren, der Salzsäure, Phosphorsäure, Schwefelsäure und Salpetersäure zur Wurzel gearbeitet und finde, dass unter diesen Säuren die Salpetersäure sich am besten zum Ansäuern der Nährstofflösungen eignet, welche nach vorstehender Vorschrift bereitet werden.

Auf das Quantum von 749 Grammen Salz (alle 4 Salze wasserfrei berechnet) kann man 40 Cub. Centim. concentrirte Salpetersäure von 1,40 spec. Gew. anwenden, welches Quantum 17,6 Grammen wasserfreier Salpetersäure entspricht.

Eine in solcher Weise angesäuerte Lösung wurde von sehr empfindlichen Pflanzen (Melonen) ohne Nachtheil aufgesogen, wenn sie im Ganzen 0,5 bis 1 pro Mille Salze enthielt. Gräser, namentlich Mais, Roggen, Hafer, Gerste, Weizen und auch Bohnen und Buchweizen ertrugen sie noch vollständig bei der Concentration von 2 pro Mille Gesammtsalzgehalt.

Löst man in dem angegebenen Quantum Salpetersäure vor dem Zusatz zur Nährstofflösung noch das von 0,5 Grammen Eisen bereitete Quantum phosphorsaures Eisenoxyd $P_2Fe_2O_8 + 4H_2O$, welches 1,348 wasserfreiem Salz oder 0,714 Eisenoxyd und 0,634 Phosphorsäure entspricht, so enthalten die Nährstofflösungen Eisen genug in völlig gelöstem Zustande, und es tritt keine Gelbsucht mehr bei den darin cultivirten Pflanzen ein.

Bemerkenswerther ist das folgende Resultat von Versuchen, die Schwefelsäure durch eine andere Säure des Schwefels zu ersetzen, welche mit keiner Base ein schwer lösliches oder unlösliches Salz giebt.

Dabei habe ich nämlich gefunden, dass die Unterschwefelsäure statt der Schwefelsäure angewandt werden kann. Ich habe unterschwefelsaure Magnesia, das Salz $S_2MgO_6 + 6H_2O$

dargestellt, und dadurch das Bittersalz ersetzt und auf solche Weise völlig klare, sehr concentrirte vollständige Nährstofflösungen bereitet, welche auch den ganzen Bedarf an phosphorsaurem Eisenoxyd enthalten. Es hat sich gezeigt, dass das zum Ansäuern einer solchen Lösung oben vorgeschriebene Quantum Salpetersäure keine Oxydation der Unterschwefelsäure bedingt, so dass eine solche vollständige und concentrirte Nährstofflösung längere Zeit, verschlossen wie frei an der Luft, aufbewahrt werden kann. Diese concentrirte Lösung enthält in 2 Liter destillirtem Wasser:

Salzmischung *B*.	In halben Aeq.	Wasserfrei berechnet, Gramme:
5. $(N_2 Ca O_6)$	410	$410 = 140\ CaO + 270\ N_2O_5$
2. (NKO_3)	101	$101 = 47\ K_2O + 54\ N_2O_5$
2. (PKH_2O_4)	136	$118 = 47\ K_2O + 71\ P_2O_5$
$(S_2MgO_6 + 6H_2O)$	146	$92 = 20\ MgO + 72\ S_2O_5$
10 C.C. Salpeters. v. 1,40 sp. Gew.	18	$= — \quad 18\ N_2O_5$
Phosphat von 0,5 Eisen	—	$1{,}348 = 0{,}714\ Fe_2O_3 + 0{,}634\ P_2O_5$
Wasserfr. Salze		$740{,}348 = 254{,}714$ Basen $+ 485{,}634$ Säuren.

Die vorgeschriebene Menge Salpetersäure ist durch Versuche ermittelt, sie besteht in demjenigen Quantum, das erforderlich ist, um alles Kalksuperphosphat in der concentrirten Lösung flüssig zu erhalten.

In 20 Cubiccentimetern dieser Lösung sind im Ganzen 7,4 Gramme Salze enthalten. Verdünnt man 20 Ccm. derselben auf 4 Liter, so haben letztere die Concentration von 1,85 pro Mille, die in den meisten Fällen zweckmässig und in besonderen Fällen schwächer oder stärker zu nehmen ist.

Fügt man zu den mit Hülfe der Salzmischung *A* bereiteten verdünnten Nährstofflösungen ebenfalls die Lösung von phosphorsaurem Eisenoxyd in freier Salpetersäure in den nach der Vorschrift zu berechnenden Verhältnissen, so unterscheidet sich diese saure Lösung *A* nur durch einen grösseren Gehalt an Magnesia und die Gegenwart von Schwefelsäure an der Stelle der Unterschwefelsäure von der sauren Lösung *B*.

Die besten Resultate habe ich allerdings nur bei Anwendung der nicht besonders angesäuerten Lösung *A* erhalten. Man hat aber in diesen beiden sauren Lösungen alle Mittel, um im weitesten Umfange über die Bedeutung der Mineralbasen und Mineralsäuren bei der Ernährung der Pflanze zu experimentiren.

Denn in der Lösung *B* löst sich, ebenso wie das phosphorsaure Eisen, ein genügendes Quantum aller anderer Phosphate, beispielsweise von phosphorsaurem Mangan, Nickel, Kobalt etc., und indem man statt des Bittersalzes unterschwefelsaure Magnesia anwendet, kann man den Kalk durch jede andere Erde, selbst durch Baryt und Strontian und alle Metalloxyde ersetzen. Solche Versuche über die Vertretbarkeit der zur Pflanzenernährung als geeignet erkannten Basen und Säuren konnte man bisher nur mit Hülfe der sehr unvollkommenen Methode des Umsetzens der Pflanze aus einer Lösung in eine zweite anstellen.

Ich habe gegen Ende Februar dieses Jahres Mais, Weizen, Hafer, Gerste, Roggen, Buchweizen und Bohnen auf Wasser keimen lassen und dieselben nach reichlicher Bewurzelung in der Lösung *B* von 2 pro Mille Concentration fortcultivirt. Sie entwickeln sich alle gesund zu kräftigen sattgrünen Pflanzen.

Zu gleicher Zeit stellte ich andere Exemplare derselben Pflanzen in drei verschiedene Lösungen, in welchen der salpetersaure Kalk vollständig durch äquivalente Mengen salpetersaures Zinkoxyd, salpetersauren Strontian und salpetersauren Baryt ersetzt war. In diesen drei Lösungen starben alle Pflanzen ab, schneller bei directem Auffallen des Sonnenlichtes als bei bedecktem Himmel und im Schatten, immer die mit der Zinklösung ernährten zuerst, dann die in der Barytlösung und zuletzt die in der Strontianlösung stehenden.

Ob die unterschwefelsaure Magnesia ganz ebenso wie das Bittersalz bei der Pflanzenernährung mitwirkt, oder ob dieselbe auf die Entwicklung einzelner Organe, auf Blüthen und Fruchtbildung einen anderen Einfluss ausübt, darüber müssen noch weiter fortzusetzende Versuche entscheiden. Mit einer grösseren quantitativen Untersuchung der Art ist Herr von Sandersleben aus Zwickau jetzt in meinem Laboratorium beschäftigt.

SITZUNG AM 30. JULI 1877.

A. Mayer, *Die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale in den isoperimetrischen Problemen.* [1])

Nach der in den Lehrbüchern angenommenen Theorie ist das isoperimetrische Problem, den relativ grössten oder kleinsten Werth des gegebenen Integrales

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f\,(x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n)\, dx$$

zu finden, wenn nur solche Functionen $y_1 \ldots . y_n$ in Betracht gezogen werden sollen, für welche eine Reihe anderer gegebener Integrale

$$V_\varkappa = \int_{x_0}^{x_1} f_\varkappa\,(x\, y_1 \ldots . y_n\, y'_1 \ldots y'_n)\, dx,\ \varkappa = 1, 2, \ldots m$$

vorgeschriebene Werthe behalten, vollkommen identisch mit der Aufgabe, das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} (f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m)\, dx$$

zu einem absoluten Maximum oder Minimum zu machen, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ unbestimmte Constanten bedeuten, die hinterher so bestimmt werden, dass die Integrale $V_\varkappa$ die gegebenen Werthe annehmen. Dies ist nun allerdings vollkommen richtig, solange es sich lediglich um die Lösung des Problems, d. h. um die Bestimmung der unbekannten Functionen y handelt. Wäre dagegen auch die Frage, ob und innerhalb welcher Grenzen die gefundenen Functionen y ein wirkliches Maximum oder Minimum erzeugen, in beiden Problemen auf dieselbe Art zu beantworten, so würde sich beispielsweise ergeben, dass der Schwerpunkt

---

1) Zum Druck übergeben am 30. Juli 1877.

eines homogenen, an beiden Enden aufgehangenen Fadens nur solange die möglich tiefste Lage einnimmt, als die Entfernung seiner Endpunkte eine gewisse Grenze nicht übersteigt, was offenbar absurd ist. Es ist daher klar, dass die Kriterien des Maximums und Minimums in beiden Problemen unmöglich dieselben sein können. Dies hat für den Fall einer einzigen unbekannten Function y, von der aber beliebig hohe Differentialquotienten in den Integralen auftreten können, schon 1869 der, leider noch in demselben Jahre verstorbene Schwedische Mathematiker *Lundström* in der Abhandlung: »Distinction des maxima et des minima dans un problème isopérimétrique«, Nova acta reg. soc. sc. Upsaliensis Ser. 3. Vol. VII, hervorgehoben und darin zugleich die richtigen Kriterien des Maximums und Minimums für die isoperimetrischen Probleme aufgestellt.

Allein abgesehen davon, dass in Folge ungenauen Ausdrucks und zum Theil auch nicht ganz richtiger Formeln seine Schlüsse nur schwer verständlich sind, dürfte es wohl überhaupt auf dem *Lundström*'schen Wege unmöglich sein, nachzuweisen, dass die als nothwendig erkannten Kriterien zugleich auch hinreichend sind. Meiner Meinung nach kann nämlich dieser letztere, schwierigste Punkt nur dadurch entschieden werden, dass man nach dem Vorgange von *Jacobi* und *Clebsch* die zweite Variation des betreffenden Integrales auf ihre einfachste Form bringt, und gerade solche von der Integration von Differentialgleichungen abhängige Transformationen vermeidet *Lundström* absichtlich als zu complicirt.

Nun habe ich aber in meiner Habilitationsschrift[1]) die Kriterien des Maximums und Minimums für dasjenige allgemeine Problem entwickelt, in welchem, wie *Lagrange*[2]) und *Clebsch*[3]) gezeigt haben, alle Aufgaben der Variationsrechnung, in denen nur eine einzige unabhängige Variable auftritt, enthalten sind. In diesen allgemeinen Kriterien des Maximums und Minimums müssen daher nothwendig auch die besonderen Kriterien der isoperimetrischen Probleme stecken. Der Wunsch, die letzteren durch Ableitung aus jenen strenger zu begründen und damit zugleich an dem wichtigsten Beispiele die Anwendbarkeit meiner allgemeinen

1) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale. Leipzig 1866.

2) Leçons sur le calcul des fonctions, Ausgabe v. 1806 p. 466 u. 469.

3) Borchardt's J. 55 p. 336.

Kriterien auf die verschiedenen speciellen Gattungen von Problemen der Variationsrechnung darzuthun, war die Veranlassung zu der vorliegenden Note. Unter Hinweis auf den Aufsatz: »Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale«, Borchardt's J. 69, der, in theilweise veränderter Darstellung, die Untersuchungen meiner Habilitationsschrift reproducirt, setze ich diese Ableitung in §. 1 auseinander.

In den isoperimetrischen Problemen tritt ferner ein sehr bemerkenswerthes Reciprocitätsgesetz zu Tage, nach welchem jedem isoperimetrischen Probleme mit m isoperimetrischen Bedingungen m andere isoperimetrische Probleme in der Weise aequivalent sind, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Grenzen, innerhalb deren die Lösung ein wirkliches Maximum oder Minimum hervorruft, allen $m + 1$ Problemen gemeinschaftlich angehören. Dieses Reciprocitätsgesetz ist lediglich eine Folge der *Euler*'schen Regel zur Lösung der isoperimetrischen Probleme und der Form, in welcher bei diesen Problemen die zweite Variation sich vor jeder Reduction darbietet. Die Ableitung des Reciprocitätsgesetzes aus den Kriterien des §. 1 wird daher als eine willkommene Bestätigung dieser Kriterien zu betrachten sein.

Im dritten § endlich soll ein, für die Ebene bereits von *Lundström* behandeltes Beispiel die Anwendung der Kriterien und des Reciprocitätsgesetzes erläutern.

§ 1.

Kriterien des Maximums und Minimums.

In dem oben angegebenen Aufsatze, auf den sich im Folgenden die eingeklammerten Seitenzahlen beziehen, habe ich das Problem behandelt:

I. *Man soll die Functionen* $y_1, \ldots y_n$ *zwischen denen die* m *Bedingungsgleichungen*:

$$\varphi_\varkappa (x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n) = 0,\ \varkappa = 1, 2, \ldots m$$

vorgeschrieben sind, so bestimmen, dass bei gegebenen Grenzen und Grenzwerthen das Integral:

$$V = \int_{x_0}^{x} f\,(x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n)\, dx$$

ein relatives Maximum oder Minimum werde,

und habe für dasselbe (p. 260) die folgenden Resultate erhalten:

Das Problem I wird gelöst durch die $n + m$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen der unabhängigen Variabeln x und den $n + m$ abhängigen Variabeln $y_1, \ldots y_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m$

$$1) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'}, \quad \varphi_x = 0,$$

in denen:

$$2) \qquad \Omega = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$$

ist, und damit man den $2n$ Grenzbedingungen genügen könne, müssen die durch vollständige Integration dieser Gleichungen gewonnenen Functionen $y_1, \ldots y_n$ $2n$ willkürliche Constanten $a_1, \ldots a_{2n}$ enthalten. Hat man diese Constanten durch die gegebenen Grenzwerthe ausgedrückt, so ist es (abgesehen immer von dem Eintreten besonderer Ausnahmefälle [p. 241, 260], damit die so erhaltenen Functionen ein wirkliches relatives Maximum oder Minimum des Integrales hervorbringen, hinreichend und (im Allgemeinen wenigstens auch) nothwendig, dass die obere Grenze x_1 (die ich immer $> x_0$ voraussetze) zwischen x_0 und der zunächst an x_0 gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

$$3) \qquad \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n}\frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} = 0$$

bleibe und dass überdies die homogene Function zweiter Ordnung:

$$4) \qquad 2W \equiv \sum_{h=1}^{h=n}\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} U_h U_i,$$

deren n willkürliche Argumente $U_1, \ldots U_n$ den m Bedingungsgleichungen:

$$5) \qquad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y_h'} U_h = 0$$

unterworfen sind, zwischen x_0 und x_1 ihr Zeichen nicht ändern könne.

In den Formeln 3), 4), 5) sind unter $y_1, \ldots y_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m$ diejenigen Functionen von x, $a_1, \ldots a_{2n}$ zu verstehen, die durch die vollständige Integration der Gleichungen 1) erhalten wurden,

den Integrationsconstanten $a_1, \ldots a_{2n}$ selbst hat man die festen Werthe beizulegen, die sich aus den $2n$ Grenzbedingungen ergaben, und mit y_{h_0} endlich ist der Werth der Function y_h für $x = x_0$ bezeichnet.

Diese Resultate lege ich dem Folgenden zu Grunde und betrachte nunmehr das isoperimetrische Problem:

II. *Die Functionen* $y_1, \ldots y_n$ *von* x, *welche den* m *isoperimetrischen Bedingungen*

$$\int_{x_0}^{x_1} f_\varkappa (x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n)\, dx = l_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots m$$

unterworfen sind und überdies in den beiden gegebenen Grenzen x_0 *und* x_1 *gegebene Werthe erhalten sollen, so zu bestimmen, dass für dieselben das Integral*

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f\,(x\, y_1 \ldots y_n\, y'_1 \ldots y'_n)\, dx$$

ein relatives Maximum oder Minimum werde (wobei selbstverständlich m jetzt nicht mehr, wie im Probleme I., der Beschränkung $m < n$ unterliegt).

Führt man nach dem Vorgange *Lagrange*'s m neue Variabeln $u_1, \ldots u_m$ durch die Substitutionen:

$$u_\varkappa = \int f_\varkappa\, dx$$

ein, so kann man die isoperimetrischen Bedingungen durch die m Bedingungsgleichungen:

$$f_\varkappa - u'_\varkappa = 0,$$

verbunden mit den $2m$ Grenzbedingungen:

$$[u_\varkappa]_{x = x_0} = \alpha_\varkappa, \quad [u_\varkappa]_{x = x_1} = \alpha_\varkappa + l_\varkappa,$$

ersetzen und in den letzteren die Anfangswerthe $\alpha_\varkappa$ als gegebene Grössen betrachten, wodurch das Problem II die Form annimmt:

III. *Die* $n + m$, *durch die* m *gegebenen Bedingungsgleichungen:*

$$\varphi_\varkappa \equiv f_\varkappa - u'_\varkappa = 0 \tag{6}$$

verbundenen Functionen $y_1, \ldots y_n, u_1, \ldots u_m$ *sind so zu be-*

stimmen, dass bei gegebenen Grenzwerthen von $x, y_1, \ldots y_n, u_1, \ldots u_m$ *das Integral V ein relatives Maximum oder Minimum werde.*

Das Problem III ist aber nur ein specieller Fall des Problems I und man kann daher auf dasselbe die oben angegebene Regel anwenden.

Nach derselben sind die Differentialgleichungen des Problems III:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y'_h}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u_x} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial u'_x}, \quad \varphi_x = 0.$$

Diese reduciren sich aber, wenn man

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m$$

setzt, von selbst auf die Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_h}, \quad 0 = -\frac{d\lambda_x}{dx}, \quad f_x - u'_x = 0.$$

Das Problem III wird folglich gelöst durch die n Differentialgleichungen:

$$7) \qquad \frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_h},$$

in denen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ als unbestimmte Constanten aufzufassen sind, und nach Integration dieser Gleichungen ergeben sich die u_x durch die Quadraturen:

$$u_x = c_x + \int f_x \, dx.$$

Damit man die erforderliche Anzahl willkürlicher Constanten erhalte, um den vorgeschriebenen $2(n + m)$ Grenzbedingungen genügen zu können, ist es hiernach nothwendig und hinreichend, dass die n Gleichungen 7) auflösbar seien nach den n zweiten Differentialquotienten $y''_1, \ldots y''_n$.

Da ferner nach 2) und 6)

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u'_k \partial y'_h} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u'_k \partial u'_i} = 0$$

ist, so reducirt sich für das Problem III die Function $2W$ auf

$$2W = \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i$$

und die m Bedingungsgleichungen 5) werden:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial f_x}{\partial y'_h} U_h = V_x.$$

Diese m Gleichungen bestimmen aber nur die in der Function $2W$ gar nicht vorkommenden Grössen $V_1, \ldots V_m$ als Functionen der Argumente $U_1, \ldots U_n$. Sie beschränken also die Willkürlichkeit dieser Argumente in keiner Weise und können daher ganz weggelassen werden.

Die Grenzgleichung endlich wird im Problem III, wenn man unter $a_1, \ldots a_{2n}$ jetzt die $2n$ willkürlichen Constanten versteht, welche die vollständige Integration der Gleichungen 7) mit sich bringt:

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial u_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial u_m}{\partial \lambda_m} \frac{\partial u_{10}}{\partial c_1} \cdots \frac{\partial u_{mo}}{\partial c_m} = 0.$$

Da aber:

$$\frac{\partial y_h}{\partial c_k} = \frac{\partial y_{ho}}{\partial c_k} = \frac{\partial u_h}{\partial c_k} = \frac{\partial u_{ho}}{\partial c_k} = 0$$

und

$$\frac{\partial u_k}{\partial c_k} = \frac{\partial u_{ko}}{\partial c_k} = 1$$

ist, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \lambda_m} = 0,$$

worin:

8) $$v_k = u_k - u_{ko} = \int_{x_0}^{x} f_k \, dx,$$

und man erhält somit aus der für das Problem I angeführten Regel die folgenden Kriterien des Maximums und Minimums für das isoperimetrische Problem II:

IV. *Das Problem* II *wird gelöst durch die n Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_h},$$

in denen

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots \lambda_m f_m$$

ist und die λ unbestimmte Constanten bedeuten. Die vollständige Integration dieser Gleichungen liefert, vorausgesetzt, dass sich aus ihnen die zweiten Differentialquotienten $y''_1, \ldots y''_n$ *nicht eliminiren lassen,* $y_1, \ldots y_n$ *als Functionen von* x*, von den* m *isoperimetrischen Constanten* $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ *und von* $2n$ *Integrationsconstanten* $a_1, \ldots a_{2n}$*. Hat man diese* $2n + m$ *Constanten aus den* m *isoperimetrischen und den* $2n$ *Grenzbedingungen bestimmt, so ergeben* (abgesehen von solchen Ausnahmen, die nur in besonderen Fällen eintreten können und ihrer Natur nach sich den allgemeinen Regeln entziehen) *die so erhaltenen Functionen* $y_1, \ldots y_n$ *ein wirkliches relatives Maximum oder Minimum des Integrales* V*, wenn die homogene Function zweiter Ordnung der* n *unabhängigen Variabeln* $U_1, \ldots U_n$

$$2W = \sum_{i=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i$$

innerhalb der Integrationsgrenzen stets dasselbe Zeichen bewahrt, und so lange überdies die obere Grenze x_1 *zwischen* x_0 *und der zunächst an* x_0 *gelegenen Wurzel der Grenzgleichung*

$$\Delta(x, x_0) \equiv \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \lambda_m} = 0$$

bleibt, in welcher die Functionen v_k *durch die Quadraturen*

$$v_k = \int_{x_0}^{x} f_k \, dx$$

zu berechnen sind. Ist dagegen die erste Bedingung nicht erfüllt, so findet sicher weder ein Maximum, noch ein Minimum statt und im Allgemeinen gilt dasselbe auch dann, wenn x_1 *die angegebene Grenze erreicht oder überschritten hat.*

§ 2.

Das Reciprocitätsgesetz der isoperimetrischen Probleme.

Das Problem II, auf welches sich der Satz IV bezieht, lässt sich in Zeichen kurz so wiedergeben:

$$\alpha) \quad \begin{cases} V \equiv \int_{x_0}^{x_1} f \, dx = M_a^i \\ \int_{x_0}^{x_1} f_1 \, dx = l_1, \int_{x_0}^{x_1} f_2 \, dx = l_2, \ldots \int_{x_0}^{x_1} f_m \, dx = l_m. \end{cases}$$

Vergleichen wir dasselbe jetzt mit dem anderen isoperimetrischen Probleme, welches enthalten ist in den Formeln:

$$\beta)\quad \begin{cases} V_1 \equiv \int_{x_0}^{x_1} f_1\, dx = M_a^i \\ \int_{x_0}^{x_1} f dx = l, \int_{x_0}^{x_1} f_2\, dx = l_2, \ldots, \int_{x_0}^{x_1} f_m\, dx = l_m. \end{cases}$$

Ich nehme an, dass die gegebenen Grenzen und Grenzwerthe in beiden Problemen dieselben sind.

Führen wir, des bequemeren Vergleichs halber, homogene isoperimetrische Constanten ein, d. h. setzen wir:

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{\mu},$$
$$\mu F \equiv \mu f + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_m f_m = \Phi$$

und bedenken, dass die Determinante $\Delta(x\, x_0)$ sich nur um einen constanten Factor ändert, wenn wir an Stelle der $a_1, \ldots a_{2n}$, $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ irgend $2n + m$ unabhängige Functionen dieser Constanten als neue Constanten einführen, so können wir den Satz IV auch so aussprechen:

Das Problem α) wird gelöst durch die n Differentialgleichungen:

$$9)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial y'_h},$$

nach deren vollständiger Integration die $2n$ Integrationsconstanten $a_1, \ldots a_{2n}$ und die Verhältnisse der $m + 1$ isoperimetrischen Constanten $\mu, \mu_1, \ldots \mu_m$ aus den $2n$ Grenzbedingungen und den m isoperimetrischen Bedingungen:

$$10)\quad \int_{x_0}^{x_1} f_1\, dx = l_1, \int_{x_0}^{x_1} f_2\, dx = l_2, \ldots \int_{x_0}^{x_1} f_m\, dx = l_m$$

zu bestimmen sind, und die so erhaltenen Functionen $y_1, \ldots y_n$ erzeugen ein wirkliches Maximum oder Minimum im Problem α), so lange die obere Grenze x_1 zwischen x_0 und der zunächst an x_0 gelegenen Wurzel der Grenzgleichung

$$\Delta_\alpha(x_1\, x_0) \equiv$$
$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v_1}{\partial \mu} \frac{\partial v_2}{\partial \mu_2} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \mu_m} = 0$$

bleibt, vorausgesetzt, dass überdies die homogene Function zweiter Ordnung

$$2W_\alpha = \frac{1}{\mu} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i$$

zwischen x_0 und x_1 stets dasselbe Zeichen behält.

Gehen wir nun über zum Probleme β), so bleiben für dieses die Gleichungen 9) und die Grenzbedingungen ganz unverändert und die isoperimetrischen Bedingungen 10) ändern sich nur insoweit, als jetzt an Stelle der Bedingung

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = l_1$$

die folgende:

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx = l$$

tritt. Im Allgemeinen wird also die Lösung des Problems β) verschieden sein von der des Problems α). Nehmen wir aber an, dass sich bei der Lösung des Problems α) als Maximums- oder Minimumswerth des Integrales V ergeben habe

$$V = \varkappa,$$

so sind unter der Annahme

11) $$l = \varkappa$$

die aus dem Problem α) erhaltenen Functionen $y_1, \ldots y_n$ gleichzeitig auch Lösungen des Problems β) und liefern hier für das Integral V_1 den Werth l_1. Denn nach Voraussetzung erfüllen diese Functionen und die Werthe der Constanten-Verhältnisse $\mu : \mu_1 : \ldots : \mu_m$, die sich bei ihrer Auffindung ergaben, gleichzeitig die Gleichungen 9) und die $2n$ Grenzbedingungen, die beiden Problemen gemein sind, und genügen überdies den $m+1$ Gleichungen:

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx = \varkappa, \int_{x_0}^{x_1} f_1 dx = l_1, \ldots \int_{x_0}^{x_1} f_m dx = l_m,$$

welche bei der Annahme 11) die isoperimetrischen Bedingungen sowohl des ersten, wie des zweiten Problems enthalten.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass man immer durch bloss algebraische Operationen das Problem β) lösen kann, so oft man das Problem α) gelöst hat für unbestimmte Werthe der Constanten $l_1, \ldots l_m$.

Weiter ist für die unter der Voraussetzung 11) beiden Problemen gemeinsame Lösung die Grenzgleichung im Problem β):

$$\Delta_\beta (x\, x_0) \equiv$$
$$\sum' \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{10}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{no}}{\partial a_{2n}} \frac{\partial v}{\partial \mu} \frac{\partial v_2}{\partial \mu_2} \cdots \frac{\partial v_m}{\partial \mu_m} = 0,$$

wo die y_h und v_k, die a_i und μ_k dieselben Werthe haben, wie in der Determinante $\Delta_\alpha (x x_0)$ und nur an Stelle von v_1 die Function

12) $$v = \int_{x_0}^{x} f\, dx$$

getreten ist. Wegen

$$\Phi = \mu f + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_m f_m$$

folgt aber aus 12) und 8):

$$\mu v + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m = \int_{x_0}^{x} \Phi\, dx$$

und hieraus ergiebt sich durch partielle Differentiation nach a_i und μ_k:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial a_i} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial a_i} + \cdots + \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial a_i} = \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial a_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y'_h}{\partial a_i} \right),$$

$$v_x + \mu \frac{\partial v}{\partial \mu_x} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mu_x} + \cdots + \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial \mu_x} = \int_{x_0}^{x} dx \left\{ f_x + \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial \mu_x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y'_h}{\partial \mu_x} \right) \right\}.$$

Man hat also, wenn man unter c irgend eine der Constanten $a_1, \ldots a_{2n}, \mu, \mu_1, \ldots \mu_m$ versteht:

$$\mu \frac{\partial v}{\partial c} + \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial c} + \cdots \mu_m \frac{\partial v_m}{\partial c} = \int_{x_0}^{x} dx \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y'_h}{\partial c} \right).$$

Nun ist identisch:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y'_h}{\partial c} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_h} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \right) \frac{\partial y_h}{\partial c} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} \right)$$

oder nach 9):

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} \right),$$

also erhält man:

$$\frac{\partial v}{\partial c} = - \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial v_1}{\partial c} + \frac{1}{\mu} \left\{ - \sum_{k=2}^{k=m} \mu_k \frac{\partial v_k}{\partial c} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \frac{\partial y_h}{\partial c} - \sum_{h=1}^{h=n} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y'_h} \right]_0 \frac{\partial y_{ho}}{\partial c} \right\},$$

wo der Index o wie früher die Substitution $x = x_0$ andeutet.

Diese Formeln drücken aber nur die Elemente $\frac{\partial v}{\partial c}$ der Determinante $\Delta_\beta (x\, x_0)$ durch die Grössen $- \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial v_1}{\partial c}$, vermehrt um je mit demselben Factor multiplicirte, correspondirende Elemente der anderen Reihen dieser Determinante aus. Daher ist identisch:

$$\Delta_\beta (x\, x_0) = - \frac{\mu_1}{\mu} \Delta_\alpha (x\, x_0).$$

Für die unter der Annahme 11) beiden Problemen gemeinsame Lösung sind also auch ihre Grenzgleichungen dieselben.

Endlich tritt an die Stelle der homogenen Function $2W_\alpha$ des Problems α) im Problem β) die Function:

$$2W_\beta = \frac{1}{\mu_1} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i.$$

Für die betrachtete gemeinschaftliche Lösung hat man also:

$$2W_\beta = \frac{\mu}{\mu_1} 2W_\alpha = \frac{1}{\lambda_1} 2W_\alpha.$$

Fassen wir diese Resultate zusammen, so können wir demnach den folgenden Satz aussprechen:

V. *Hat man das isoperimetrische Problem*

$$\alpha)\quad \begin{cases} V \equiv \int_{x_0}^{x_1} f\,dx = M_a' \\ \int_{x_0}^{x_1} f_1\,dx = l_1, \int_{x_0}^{x_1} f_2\,dx = l_2, \cdots, \int_{x_0}^{x_1} f_m\,dx = l_m \end{cases}$$

durch vollständige Integration der n Differentialgleichungen:

$$7)\qquad \frac{\partial F}{\partial y_h} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_h'}$$

gelöst, in denen

$$F \equiv f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m$$

ist und die λ unbestimmte Constanten sind, deren Werthe sich sodann aus den m isoperimetrischen Bedingungen des Problems bestimmen, und hat man hierbei als Maximums- oder Minimums-Werth des Integrales V gefunden:

$$V = l,$$

so ist die erhaltene Lösung dieses Problems gleichzeitig auch die Lösung des reciproken Problems:

$$\beta)\quad \begin{cases} V_1 \equiv \int_{x_0}^{x_1} f_1\,dx = M_a' \\ \int_{x_0}^{x_1} f\,dx = l, \int_{x_0}^{x_1} f_2\,dx = l_2, \cdots, \int_{x_0}^{x_1} f_m\,dx = l_m, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass man in beiden Problemen den Grenzen und Grenzwerthen dieselben festen Werthe vorgeschrieben hat.

Ist ferner im Problem α)

$$V = l$$

ein wirkliches Maximum oder Minimum des Integrales V, so ist zu gleicher Zeit im Probleme β)

$$V_1 = l_1,$$

ein wirkliches Maximum oder Minimum des Integrales V_1, wenn

$$\lambda_1 > o$$

ist, dagegen ein Minimum oder Maximum von V_1, *wenn*

$$\lambda_1 < o$$

ist. Endlich, wenn im Probleme α) *der gefundene Werth* l *von* V *weder ein Maximum, noch ein Minimum ist, so gilt dasselbe auch im Probleme* β) *von dem Werthe* l_1 *von* V_1.

Man sieht aus diesem *Reciprocitätsgesetze der isoperimetrischen Probleme*, dass man (bei festen, aber unbestimmten Werthen der Constanten l) nur für irgend ein vorgelegtes isoperimetrisches Problem die Lösung gefunden und die Frage entschieden zu haben braucht, ob und innerhalb welcher Grenzen diese Lösung ein wirkliches Maximum oder Minimum der Aufgabe ergiebt, um dieselben Fragen ohne Weiteres auch für jedes reciproke Problem beantworten zu können. Es versteht sich ferner von selbst, dass es, um das Reciprocitätsgesetz anwenden zu können, nicht nothwendig ist, das gegebene Problem α) gerade auf dem angegebenen Wege gelöst zu haben. Man braucht vielmehr nur, wenn man die Lösung auf irgend einem anderen Wege, z. B. durch geometrische Betrachtungen ermittelt hat, rückwärts die Vorzeichen der isoperimetrischen Constanten $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ zu bestimmen. Bei den isoperimetrischen Problemen von der Form:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(xy)\, dx = M_a^i, \int_{x_0}^{x_1} dx\, \sqrt{1+y'^2} = l_1$$

z. B. ist:

$$2W = \frac{\lambda_1}{(\sqrt{1+y'^2})^3}\, U_1^2;$$

hier gehört also einer Lösung, die ein Maximum erzeugt, ein negativer, und einer Lösung, die ein Minimum hervorbringt, ein positiver Werth von λ_1 zu.[1])

1) Beiläufig bemerkt ist das Reciprocitätsgesetz nicht die einzige Eigenschaft, welche die isoperimetrischen Aufgaben vor den anderen Problemen der Variationsrechnung voraus haben. Für die isoperimetrischen Probleme gilt vielmehr noch ein anderer, höchst wichtiger Satz, den man das *Gesetz der Unveränderlichkeit der isoperimetrischen Constanten* nennen könnte. Wenn man nämlich durch Einschaltung von Bedingungen zwischen den Grenzen die Curven y zwingt, sich in Zweige zu theilen, so ändern sich die Integrationsconstanten a von einem Zweige zum andern, aber die isoperimetrischen Constanten λ behalten überall dieselben Werthe. In dem besonderen Falle, wo man die geschlossene Curve grössten Flächeninhalts

§ 3.
Beispiel.

Diejenige Curve von gegebener Länge und gegebenen Endpunkten zu finden, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

Ich nehme die z Axe vertikal und dem Sinne der Schwere entgegengesetzt und lege, der Bequemlichkeit halber, die xy Ebene durch den gegebenen Anfangspunkt der Curve. Die Aufgabe drückt sich dann analytisch durch die Formeln aus:

$$1) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} z \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx = Min. \\ \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx = l_1 . \end{cases}$$

Man hat also hier:

$$2) \quad F = (z + \lambda_1) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

und erhält als Lösung der Aufgabe die Kettenlinie:

$$3) \quad \begin{cases} y = \frac{a_1}{a_2} x + a_3 , \\ z + \lambda_1 = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left\{ e^{\frac{x - a_4}{a_2}} + e^{-\frac{x - a_4}{a_2}} \right\} , \end{cases}$$

woraus sich für

$$v_1 = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

der Werth:

$$4) \quad v_1 = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left\{ e^{\frac{x - a_4}{a_2}} - e^{-\frac{x - a_4}{a_2}} - e^{\frac{x_0 - a_4}{a_2}} + e^{-\frac{x_0 - a_4}{a_2}} \right\}$$

ergiebt.

---

bei gegebenem Umfange, oder kleinsten Umfangs bei gegebener Fläche sucht und überdies verlangt, dass die Curve im Innern eines gegebenen Polygons verlaufen solle, fällt das letztere Gesetz mit dem bekannten *Steiner*'schen Satze zusammen, dass alle freien Theile der gesuchten Curve Bögen gleicher Kreise sein müssen.

Die 5 Constanten $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \lambda_1$ bestimmen sich aus der gegebenen Lage der beiden Endpunkte und der gegebenen Bogenlänge l_1, und zwar erhält man zwei verschiedene Werthsysteme derselben, die zwei gleichen und entgegengesetzten Werthen der Constanten a_2 angehören. Da nach 4)

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_2}\left(\frac{x - a_4}{a_2} - \frac{x - a_4}{a_2}\right)$$
$$e \qquad + e$$

stets dasselbe Zeichen, wie $\frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_2}$ besitzt, so hat man, damit der Bogen positiv werde, in den Formeln 3) und 4) der $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ das Zeichen von a_2 beizulegen.

Die Function ferner:

$$2W = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} U_1^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} U_1 U_2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z'} U_2^2$$

wird nach 1)

$$2W = \frac{z + \lambda_1}{(\sqrt{1 + y'^2 + z'^2})^3}\left\{U_1^2 + U_2^2 + (z' U_1 - y' U_2)^2\right\}$$

und hat also nach 3) beständig dasselbe Zeichen wie $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Um daher das Minimum zu erhalten, müssen wir diese Wurzel und mit ihr a_2 positiv nehmen, d. h. wir müssen von den beiden Kettenlinien von gegebener Länge, die sich in der, durch die beiden gegebenen Endpunkte gehenden Vertikalebene von dem einen Punkte zum anderen ziehen lassen, diejenige nehmen, die ihre convexe Seite nach unten kehrt. In Folge der Voraussetzung $z_0 = o$ wird nach 3) dann $\lambda_1 > o$.

Die Grenzgleichung endlich:

5) $$\sum \pm \frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y_0}{\partial a_2}\frac{\partial z}{\partial a_3}\frac{\partial z_0}{\partial a_4}\frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} = o$$

reducirt sich zunächst wegen der aus 3) und 4) folgenden Formeln:

$$\frac{\partial y}{\partial a_3} = 1\ ,\ \frac{\partial y}{\partial a_4} = o\ ,\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = o\ ,$$
$$\frac{\partial z}{\partial a_3} = o\ ,\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = -1\ ,\ \frac{\partial v_1}{\partial a_3} = o\ ,\ \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} = o$$

sofort auf die Gleichung:

$$6) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial (y-y_0)}{\partial a_1}, & \frac{\partial (y-y_0)}{\partial a_2}, & 0 \\ \frac{\partial (z-z_0)}{\partial a_1}, & \frac{\partial (z-z_0)}{\partial a_2}, & \frac{\partial (z-z_0)}{\partial a_4} \\ \frac{\partial v_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial v_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial v_1}{\partial a_4} \end{vmatrix} = 0 .$$

Setzt man weiter für den Augenblick

$$7) \qquad \frac{x-a_4}{a_2} = \xi , \ \tfrac{1}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi}) = p , \ \tfrac{1}{2}(e^{\xi} - e^{-\xi}) = q ,$$

wonach sich aus 3) und 4) ergiebt:

$$y - y_0 = a_1 (\xi - \xi_0) ,$$
$$z - z_0 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,(p - p_0) ,$$
$$v_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,(q - q_0) ,$$

differentiirt die letzteren Formeln partiell nach a_1, a_2, a_4 und substituirt die Werthe der Differentialquotienten in die Gleichung 6), so erhält man nach einfachen Reductionen und unter Weglassung des constanten Factors $\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_2^2}$ die Gleichung:

$$(\xi - \xi_0)\,[(p q_0 - p_0 q)\,(\xi - \xi_0) - (p - p_0)^2 + (q - q_0)^2] = 0 ,$$

sodass also schliesslich, wenn man noch

$$\xi - \xi_0 = \frac{x - x_0}{a_2} = \Theta$$

setzt, die Grenzgleichung des Problems wird:

$$\Theta\, \Psi(\Theta) = 0 ,$$

worin:

$$\Psi(\Theta) = e^{\Theta} + e^{-\Theta} - \frac{\Theta}{2}(e^{\Theta} - e^{-\Theta}) - 2$$

ist. Die Betrachtung der Functionen $\Psi'\Theta$ und $\Psi''\Theta$ zeigt aber sofort, dass diese Gleichung nur die eine reelle Wurzel $\Theta = 0$, d. h. $x = x_0$ zulässt. Die Gleichung ergiebt also keinerlei Beschränkung für die obere Grenze x_1; es findet vielmehr für die

nach unten convexe Kettenlinie ein unbeschränktes Minimum statt und wir haben den Satz gewonnen:

Unter allen Curven von gegebener Länge und gegebenen Endpunkten hat stets die Kettenlinie den tiefsten Schwerpunkt.

Da $\lambda_1 > o$, so geht zugleich aus diesem Satze durch Anwendung des Reciprocitätsgesetzes noch der folgende hervor:

Unter allen Curven von gegebenen Endpunkten, deren Schwerpunkte auf einer und derselben Horizontalebene liegen, hat stets die Kettenlinie die kleinste Länge.

In dem absoluten Probleme dagegen

$$8) \qquad \int_{x_0}^{x_1} (z + \lambda_1) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx = Min.,$$

welches, vorausgesetzt, dass man der Constanten λ_1 denselben Werth giebt, den sie in der eben behandelten isoperimetrischen Aufgabe erhält, durch die nämliche Kettenlinie gelöst wird, tritt an die Stelle der Gleichung 5) die Gleichung:

$$\Sigma \pm \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y_0}{\partial a_2} \frac{\partial z}{\partial a_3} \frac{\partial z_0}{\partial a_4} = o,$$

die sich unter Weglassung des Factors $\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_2^2} (\xi - \xi_0)$ auf

$$(q\,\xi - p)\, q_0 - q\,(q_0\,\xi - p_0) = o$$

reducirt. Nun ist nach 3) und 7)

$$p = \frac{2\,(z + \lambda_1)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad q = \frac{2\,a_2\,z'}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \xi - \xi_0 = \frac{x - x_0}{a_2}.$$

In diesem absoluten Probleme erhalten wir also als Grenzgleichung:

$$x - \frac{z + \lambda_1}{z'} = x_0 - \frac{z_0 + \lambda_1}{z'_0}$$

d. h. wenn wir auf derjenigen Kettenlinie, welche die Aufgabe löst, von dem gegebenen Anfangspunkte aus fortschreiten, so dürfen wir, damit ein wirkliches Minimum stattfinde, hier das Integral nicht bis zu demjenigen Punkte ausdehnen, dessen

Tangente die in der Vertikalebene der beiden gegebenen Endpunkte gezogene Gerade $z = -\lambda_1$ wieder in demselben Punkte schneidet, wie die Tangente des Anfangspunktes. Wo wir also in dem isoperimetrischen Probleme 1) ein unbegrenztes Minimum erhalten, erhalten wir in dem unbedingten Probleme 8) nur ein begrenztes Minimum, was den Unterschied zwischen diesen beiden, dieselbe Lösung besitzenden Problemen klar hervortreten lässt.

H. E. Grassmann, *Zur Theorie der reciproken Radien.* **Mitgetheilt von** *C. Neumann.*

Es sei gegeben eine Kugelfläche (o, H), d. i. eine Kugelfläche mit dem Mittelpunct o und dem Halbmesser H. Lässt man von o einen Strahl ausgehen, und markirt auf demselben irgend zwei der Relation

$$(1.) \qquad (o\xi)\,(ox) = H^2$$

entsprechende Puncte ξ, x, so heisst bekanntlich jeder von diesen beiden Puncten das *Spiegelbild* des andern in Bezug auf die Kufläche (o, H). Auch pflegt man die beiden Puncte kurzweg *correspondirende* oder *conjugirte* Puncte zu nennen. — Sind zwei Paare correspondirender Puncte ξ, x und η, y gegeben, so ist nach (1.):

$$(2.) \qquad (o\xi)\,(ox) = (o\eta)\,(oy) = H^2,$$

und folglich

$$(3.) \qquad \Delta\,(o\xi\eta) \sim \Delta\,(oyx).$$

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt sofort:

$$(4.) \qquad \frac{(\xi\eta)}{(xy)} = \frac{(o\xi)}{(oy)} = \frac{(o\eta)}{(ox)} = \sqrt{\frac{(o\xi)\,(o\eta)}{(ox)\,(oy)}}.$$

Bei einer frühern Gelegenheit[1]) habe ich nun gezeigt, dass diese Relationen (4.) gültig bleiben, wenn man die correspondirenden Puncte η, y durch zwei einander correspondirende *Kugelflächen* σ, s ersetzt, dass nämlich die Formeln stattfinden:

$$(5.) \qquad \frac{(\xi\sigma)}{(xs)} = \frac{(o\xi)}{(os)} = \frac{(o\sigma)}{(ox)} = \sqrt{\frac{(o\xi)\,(o\sigma)}{(ox)\,(os)}};$$

nur sind in diesem Fall unter $(o\sigma)$, $(\xi\sigma)$ und (os), (xs) die von den Puncten o, ξ, x an σ resp. s gelegten *Tangenten* zu verstehen, jede Tangente gerechnet vom Ausgangspunct bis zum Berührungspunct.

Für diesen Satz, den ich am a. O. *analytisch* bewiesen habe, hat einer meiner Zuhörer Herr Stud. *Grassmann* einen einfachen *geometrischen* Beweis gefunden, den ich mir hier mitzutheilen erlaube.

---

1) Nämlich in meinen „*Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential*" (Leipzig bei Teubner, 1877), vergl. daselbst S. 358.

Construirt man all' diejenigen zu σ orthogonalen Kugelflächen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, deren Mittelpuncte in der gegebenen geraden Linie $o\xi x$ liegen, so werden bekanntlich all' diese Kugelflächen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ durch zwei bestimmte Puncte ζ, ζ' gehen [1]). Construirt man nun die zu $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ in Bezug auf (o, H) conjugirten Kugelflächen $a, b, c, \ldots$, so werden offenbar diese letztern ihre Mittelpuncte ebenfalls in der Linie $o\xi x$ haben, ferner orthogonal sein zur Kugelfläche s, und endlich durch zwei bestimmte Puncte z, z' gehen, welche zu ζ, ζ' in Bezug auf (o, H) conjugirt sind.

Bezeichnet p einen variablen Punct der Linie $o\xi x$, so ist nach der Definition von ζ, ζ' offenbar $(p\zeta) = (p\sigma)$, wo $(p\sigma)$ die Länge der von p an σ gelegten Tangente bezeichnet. Giebt man also z. B. dem Puncte p die speciellen Lagen o und ξ, so wird:

$$(6.) \qquad (o\zeta) = (o\sigma), \qquad (\xi\zeta) = (\xi\sigma).$$

In analoger Weise ergiebt sich: $(pz) = (ps)$, also z. B.:

$$(7.) \qquad (oz) = (os), \qquad (xz) = (xs).$$

Da nun ξ, x conjugirte Puncte sind, und ζ, z ebenfalls, so ist nach Formel (4.):

$$(8.) \qquad \frac{(\xi\zeta)}{(xz)} = \frac{(o\xi)}{(oz)} = \frac{(o\zeta)}{(ox)} = \sqrt{\frac{(o\xi)(o\zeta)}{(ox)(oz)}};$$

also mit Rücksicht auf (6.), (7.):

$$(9.) \qquad \frac{(\xi\sigma)}{(xs)} = \frac{(o\xi)}{(os)} = \frac{(o\sigma)}{(ox)} = \sqrt{\frac{(o\xi)(o\sigma)}{(ox)(os)}}.$$

Dies aber ist der zu beweisende Satz, wie er in (5.) angegeben war.

C. Neumann, *Ueber die peripolaren Coordinaten.*

In der Horizontalebene sei ein *Grundkreis* vom Radius B gegeben. Vergegenwärtigen wir uns sämmtliche über (resp. unter) diesem Grundkreise stehenden Kugelcalotten [2]), so wird offenbar die *kleinste* derselben durch die Fläche des Grundkreises, und die *grösste* durch denjenigen Theil der Horizontal-

1) Allerdings sind diese Puncte ζ, ζ' nur dann *reell*, wenn die Kugelfläche σ von der geraden Linie $o\xi x$ *nicht* geschnitten wird.

2) d. i. all' diejenigen Calotten, welche die Peripherie des Grundkreises zum gemeinschaftlichen *Rande* haben.

ebene dargestellt sein, welcher ausserhalb des Grundkreises liegt. Wir wollen diese *kleinste* und *grösste* Calotte respective die *innere* und *äussere Grundfläche* nennen, und zur Bestimmung jeder andern Calotte die **Inclination**, d. i. denjenigen Winkel verwenden, unter welchem sie gegen die *obere* Seite der *äusseren* Grundfläche geneigt ist. Bezeichnen wir diese Inclination mit ω, so werden (um einige Beispiele anzuführen) durch

(1.) $\omega = 0, \quad \omega = \frac{1}{2}\pi, \quad \omega = \pi, \quad \omega = \frac{3}{2}\pi, \quad \omega = 2\pi$

der Reihe nach folgende Calotten angedeutet sein:

die äussere Grundfläche, die obere Halbkugelfläche, die innere Grundfläche, die untere Halbkugelfläche, die äussere Grundfläche.

§ 1.

Beziehung eines variablen Punctes auf den gegebenen Grundkreis vermittelst der peripolaren Coordinaten.

Um die Lage irgend eines Punctes ξ mit Bezug auf den gegebenen Grundkreis zu bestimmen, können dienen: *erstens* das Azimuth φ, unter welchem die Meridianebene[1]) des Punctes ξ gegen eine feste Meridianebene geneigt ist; *zweitens* die Inclination ω der über dem Grundkreise stehenden und durch ξ gehenden Kugelcalotte; endlich *drittens* der Quotient $\lambda = \frac{\varrho}{\varrho'}$, wo ϱ die kürzeste und ϱ' die längste Kante des von ξ nach dem Grundkreise gelegten Kegels vorstellen soll. Diese drei Grössen φ, λ, ω nennen wir die *peripolaren Coordinaten* des Punctes ξ; und gleichzeitig nennen wir ϱ, ϱ' die *Hauptstrahlen* des Punctes, endlich

(2.) $$\Pi = \sqrt{\varrho\varrho'}$$

den *Parameter* des Punctes. Wollen wir sämmtliche Puncte des unendlichen Raumes (jeden nur einmal) erhalten, so haben wir offenbar φ zwischen 0 und 2π, ω ebenfalls zwischen 0 und 2π, endlich λ zwischen 0 und 1 variiren zu lassen.

Beziehung der peripolaren zu den rechtwinkligen Coordinaten.

Nimmt man den Mittelpunct des Grundkreises zum Anfangspunct eines rechtwinkligen Coordinatensystems, ferner die geometrische Axe des Grundkreises zur x-Axe, endlich jene feste

1) Selbstverständlich ist unter der Meridianebene von ξ diejenige *Halbebene* zu verstehen, welche durch ξ und durch die geometrische Axe des Grundkreises sich bestimmt.

Meridianebene (von welcher aus φ gerechnet wird) zur xy-Ebene, so finden zwischen den peripolaren Coordinaten λ, ω, φ des Punctes ξ und zwischen seinen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, wie ich an einem andern Orte gezeigt habe[1]), die Beziehungen statt:

$$(3.)\qquad x = \mathsf{B}\,\frac{2\lambda \sin\omega}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2},\qquad y = \mathsf{B}\,\frac{(1-\lambda^2)\cos\varphi}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2},\qquad z = \mathsf{B}\,\frac{(1-\lambda^2)\sin\varphi}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2},$$

$$(4.)\qquad dx^2+dy^2+dz^2 = \mathsf{B}^2\,\frac{(2\,d\lambda)^2+(2\lambda\,d\omega)^2+[(1-\lambda^2)\,d\varphi]^2}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)^2}.$$

Sind ferner *zwei* Puncte gegeben ξ und ξ_1 mit den Coordinaten λ, ω, φ und λ_1, ω_1, φ_1, so gilt, wie ich ebenfalls dort[2]) gezeigt habe, für den geradlinigen Abstand $(\xi\xi_1)$ der beiden Puncte von einander die Formel:

$$(5.)\qquad (\xi\xi_1)^2 = 2\mathsf{B}^2\,\frac{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2)-(1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos(\varphi-\varphi_1)-4\lambda\lambda_1\cos(\omega-\omega_1)}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)(1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2)}.$$

Ist α_0 der Mittelpunct des Grundkreises, ferner α irgend ein anderer Punct der x-Axe (d. i. der geometrischen Axe des genannten Kreises), endlich β ein Punct auf der Peripherie des Grundkreises, und lässt man den variablen Punct ξ_1 $(\lambda_1, \omega_1, \varphi_1)$ successive mit α, α_0, β coincidiren, so wird[3])

$$(6.)\qquad \begin{array}{lllll} \text{für } \alpha: & \lambda_1 = 1, & \omega_1, & \varphi_1 = \text{unbest.},\\ \text{für } \alpha_0: & \lambda_1 = 1, & \omega_1 = \pi, & \varphi_1 = \text{unbest.},\\ \text{für } \beta: & \lambda_1 = 0, & \omega_1 = \text{unbest.}, & \varphi_1. \end{array}$$

Somit folgt aus (5.):

$$(7.)\qquad (\xi\alpha)^2 = 2\mathsf{B}^2\,\frac{1-2\lambda\cos(\omega-\omega_1)+\lambda^2}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)(1-\cos\omega_1)},$$

$$(\xi\alpha_0)^2 = \mathsf{B}^2\,\frac{1+2\lambda\cos\omega+\lambda^2}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2},$$

$$(\xi\beta)^2 = 2\mathsf{B}^2\,\frac{(1+\lambda^2)-(1-\lambda^2)\cos(\varphi-\varphi_1)}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}.$$

---

1) In meiner Schrift: *Theorie der Elektricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe.* Halle. Verlag des Waisenhauses, 1864. Vergl. daselbst Seite 14. Die dortigen Formeln sind mit den gegenwärtigen völlig identisch, bis auf die Constante B (Radius des Grundkreises), welche in jener Schrift mit a bezeichnet ist.

2) l. c. pag. 16.

3) Die Coordinate ω_1 des Punctes α hat einen *bestimmten* Werth, welcher abhängt von der jedesmaligen *speciellen* Lage dieses Punctes. Analoges gilt von der Coordinate φ_1 des Punctes β.

Sind ferner β_n und β_f zwei *specielle* Puncte β, und zwar β_n derjenige, welcher dem gegebenen Puncte $\xi(\lambda, \omega, \varphi)$ am nächsten liegt, andrerseits β_f derjenige, welcher von ihm am weitesten absteht, so wird

$$(8.) \qquad \begin{aligned} &\text{für } \beta_n: \quad \varphi_1 = \varphi, \\ &\text{für } \beta_f: \quad \varphi_1 = \varphi + \pi, \end{aligned}$$

und folglich:

$$(9.) \qquad \begin{aligned} (\xi\beta_n)^2 &= 4B^2 \frac{\lambda^2}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}, \\ (\xi\beta_f)^2 &= 4B^2 \frac{1}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}. \end{aligned}$$

Offenbar sind $(\xi\beta_n)$ und $(\xi\beta_f)$ nichts Anderes als die beiden *Hauptstrahlen* ϱ, ϱ' des Punctes ξ [vergl. das bei (2) Gesagte.]. Somit folgt:

$$(10.) \qquad \begin{aligned} \varrho &= \frac{2B\lambda}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}, \\ \varrho' &= \frac{2B}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}, \\ \Pi = \sqrt{\varrho\varrho'} &= \frac{2B\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}. \end{aligned}$$

Die Tangente von einem gegebenen Punct an eine gegebene Kugelfläche.

Es sei gegeben eine (über dem Grundkreis stehende) Calotte σ mit der Inclination ω_σ. Es soll die Länge der von irgend einem Puncte $\xi(\lambda, \omega, \varphi)$ an diese Calotte gelegten Tangente ermittelt werden (die Tangente gerechnet von ihrem Ausgangspunct bis zum Berührungspunct).

Bezeichnet man die Länge der Tangente mit $(\xi\sigma)$ und den Mittelpunct von σ mit μ, so ist nach dem Pythagoräischen Satz:

$$(11.) \qquad (\xi\sigma)^2 = (\xi\mu)^2 - (\beta\mu)^2,$$

wo β einen beliebigen Punct auf der Peripherie des Grundkreises vorstellt. Legt man durch den Mittelpunct μ der gegebenen Calotte σ eine neue (ebenfalls über dem Grundkreise stehende) Calotte, so wird die Inclination dieser letztern (nach dem bekannten Satz über Peripherie- und Centri-Winkel) doppelt so gross als diejenige von σ, mithin $= 2\omega_\sigma$ sein. Somit hat die ω-Coordinate des Punctes μ den Werth $2\omega_\sigma$. Mit Rücksicht hierauf folgt aus (7):

$$(12.) \qquad (\xi\mu)^2 = 2B^2 \frac{1-2\lambda\cos(\omega-2\omega_\sigma)+\lambda^2}{(1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)(1-\cos 2\omega_\sigma)},$$

oder, falls man den Punct $\xi(\lambda, \omega, \varphi)$ nach β rücken, d. i. λ zu 0 werden lässt:

$$(13.) \qquad (\beta\mu)^2 = 2B^2 \frac{1}{1-\cos 2\omega_\sigma}.$$

Durch Substitution dieser Werthe (12.), 13.) in die Formel (11.) ergiebt sich:

$$(\xi\sigma)^2 = \frac{4B^2\lambda}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} \cdot \frac{\cos\omega-\cos(\omega-2\omega_\sigma)}{1-\cos 2\omega_\sigma},$$

oder was dasselbe ist:

$$(\xi\sigma)^2 = \frac{4B^2\lambda}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2} \cdot \frac{\sin(\omega_\sigma-\omega)}{\sin\omega_\sigma},$$

oder mit Rücksicht auf (10.):

$$(14.) \qquad (\xi\sigma)^2 = \Pi^2 \frac{\sin(\omega_\sigma-\omega)}{\sin\omega_\sigma}.$$

Sind also irgend zwei Calotten mit den Inclinationen ω und ω_σ gegeben, und legt man von irgend einem Puncte der erstern eine Tangente an die zweite, so wird das Quadrat dieser Tangente (dieselbe gerechnet vom Ausgangspunct bis zum Berührungspunct) *den Werth haben*:

$$(15.) \qquad \Pi^2 \frac{\sin(\omega_\sigma-\omega)}{\sin\omega_\sigma},$$

wo Π den Parameter des Ausgangspunctes bezeichnet. Vertauscht man die Calotte, welche berührt werden soll, mit der supplementaren [1]), d. i. ω_σ mit $\omega_\sigma + \pi$, so bleibt der Ausdruck (15.) ungeändert, wie *a priori* zu erwarten stand. — Uebrigens wird die Formel (14.), wie aus ihrer Ableitung ersichtlich, auch dann gültig sein, wenn von dem gegebenen Punct aus eine Tangente an die gegebene Calotte resp. an die supplementare Calotte *unmöglich* ist; nur hat man in diesem Fall $(\xi\sigma)$ nicht als Länge der Tangente, sondern durch die Formel (11.) zu definiren [2]).

Betrachtung zweier conjugirter Puncte.

Es seien gegeben eine Calotte σ mit der Inclination ω_σ, ferner zwei Puncte $\xi(\lambda, \omega, \varphi, \Pi)$ und $\xi'(\lambda', \omega', \varphi', \Pi')$, welche

---

1) Ich nenne zwei Calotten zu einander *supplementar*, wenn sie zusammengenommen eine volle Kugelfläche ausmachen.

2) Auch wird in diesem Fall $(\xi\sigma)^2$ *negativ* sein.

in Bezug auf σ zu einander *conjugirt* sind[1]). Es sollen die Beziehungen zwischen λ, ω, φ, Π und λ',ω', φ', Π' näher untersucht werden.

Construirt man die gemeinschaftliche Meridianebene der Puncte ξ, ξ', und bezeichnet man mit β_n, resp. β_f die beiden Puncte, in denen der Grundkreis von dieser Ebene resp. ihrer Fortsetzung getroffen wird, so ist offenbar:

$$(16.)\qquad \lambda = \frac{(\xi\beta_n)}{(\xi\beta_f)}, \qquad \lambda' = \frac{(\xi'\beta_n)}{(\xi'\beta_f)},$$
$$\Pi = \sqrt{(\xi\beta_n)\,(\xi\beta_f)}, \qquad \Pi' = \sqrt{(\xi'\beta_n)\,(\xi'\beta_f)}.$$

Sind nun η, η' irgend zwei Puncte, die (ebenso wie ξ, ξ') in Bezug auf σ zu einander conjugirt sind, so ist bekanntlich[2]):

$$(17.)\qquad \frac{(\xi\eta)}{\sqrt{(\mu\xi)\,(\mu\eta)}} = \frac{(\xi'\eta')}{\sqrt{(\mu\xi')\,(\mu\eta')}}.$$

Nimmt man in dieser Formel für η irgend einen Punct der Calotte σ, z. B. einen Punct β des Grundkreises, mithin für η' ebendenselben Punct, so folgt:

$$(18.)\qquad \frac{(\xi\beta)}{\sqrt{(\mu\xi)}} = \frac{(\xi'\beta)}{\sqrt{(\mu\xi')}},$$

also, falls man β successive nach β_n und β_f rücken lässt:

$$(19.)\qquad \frac{(\xi\beta_n)}{\sqrt{(\mu\xi)}} = \frac{(\xi'\beta_n)}{\sqrt{(\mu\xi')}},$$
$$\frac{(\xi\beta_f)}{\sqrt{(\mu\xi)}} = \frac{(\xi'\beta_f)}{\sqrt{(\mu\xi')}}.$$

Hieraus folgt durch Division, mit Rücksicht auf (16.):

$$(20.)\qquad \lambda = \lambda',$$

andrerseits durch Multiplication, wiederum mit Rücksicht auf (16.):

$$(21.)\qquad \frac{\Pi}{\sqrt{(\mu\xi)}} = \frac{\Pi'}{\sqrt{(\mu\xi')}}.$$

Ausserdem ist, weil die Puncte ξ, ξ' eine gemeinschaftliche Meridianebene haben:

---

1) Ich nenne zwei Puncte in Bezug auf eine Kugelfläche vom Centrum μ *conjugirt*, wenn beide auf demselben von μ ausgehenden Strahl liegen, und wenn ausserdem das Product ihrer Centraldistanzen gleich dem Quadrat des Radius ist. Und derselben Ausdrucksweise bediene ich mich auch dann, wenn von der Kugelfläche nur ein *Theil*, z. B. wie hier, nur eine *Calotte* gegeben ist.

2) Vgl. die Formel (4.) auf Seite 133.

(22.) $$\varphi = \varphi';$$

so dass also nur noch die Beziehung zwischen ω und ω' zu ermitteln übrig bleibt.

Construirt man zwei über dem Grundkreis stehende, resp. durch ξ und ξ' gehende Calotten Σ und Σ', so sind offenbar diese Calotten in Bezug auf σ zu einander conjugirt[1]). Gleiches gilt daher auch[2]) von den Figuren Σ, σ und Σ', σ. Conjugirte Figuren sind aber (nach bekanntem allgemeinen Satz) in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich. Folglich ist, was die Figuren Σ, σ und Σ', σ betrifft, der Neigungswinkel, unter welchem die Calotten Σ und σ am Grundkreise zusammenstossen, eben so gross wie derjenige, welchen Σ' und σ daselbst bilden. Beachtet man nun, dass die resp. durch $\xi(\lambda, \omega, \varphi)$ und $\xi'(\lambda', \omega', \varphi')$ gehenden Calotten Σ und Σ' die Inclinationen ω und ω' besitzen, und dass andrerseits die Inclination der Calotte σ mit ω_σ bezeichnet worden ist, so erkennt man sofort, dass jene beiden Neigungswinkel die Werthe haben: $\varepsilon(\omega - \omega_\sigma)$ und $\varepsilon(\omega_\sigma - \omega')$, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Somit ergiebt sich:

$$\omega - \omega_\sigma = \omega_\sigma - \omega',$$

oder einfacher geschrieben:

(23.) $$\omega + \omega' = 2\omega_\sigma.$$

Lässt man insbesondere Σ durch μ (d. i. durch den Mittelpunct der Calotte σ) gehen, so verwandelt sich Σ' in die äussere Grundfläche. Mit andern Worten: Lässt man ω in das dem Puncte μ entsprechende ω_μ übergehen, so verwandelt sich ω' in 0. Somit folgt aus (23.): $\omega_\mu + 0 = 2\omega_\sigma$, d. i.

(23. a) $$\omega_\mu = 2\omega_\sigma.$$

Um die Hauptresultate zusammenzufassen: *Sind zwei Puncte ξ und ξ' in Bezug auf eine über dem Grundkreise errichtete Calotte σ zu einander conjugirt, so finden zwischen ihren Coordinaten λ, ω, φ*

---

1) Denkt man sich nämlich die unendlich vielen Puncte des Grundkreises der Reihe nach mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ bezeichnet, so geht Σ durch $\xi, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, andrerseits Σ' durch $\xi', \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$. Nun sind aber $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ *auf* σ gelegen, also in Bezug auf σ sich selber conjugirt. Folglich sind die Puncte $\xi, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ und $\xi', \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ in Bezug auf σ zu einander conjugirt. Folglich findet dieselbe Conjunction auch statt zwischen den Calotten Σ und Σ'.

2) Weil nämlich die Calotte σ in Bezug auf σ sich selber conjugirt ist,

und λ', ω', φ', sowie zwischen ihren Parametern Π und Π' die Relationen statt:

$$(24.)\qquad \begin{aligned} \omega + \omega' &= 2\omega_\sigma = \omega_\mu, \\ \lambda &= \lambda', \\ \varphi &= \varphi', \end{aligned} \qquad \frac{\Pi}{(\mu\xi)} = \frac{\Pi'}{(\mu\xi')},$$

wo μ den Mittelpunct der Calotte σ, ferner ω_σ die Inclination der Calotte σ, endlich ω_μ die Inclination derjenigen über dem Grundkreise stehenden Calotte bezeichnet, welche durch μ geht.

Ausserdem ist speciell mit Bezug auf die Formel (23. a) noch folgender Satz zu bemerken: *Errichtet man über dem gegebenen Grundkreis zwei Calotten, von welchen die zweite durch den Mittelpunct der ersten geht, so ist die Inclination dieser zweiten stets doppelt so gross als die der ersten.*

Betrachtet man *zwei* Paare conjugirter Puncte ξ, ξ' und η, η', und bezeichnet die Parameter derselben resp. mit Π, Π' und P, P', so ist nach (24.)

$$(25.)\qquad \frac{\Pi}{\sqrt{(\mu\xi)}} = \frac{\Pi'}{\sqrt{(\mu\xi')}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathsf{P}}{\sqrt{(\mu\eta)}} = \frac{\mathsf{P}'}{\sqrt{(\mu\eta')}};$$

wodurch die allgemeine Formel (17.) die Gestalt erhält:

$$(26.)\qquad \frac{(\xi\eta)}{\Pi\mathsf{P}} = \frac{(\xi'\eta')}{\Pi'\mathsf{P}'},$$

eine Gestalt, in welcher sie, wie weiterhin gezeigt werden soll, einer wichtigen Verallgemeinerung fähig ist.

§ 2.

Betrachtung zweier Grundkreise, die in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche zu einander conjugirt sind.

Es sei gegeben eine Kugelfläche (o, H), d. h. eine Kugelfläche mit dem Mittelpunct o und dem Halbmesser H. Ferner seien Φ und F irgend zwei in Bezug auf (o, H) zu einander conjugirte Figuren.

Enthält Φ irgend welche Puncte, Kugelflächen, Kreislinien und Kugelcalotten, so wird F in entsprechender Weise ebenfalls aus Puncten, Kugelflächen, Kreislinien und Kugelcalotten zusammengesetzt sein. Enthält z. B. Φ einen Punct ξ, eine Kreislinie β, und eine über β errichtete, durch ξ gehende Kugelcalotte $\mathfrak{C}_{\beta\xi}$, so wird F einen Punct x, eine Kreislinie b und eine Kugelcalotte

$\mathfrak{C}_{b\,x}$ enthälten, die über b steht und durch x geht. Lässt man in Φ den Punct ξ in beliebiger Weise sich bewegen, so wird der zu F gehörige Punct x ebenfalls in Bewegung gerathen, so dass man unendlich viele Calotten von der Form $\mathfrak{C}_{\beta\xi}$, und gleichzeitig unendlich viele correspondirende Calotten von der Form $\mathfrak{C}_{b\,x}$ erhält.

Die zu behandelnde Aufgabe.

Es mögen nun β und b als zwei gegebene *Grundkreise* betrachtet werden; ferner mögen die peripolaren Coordinaten und der Parameter des Punctes ξ in Bezug auf den Grundkreis β mit $\lambda, \omega, \varphi, \Pi$, und andrerseits die peripolaren Coordinaten und der Parameter des Punctes x in Bezug auf den Grundkreis b mit l, w, v, P bezeichnet werden. Es handelt sich um Ermittelung der alsdann zwischen $\lambda, \omega, \varphi, \Pi$ und l, w, v, P stattfindenden Relationen, immer vorausgesetzt, dass sowohl die Grundkreise β und b, als auch die variablen Puncte ξ und x in Bezug auf die Kugelfläche (o, H) zu einander conjugirt sind.

Nähere Determinationen.

Dabei mögen, was die Rechnung der Inclinationen ω und w betrifft, die *oberen* Seiten der äussern Grundflächen von β und b in solcher Weise festgesetzt sein, dass sie entweder einander *zugekehrt*, oder von einander *abgewendet* sind. Ferner mögen, was die Rechnung der Azimuthe φ und v betrifft, die Anfangsmeridianebenen der Kreise β und b unabhängig von einander in ganz *beliebiger* Weise festgesetzt sein.

Was endlich die zur Behandlung der Aufgabe erforderlichen Constanten betrifft, so mögen die Werthe von $\lambda, \omega, \varphi, \Pi$ für den speciellen Punct o, d. i. für das Centrum der Kugelfläche (o, H) mit $\lambda_o, \omega_o, \varphi_o, \Pi_o$, andrerseits die Werthe von l, w, v, P für ebendenselben Punct mit l_o, w_o, v_o, P_o, endlich die Radien der Grundkreise β und b resp. mit B und B bezeichnet sein. Dabei sei bemerkt, dass die Constanten Π_o, P_o leicht ausdrückbar sind durch die Radien B, B und durch den Radius H der gegebenen Kugelfläche (o, H).

Die beiden Kreislinien β und b liegen nämlich, wie die geometrische Anschauung zeigt, auf ein und demselben von o ausgehenden Kegelmantel. Auch stehen die Ebenen der beiden Kreislinien senkrecht gegen ein und dieselbe durch o gehende

Ebene E. Diese Ebene E geht durch die Mittelpuncte der beiden Kreislinien, und schneidet jene Kreislinien in gewissen Puncten, die mit β_n, β_f und b_n, b_f bezeichnet sein mögen, und zwar in solcher Weise, dass $(o\beta_n) < (o\beta_f)$ und $(ob_n) < (ob_f)$ ist. Alsdann liegen offenbar die Puncte o, β_n, b_f in gerader Linie, desgleichen die Puncte o, β_f, b_n. Auch erkennt man sofort, dass β_n und β_f diejenigen Puncte der Kreislinie β repräsentiren, welche dem Puncte o resp. am nächsten und am fernsten sind, und dass Analoges gilt von den Puncten b_n und b_f mit Bezug auf die Kreislinie b. Somit folgt:

$$H^2 = (o\beta_n)\,(ob_f) = (o\beta_f)\,(ob_n),$$

(27). $$\Pi_o = \sqrt{(o\beta_n)\,(o\beta_f)}, \qquad 2\mathsf{B} = (\beta_n\beta_f),$$

$$P_o = \sqrt{(ob_n)\,(ob_f)}, \qquad 2B = (b_n b_f),$$

mithin:

(28.) $$\Pi_o P_o = H^2.$$

Andrerseits ergiebt sich durch Anwendung eines bekannten Satzes[1]):

$$\frac{(\beta_n\beta_f)}{\sqrt{(o\beta_n)\,(o\beta_f)}} = \frac{(b_n b_f)}{\sqrt{(ob_n)\,(ob_f)}}$$

d. i. mit Rücksicht auf (27.):

(29.) $$\frac{\mathsf{B}}{\Pi_o} = \frac{B}{P_o}.$$

Vermittelst dieser Gleichungen (28.), (29.) ist man in der That Π_o, P_o durch B, B, H auszudrücken im Stande.

Aus der Construction der Puncte β_n, β_f ergiebt sich beiläufig, dass o und β_n in *ein und derselben* Meridianebene des Grundkreises β liegen, während β_f in der *diametral entgegengesetzten* Meridianebene sich befindet. Analoges gilt für die Puncte o, b_n, b_f. Folglich ist z. B.

(29.a) *das Azimuth φ_o des Punctes o eben so gross wie dasjenige des Punctes β_n, und andrerseits das Azimuth v_o als Punctes o eben so gross wie dasjenige des Punctes b_n.*

Die Beziehung zwischen den Variablen ω und w.

Sind ξ und x irgend zwei in Bezug auf die Kugelfläche (o, H) einander conjugirte Puncte, so findet dieselbe Conjunction

1) Vergl. die Formel (4.) auf Seite 133.

auch statt zwischen den (schon früher betrachteten) durch diese Puncte sich bestimmenden Calotten $\mathfrak{C}_{\beta\xi}$ und $\mathfrak{C}_{bx}$. Lässt man ξ nach ∞, d. i. nach einem unendlich fernen Ort laufen, so wandert gleichzeitig x nach o; und umgekehrt: lässt man ξ nach o wandern, so geht gleichzeitig x nach ∞. Folglich sind

(30.) $$\mathfrak{C}_{\beta\infty} \text{ und } \mathfrak{C}_{bo}$$

conjugirte oder correspondirende Calotten; desgleichen

(31.) $$\mathfrak{C}_{\beta o} \text{ und } \mathfrak{C}_{b\infty}.$$

Nun sind offenbar $\mathfrak{C}_{\beta\infty}$ und $\mathfrak{C}_{b\infty}$ nichts Anderes als die *äusseren Grundflächen* der Kreise β und b; und die Formeln (30.), (31.) sagen also aus, dass *die äussere Grundfläche des Kreises β der Calotte $\mathfrak{C}_{bo}$*, und andrerseits *die äussere Grundfläche des Kreises b der Calotte $\mathfrak{C}_{\beta o}$ correspondirt*[1]. Auch sind zufolge jener Formeln (30.), (31.)

(32.) $$\omega = 0 \text{ und } w = w_0$$

correspondirende Werthe der Variablen ω und w; desgleichen:

(33.) $$\omega = \omega_0 \text{ und } w = 0.$$

Dabei bezeichnen ω_0 und w_0 die Coordinaten des Punctes o in Bezug auf β und b, oder (anders ausgedrückt) die Inclinationen der Calotten $\mathfrak{C}_{\beta o}$ und $\mathfrak{C}_{bo}$, d. h. diejenigen Winkel, unter welchen diese Calotten geneigt sind gegen die oberen Seiten der äusseren Grundflächen von β und b.

Geben wir dem variablen Punct ξ eine unendlich kleine Verrückung $\xi\xi'$, und dem correspondirenden Punct x die entsprechende Verrückung xx', so erhalten wir im Ganzen vier Calotten, welche mit σ, σ' und s, s' bezeichnet sein mögen:

(34.) $$\begin{aligned} \sigma &= \mathfrak{C}_{\beta\xi}, & s &= \mathfrak{C}_{bx}, \\ \sigma' &= \mathfrak{C}_{\beta\xi'}, & s' &= \mathfrak{C}_{bx'}. \end{aligned}$$

Sind nun ω und w die Inclinationen der Calotten σ und s, ferner $\omega + d\omega$ und $w + dw$ diejenigen der Calotten σ' und s', so repräsentirt offenbar $d\omega$ den Winkel, unter welchem σ und σ' am Grundkreise β zusammenstossen, desgleichen dw denjenigen Winkel, unter welchem s und s' am Grundkreise b zusammenstossen. Diese Winkel aber müssen, weil die einander corre-

1) Beiläufig folgt hieraus z. B., dass die *innere* Grundfläche des Kreises β der zu $\mathfrak{C}_{bo}$ *supplementaren* Calotte correspondirt.

spondirenden Figuren σ, σ' und s, s' in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich sind, von *gleicher Grösse* sein. Somit folgt

(35.) $$d\omega = dw,$$

und hieraus durch Integration:

(36.) $$\omega = w + \text{Const.},$$

oder mit Rückblick auf (32.):

(37.) $$\omega = w - w_0.$$

Bei dieser Formel, welche das Ziel unserer gegenwärtigen Untersuchung, nämlich *die gesuchte Relation zwischen* ω *und* w repräsentirt, sind wir gezwungen, noch einen Augenblick zu verweilen.

Es ergiebt sich nämlich aus dieser Formel (37.):

(38.) $$\begin{aligned} &\omega = 0 \quad \text{für} \quad w = w_0, \\ \text{und } &\omega = 2\pi \quad \text{für} \quad w = w_0 + 2\pi. \end{aligned}$$

Wir würden also, falls wir ω zwischen 0 und 2π rechnen wollten, durch die Formel (37.) gezwungen sein, w zwischen w_0 und $w_0 + 2\pi$ zu rechnen. Um eine solche Unsymmetrie zu vermeiden, wollen wir lieber der Beurtheilung von ω und w *gar keine* Schranken auferlegen, diese Inclinationen also von den oberen Seiten der betreffenden äusseren Grundflächen aus rechnen, im Uebrigen aber *unbeschränkt* lassen;

(39.) *so dass z. B.* ω *für eine gegebene Calotte* σ **unendlich viele** *Werthe besitzt, die um ganze Vielfache von* 2π *von einander abweichen, und Analoges von* w *gilt.*

Hierdurch gewinnt die Formel (37.) folgende Gestalt:

$$\omega \equiv w - w_0, \pmod{2\pi},$$

oder einfacher geschrieben folgende:

(40.) $$\omega \equiv w - w_0.$$

Somit erhalten wir z. B.:

$$\begin{aligned} &\omega \equiv 0 \quad \text{für} \quad w \equiv w_0, \\ \text{und } &\omega \equiv -w_0 \quad \text{für} \quad w \equiv 0, \end{aligned}$$

und hieraus durch Vergleichung mit (32.), (33.):

(41.) $$-w_0 \equiv \omega_0, \quad \text{d. i.} \quad \omega_0 + w_0 \equiv 0,$$

eine Relation, die leicht verificirt werden kann durch directe

geometrische Betrachtung. Uebrigens kann diese Relation (41.) dienen, um unserer Hauptformel (40.):

$$\omega \equiv w - w_0 \tag{42.a}$$

andere Gestalten zu geben, so z. B. folgende:

$$w \equiv \omega - \omega_0, \tag{42.b}$$

oder auch die mehr symmetrische Gestalt:

$$\omega - \tfrac{1}{2}\omega_0 \equiv w - \tfrac{1}{2}w_0. \tag{42.c}$$

Durch diese Formeln (42. a, b, c) ist die gesuchte Relation zwischen ω und w in drei verschiedenen Gestalten dargestellt; wobei zu beachten die zwischen den Constanten ω_0 und w_0 vorhandene Relation (41.).

Ableitung eines Satzes, welcher zwei Paare conjugirter Puncte und ein Paar conjugirter Kreise betrifft.

Sind ξ, η, ζ irgend drei Puncte, und x, y, z die in Bezug auf die Kugelfläche (o, H) conjugirten Puncte, so ist nach einem bekannten Satz [1]:

$$\begin{aligned} \frac{(\xi\eta)}{\sqrt{(o\xi)\,(o\eta)}} &= \frac{(xy)}{\sqrt{(ox)\,(oy)}}, \\ \frac{(\xi\zeta)}{\sqrt{(o\xi)\,(o\zeta)}} &= \frac{(xz)}{\sqrt{(ox)\,(oz)}}, \\ \frac{(\eta\zeta)}{\sqrt{(o\eta)\,(o\zeta)}} &= \frac{(yz)}{\sqrt{(oy)\,(oz)}}; \end{aligned} \tag{43.}$$

woraus durch Multiplication resp. Division folgt:

$$\frac{(\xi\eta)\,(o\zeta)}{(\xi\zeta)\,(\eta\zeta)} = \frac{(xy)\,(oz)}{(xz)\,(yz)}. \tag{44.}$$

Diese Formeln (43.), (44.) bleiben [2] in Gültigkeit, wenn man statt der Puncte ζ, z zwei einander conjugirte Kugelflächen σ, s nimmt; nur sind alsdann unter den Symbolen $(p\sigma)$, ps) die Längen der von p an σ und s gelegten *Tangenten* zu verstehen, jede Tangente gerechnet vom Ausgangspunct bis zum Berührungspunct. Somit folgt aus (44.), falls man gleichzeitig zum Quadrat erhebt:

$$\frac{(\xi\eta)^2\,(o\sigma)^2}{(\xi\sigma)^2\,(\eta\sigma)^2} = \frac{(xy)^2\,(os)^2}{(xs)^2\,(ys)^2}. \tag{45.}$$

1) Vergl. die Formel (4.) auf Seite 133.

2) Vergl. wiederum Seite 133.

Nimmt man statt der *Kugelflächen* σ, s zwei über den Grundkreisen β, b errichtete, einander correspondirende *Calotten* σ, s, so ist nach (15.):

$$(\xi\sigma)^2 = \frac{\sin(\omega_\sigma - \omega_\xi)}{\sin\omega_\sigma}\,\Pi_\xi^2, \qquad (xs)^2 = \frac{\sin(w_s - w_x)}{\sin w_s}\,P_x^2,$$

$$(46.)\qquad (\eta\sigma)^2 = \frac{\sin(\omega_\sigma - \omega_\eta)}{\sin\omega_\sigma}\,\Pi_\eta^2, \qquad (ys)^2 = \frac{\sin(w_s - w_y)}{\sin w_s}\,P_y^2,$$

$$(o\sigma)^2 = \frac{\sin(\omega_\sigma - \omega_o)}{\sin\omega_\sigma}\,\Pi_o^2, \qquad (os)^2 = \frac{\sin(w_s - w_o)}{\sin w_s}\,P_o^2.$$

Hier repräsentirt ω_σ die Inclination der Calotte σ. Ferner bezeichnen ω_ξ, ω_η, ω_o die Inclinationen der Puncte ξ, η, o in Bezug auf den Grundkreis β, oder (genauer ausgedrückt) die Inclinationen derjenigen drei über β stehenden Calotten, welche resp. durch ξ, η, o gehen. Ferner bezeichnen Π_ξ, Π_η, Π_o die Parameter der Puncte ξ, η, o wiederum in Bezug auf den Grundkreis β. Endlich haben w_s und w_x, w_y, w_o und P_x, P_y, P_o analoge Bedeutungen für die Calotte s und die Puncte x, y, o mit Bezug auf den Grundkreis b. Durch Substitution der Werthe (46.) in (45.) folgt sofort:

$$(47.)\quad \left(\frac{(\xi\eta)\,\Pi_o}{\Pi_\xi\,\Pi_\eta}\right)^2 \frac{\sin(\omega_\sigma - \omega_o)\sin\omega_\sigma}{\sin(\omega_\sigma - \omega_\xi)\sin(\omega_\sigma - \omega_\eta)} = \left(\frac{(xy)\,P_o}{P_x\,P_y}\right)^2 \frac{\sin(w_s - w_o)\sin w_s}{\sin(w_s - w_x)\sin(w_s - w_y)}.$$

Nun ist aber nach (42. a):

$$(\alpha.)\ \ldots\ldots\ldots \qquad \omega_\sigma \equiv w_s - w_o,$$

ferner nach (42. b):

$$(\beta.)\ \ldots\ldots\ldots \qquad \omega_\sigma - \omega_o \equiv w_s,$$
$$\omega_\xi - \omega_o \equiv w_x,$$
$$\omega_\eta - \omega_o \equiv w_y,$$

und wie hieraus durch Subtraction folgt:

$$(\gamma.)\ \ldots\ldots\ldots \qquad \omega_\sigma - \omega_\xi \equiv w_s - w_x,$$
$$(\delta.)\ \ldots\ldots\ldots \qquad \omega_\sigma - \omega_\eta \equiv w_s - w_y.$$

Mit Rücksicht auf diese Relationen $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$ gewinnt die Formel (47.) die einfache Gestalt:

$$(48.)\qquad \left(\frac{(\xi\eta)\,\Pi_o}{\Pi_\xi\,\Pi_\eta}\right)^2 = \left(\frac{(xy)\,P_o}{P_x\,P_y}\right)^2;$$

so dass wir also zu folgendem Satz gelangen:

Sind zwei Kreislinien β, b und vier Puncte ξ, η, x, y in solcher Weise gegeben, dass β, ξ, η zu b, x, y conjugirt sind in Bezug auf irgend eine Kugelfläche (o, H), so findet zwischen den Entfernungen $(\xi\eta)$ und (xy) die Relation statt:

$$\frac{(\xi\eta)\,\Pi_o}{\Pi_\xi\,\Pi_\eta} = \frac{(xy)\,P_o}{P_x P_y}, \tag{49.}$$

wo Π_ξ, Π_η, Π_o die Parameter der Puncte ξ, η, o in Bezug auf den Kreis β, und P_x, P_y, P_o die Parameter der Puncte x, y, o in Bezug auf den Kreis b vorstellen[1]).

Lässt man den Punct η nach o gehen, so wandert y nach ∞, d. i. nach einem unendlich fernen Ort. Somit folgt aus (49.):

$$\frac{(\xi o)}{\Pi_\xi} = \frac{(x\infty)\,P_o}{P_x\,P_\infty}$$

oder falls man beachtet, dass nach der Definition des Parameters (Seite 135) $\frac{(x\infty)}{P_\infty} = 1$ ist:

$$\frac{(\xi o)}{\Pi_\xi} = \frac{P_o}{P_x}. \tag{50.}$$

Und in analoger Weise ergiebt sich:

$$\frac{(xo)}{P_x} = \frac{\Pi_o}{\Pi_\xi}. \tag{51.}$$

Ferner erhält man durch Division der Formeln (50.), (51.):

$$\frac{(\xi o)}{(xo)} = \frac{P_o}{\Pi_o}\left(\frac{\Pi_\xi}{\Pi_x}\right)^2,$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{(\xi o)\,\Pi_o}{\Pi_\xi\,\Pi_\xi} = \frac{(xo)\,P_o}{P_x P_x}. \tag{52.}$$

---

1) Bezeichnet man die kürzeste und längste Kante des von ξ nach β gelegten Kegels resp. mit $(\xi\xi_n)$ und $(\xi\xi_f)$, andrerseits die kürzeste und längste Kante des von x nach b gelegten Kegels resp. mit (xx_n) und (xx_f), so ist bekanntlich

$$\Pi_\xi = \sqrt{(\xi\xi_n)\,(\xi\xi_f)}, \quad \text{und} \quad P_x = \sqrt{(xx_n)\,(xx_f)}.$$

Aeusserst einfach würde nun der Beweis des Satzes (49.) sich führen lassen, wenn sich nachweisen liesse, dass die Puncte ξ_n und x_n, ebenso ξ_f und x_f einander conjugirt seinen in Bezug auf die Kugelfläche (o, H). Das aber ist, wie aus der Betrachtung speciellerer Fälle leicht hervorgeht, **nicht** der Fall.

Jedenfalls unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass wir hier zu dem Satze (49.) auf einem Umwege gelangt sind, und dass eine einfache rein geometrische Ableitung desselben sich werde finden lassen.

Specieller Fall des gefundenen Satzes.

Denkt man sich die Kreislinie β mit all' ihren Puncten *auf* der Kugelfläche (o, H) gelegen, so wird b mit β identisch; so dass in diesem Fall die Parameter Π und P sich alle auf *ein und denselben* Kreis beziehen, mithin durch *ein und denselben* Buchstaben, z. B. durch Π bezeichnet werden können. Demgemäss gewinnt die Formel (49.) in diesem Fall die Gestalt:

$$\frac{(\xi\eta)\,\Pi_o}{\Pi_\xi\,\Pi_\eta} = \frac{(xy)\,\Pi_o}{\Pi_x\,\Pi_y},$$

oder einfacher geschrieben:

$$\frac{(\xi\eta)}{\Pi_\xi\,\Pi_\eta} = \frac{(xy)}{\Pi_x\,\Pi_y}. \tag{53.}$$

Dies aber ist der schon früher, in (26.), erhaltene Satz, nur in etwas anderer Bezeichnungsweise.

Die Relationen zwischen den Variablen λ, φ und l, v.

Wir haben (Seite 142) die peripolaren Coordinaten des Punctes ξ in Bezug auf β mit λ, ω, φ, andrerseits die peripolaren Coordinaten des conjugirten Punctes x in Bezug auf b mit l, w, v benannt, und dargethan, dass alsdann zwischen ω und w die Relation (42. a, b, c) stattfindet. Es handelt sich nun um die Aufstellung der Relationen zwischen λ, φ und l, v.

Zu diesem Zweck benutzen wir die allgemeine Formel (49.):

$$\frac{(\xi\eta)\,\Pi_o}{\Pi_\xi\,\Pi_\eta} = \frac{(xy)\,P_o}{P_x\,P_y},$$

sowie die aus dieser abgeleitete Formel (50.):

$$\frac{(o\eta)}{\Pi_\eta} = \frac{P_o}{P_y},$$

aus denen durch Division folgt:

$$\frac{(\xi\eta)}{\Pi_\xi}\,\frac{\Pi_o}{(o\eta)} = \frac{(xy)}{P_x}, \tag{54.}$$

oder, falls man für η, y zwei auf den Kreislinien β, b gelegene Puncte β, b substituirt [1]):

$$\frac{(\xi\beta)}{\Pi_\xi}\,\frac{\Pi_o}{(o\beta)} = \frac{(xb)}{P_x}. \tag{55.}$$

1) Es wird kein Missverständniss veranlassen, dass wir hier die *Puncte* mit denselben Buchstaben wie die *Kreislinien* bezeichnen.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten [1])

von ξ mit λ, ω, φ,	von x mit l, w, v,
von β mit 0, $*$, φ_β,	von b mit 0, $*$, v_b,
von o mit λ_o, ω_o, φ_o,	von o mit l_o, w_o, v_o,

so folgt aus (7.), (10.):

$$(\xi\beta)^2 = 2B^2 \frac{(1+\lambda^2)-(1-\lambda^2)\cos(\varphi-\varphi_\beta)}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2},$$

$$\Pi_\xi^2 = 2B^2 \frac{2\lambda}{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2},$$

und hieraus durch Division:

$$\left(\frac{(\xi\beta)}{\Pi_\xi}\right)^2 = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\cos(\varphi-\varphi_\beta),$$

mithin: $$\left(\frac{(o\beta)}{\Pi_o}\right)^2 = \frac{1+\lambda_o^2}{2\lambda_o} - \frac{1-\lambda_o^2}{2\lambda_o}\cos(\varphi-\varphi_o),$$

und ebenso: $$\left(\frac{(xb)}{P_x}\right)^2 = \frac{1+l^2}{2l} - \frac{1-l^2}{2l}\cos(v-v_b).$$

Durch Substitution dieser Werthe in (55.) folgt:

$$(56.)\quad \frac{\lambda_o}{\lambda}\,\frac{(1+\lambda^2)-(1-\lambda^2)\cos(\varphi-\varphi_\beta)}{(1+\lambda_o^2)-(1-\lambda_o^2)\cos(\varphi-\varphi_o)} = \frac{(1+l^2)-(1-l^2)\cos(v-v_b)}{2l}.$$

Die Puncte β und b sind irgend zwei conjugirte Puncte auf den gleichnamigen Kreislinien (mithin zwei Puncte, welche mit o in gerader Linie liegen), und können also z. B. in die speciellen Lagen β_n und b_f, oder auch in die Lagen β_f und b_n versetzt werden [2]). Im ersten Fall wird, wie die unmittelbare geometrische Anschauung zeigt:

$$\varphi_\beta \equiv \varphi_o \qquad \text{und} \qquad v_b \equiv v_o + \pi,$$

andrerseits im zweiten Fall:

$$\varphi_\beta \equiv \varphi_o + \pi \qquad \text{und} \qquad v_b \equiv v_o.$$

Somit erhält man aus (56.) die specielleren Formeln:

$$(57.)\quad \frac{\lambda_o}{\lambda}\,\frac{(1+\lambda^2)-(1-\lambda^2)\cos(\varphi-\varphi_o)}{2\lambda_o^2} = \frac{(1+l^2)+(1-l^2)\cos(v-v_o)}{2l},$$

$$\frac{\lambda_o}{\lambda}\,\frac{(1+\lambda^2)+(1-\lambda^2)\cos(\varphi-\varphi_o)}{2} = \frac{(1+l^2)-(1-l^2)\cos(v-v_o)}{2l},$$

---

1) Die ω-Coordinate von β, und die w-Coordinate von b sind unbestimmt, und deswegen durch einen $*$ bezeichnet.

2) Die Puncte β_n, β_f und b_n, b_f sind auf Seite 143 definirt worden.

aus denen durch Addition und Subtraction folgt:

$$58.)\quad \begin{aligned} &\frac{1+\lambda_0^2}{2\lambda_0}\,\frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \frac{1-\lambda_0^2}{2\lambda_0}\,\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{1+l^2}{2l},\\ &\frac{1-\lambda_0^2}{2\lambda_0}\,\frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \frac{1+\lambda_0^2}{2\lambda_0}\,\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{1-l^2}{2l}\cos(v-v_0). \end{aligned}$$

Diese Formeln (58.) repräsentiren die gesuchten Relationen zwischen den Variablen λ, φ und l, v.

§ 3.

Prüfung der erhaltenen Resultate durch Anwendung auf einen speciellen Fall.

Die zwischen λ, ω, φ und l, w, v erhaltenen Relationen lauten nach (42. b) und (58.) folgendermassen:

$$w \equiv \omega - \omega_0,\ (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$

$$(59.)\quad \begin{aligned} &\frac{1+\lambda_0^2}{2\lambda_0}\,\frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \frac{1-\lambda_0^2}{2\lambda_0}\,\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{1+l^2}{2l},\\ &\frac{1-\lambda_0^2}{2\lambda_0}\,\frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \frac{1+\lambda_0^2}{2\lambda_0}\,\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{1-l^2}{2l}\cos(v-v_0). \end{aligned}$$

Wir wollen nun diese Relationen auf den speciellen Fall in Anwendung bringen, dass die Kreislinie β auf der Kugelfläche (o, H) liegt, also β mit b identisch, und $\lambda_0 = 1$ ist. Alsdann nehmen die Relationen folgende Gestalt an:

$$(60.)\quad \begin{aligned} w &\equiv \omega - \omega_0,\ (\mathrm{mod}\ 2\pi),\\ +\frac{1+\lambda^2}{2\lambda} &= \frac{1+l^2}{2l},\\ -\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\cos(\varphi-\varphi_0) &= \frac{1-l^2}{2l}\cos(v-v_0). \end{aligned}$$

Aus der *zweiten* folgt: $\lambda + \lambda^{-1} = l + l^{-1}$, mithin entweder $\lambda = l$ oder $\lambda = l^{-1}$. Letzteres aber ist unmöglich, weil λ sowohl als l ihrer Definition nach stets zwischen 0 und 1 liegen. Somit ergiebt sich also:

$$(\alpha.)\qquad \lambda = l;$$

und mit Rücksicht hierauf nimmt die *dritte* Relation die Gestalt an: $\cos(\varphi - \varphi_0) + \cos(v - v_0) = 0$, d. i.

$$(\beta.)\qquad \varphi - \varphi_0 \equiv \pm(v - v_0) + \pi,\ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Ueber die Rechnung der Azimuthe φ, v ist im Allgemeinen keinerlei Regel aufgestellt worden. Setzt man für den gegenwärtigen Spe-

cialfall fest, dass beide Azimuthe in gleicher Richtung gerechnet werden sollen, so ist in der Formel (β.) das *obere* Vorzeichen zu nehmen; also:

$$(\gamma.) \qquad \varphi - \varphi_0 \equiv v - v_0 + \pi, \pmod{2\pi}.$$

Setzt man ferner fest, dass beide Azimuthe φ und v, mithin auch φ_0 und v_0 von *ein und derselben* Anfangsmeridianebene gerechnet werden sollen, so wird:

$$(\delta.) \qquad \varphi_0 \equiv v_0 + \pi, \pmod{2\pi};$$

denn φ_0 war [vergl. (29. a)] das Azimuth von β_n, und v_0 dasjenige von b_n; und man übersieht sofort, dass jene beiden Puncte β_n und b_n beim Uebergange vom allgemeinen Fall zum gegenwärtigen Specialfall in diametral gegenüberliegende Puncte sich verwandelt haben. Durch Addition von (γ.), (δ.) folgt sofort:

$$(\varepsilon.) \qquad \varphi \equiv v, \pmod{2\pi}.$$

Die dem betrachteten Specialfall entsprechenden Relationen (60.) können also mit Rücksicht auf die Ergebnisse (α.) und (ε.) folgendermassen geschrieben werden:

$$(61.) \qquad \begin{aligned} \omega + (-w) &\equiv \omega_0, \pmod{2\pi}, \\ \lambda &= l, \\ \varphi &\equiv v, \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Relationen mit den früher direct für diesen Specialfall abgeleiteten Relationen (24.), so bemerkt man vollständigen Einklang; nur dass $-w$ statt ω' steht. Dieser Unterschied erklärt sich daraus, dass die *oberen* Seiten der äusseren Grundflächen der Kreise β und b, von denen aus die Inclinationen ω und w zu rechnen sind, *entgegengesetzte* Lagen haben (vergl. die Determinationen auf Seite 142), und dass dieser Gegensatz auch auf den hier betrachteten Specialfall, wo beide Kreise zusammenfallen, sich übertragen hat.

§ 4.

Beiläufige Bemerkungen.

Wir wollen zunächst Figuren betrachten, die einander conjugirt sind in Bezug auf eine gegebene Kugelfläche σ. Sind ξ und ξ' zwei in solcher Weise conjugirte Puncte, und legt man durch ξ beliebig viele Kugelflächen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, so werden die

conjugirten Kugelflächen α', β', γ', ... sämmtlich durch ξ' gehen. Auch werden je zwei solche Kugelflächen wie α und α' die gegebene Kugelfläche σ in *ein und demselben* Kreise schneiden. Nimmt man nun insbesondere für die durch ξ gehenden Flächen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ lauter zu σ *orthogonale* Kugelflächen, so werden offenbar $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *identisch*. Somit ergiebt sich folgender Hülfssatz:

Legt man durch einen Punct ξ unendlich viele Kugelflächen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, welche sämmtlich orthogonal sind zu einer gegebenen Kugelfläche σ, so werden all' jene Kugelflächen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ noch durch einen zweiten Punct ξ' gehen. Dieser letztere ist der zu ξ in Bezug auf σ conjugirte Punct.

Fügt man nun eine neue Kugelfläche (o, H) hinzu, d.i. eine Kugelfläche, die mit beliebigem Radius H um einen beliebigen Punct o beschrieben ist, und construirt man zu der oben betrachteten Figur $\sigma, \xi, \xi', \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die in Bezug auf (o, H) conjugirte Figur $s, x, x', a, b, c, \ldots$, so sind, wie aus dem Satze der Aehnlichkeit folgt, $a, b, c, \ldots$ sämmtlich orthogonal zu s; also sind (nach dem eben bewiesenen Hülfssatz) die Puncte x, x' einander conjugirt in Bezug auf s. Somit ergiebt sich folgendes Resultat:

Sind zwei Puncte ξ, ξ' einander conjugirt in Bezug auf eine Kugelfläche σ, und construirt man in Bezug auf eine im Raum beliebig gegebene Kugelfläche (o, H) die zu σ, ξ, ξ' conjugirte Figur s, x, x', so werden x, x' einander conjugirt sein in Bezug auf s.

Dieser Satz ist keineswegs neu. Doch dürfte die hier für denselben gegebene Ableitung ihrer Einfachheit willen beachtenswerth sein.

C. Neumann, *Zur Theorie der conformen Abbildung einer ebenen Fläche auf eine Kreisfläche.*[1])

Die unendliche Ebene sei durch eine geschlossene Curve σ in einen äussern Theil $\mathfrak{A}$ und einen innern Theil $\mathfrak{I}$ zerlegt. Markirt man innerhalb $\mathfrak{I}$ einen *festen* Punct j (von beliebiger Lage), und will man nun die Fläche $\mathfrak{I}$ durch conforme Abbildung in eine Kreisfläche vom *Radius Eins* verwandeln, deren Centrum dem Punkte j entspricht, so hat man auf σ eine Massenvertheilung auszubreiten, welche für alle auf σ gelegenen Puncte aequipotential[2]) ist mit einer in j concentrirten Masse Eins. Bezeichnet man alsdann das Potential dieser Belegung auf einen innerhalb $\mathfrak{I}$ gelegenen *variablen* Punct x, y mit $G = G(x, y)$, ferner das Potential jener in j concentrirten Masse Eins auf denselben Punct mit $T = T(x, y)$, und setzt man endlich

$$U = G - T, \tag{1.}$$

so bewerkstelligt sich die in Rede stehende Abbildung vermittelst der Formel:

$$\xi + i\eta = e^{U+iV}, \tag{2.}$$

wo V die zu U conjugirte Function bezeichnet, d. i. diejenige, welche zu U in der Beziehung steht: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$.

Dieser einfache Satz, zu welchem ich bereits im Jahre 1861 bei meinen Untersuchungen über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ (Borchardt's Journal, Bd. 59) gelangt war, wird ohne Zweifel sein Analogon haben *für die Fläche* $\mathfrak{A}$. Und diesen analogen Satz will ich hier in Kürze mittheilen.

---

1) Das Manuscript wurde eingereicht am 11. März 1878.

2) Selbstverständlich ist hier vom *Logarithmischen* Potential die Rede. Und zwar definire ich das Logarithmische Potential eines gegebenen Massensystems $m, m', m'', \ldots$ auf einen variablen Punct (x, y) durch die Formel:

$$m \lg \frac{1}{r} + m' \lg \frac{1}{r'} + m'' \lg \frac{1}{r''} + \ldots,$$

wo $r, r', r'', \ldots$ die Entfernungen der Puncte $m, m', m'', \ldots$ von (x, y) vorstellen.

Markirt man auf der Fläche $\mathfrak{A}$ irgend einen festen Punct α, und soll nun diese Fläche $\mathfrak{A}$ durch conforme Abbildung in eine Kreisfläche von *beliebigem Radius* verwandelt werden, deren Mittelpunct dem Puncte α entspricht, so breite man auf der Curve σ eine Belegung von der *Gesammtmasse Eins* aus, welche für alle auf σ gelegenen Puncte, *abgesehen von einer additiven Constanten*, äquipotential ist mit einer in α concentrirten Masse Eins. Bezeichnet man alsdann das Potential dieser Belegung auf einen innerhalb $\mathfrak{A}$ gelegenen *variablen* Punct x, y mit $H = H(x, y)$, ferner das Potential jener in α concentrirten Masse Eins auf denselben Punct mit $T = T(x, y)$, und setzt man endlich

$$U = H - T, \tag{3.}$$

so bewerkstelligt sich die in Rede stehende Abbildung vermittelst der Formel:

$$\xi + i\eta = e^{U+iV}; \tag{4.}$$

wo V die zu U conjugirte Function bezeichnet, oder allgemeiner vermittelst der Formel:

$$\xi + i\eta = Ae^{U+iV}, \tag{5.}$$

wo A eine beliebige reelle oder complexe Constante bezeichnet. Durch geeignete Wahl dieser Constanten A kann man erreichen, dass der Radius der entstehenden Kreisfläche einen vorgeschriebenen Werth, z. B. den Werth Eins, erhält.

Dabei sei bemerkt, dass das Potential H durch die für dasselbe gegebene Definition eindeutig bestimmt ist, und dass andererseits auch seine Existenz für solche Fälle ausser Zweifel steht, wo die gegebene Curve σ zweiten Ranges und keine zweisternige ist. Beides ergiebt sich aus meinen »*Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential*« (Leipzig 1877); und zwar ersteres aus dem Theorem A^{add} (vgl. das genannte Werk, Seite 38), letzteres aus meiner Methode des arithmetischen Mittels, (vgl. das genannte Werk, Seite 214, Nro. 24, oder besser noch die Math. Annalen, Bd. 13, Seite 284—286).

F. Zirkel, *Ueber die krystallinischen Gesteine längs des 40. Breitegrades in Nordwest-Amerika.* *)

Um an einer möglichst passenden Stelle einen geologischen Durchschnitt durch die ausgedehnten und wenig bekannten westlichen Territorien zu gewinnen, hatte sich das Kriegsministerium der Ver. Staaten entschlossen, eine längs des 40. Breitegrades sich bewegende Aufnahme zu veranstalten, und vermittelst der Congress-Acte vom 2. März 1866 und vom 3. März 1867 trat dieses Unternehmen unter der Bezeichnung «U. S. Geological exploration of the fortieth parallel» und unter der vortrefflichen und sachkundigen Leitung von Clarence King ins Leben, welchem namentlich noch die Herren S. F. Emmons und Arnold Hague zur Seite standen. Während einer längeren Reihe von Jahren wurde ein durchschnittlich 150—200 Miles breiter Querstreifen von der californischen Ostgrenze an durch Nevada (anfänglich noch Territorium), Utah, Colorado, Idaho und Wyoming bis nach Kansas sorgfältig topographisch und geologisch aufgenommen. Die Ergebnisse dieser grossartigen Durchforschung werden augenblicklich in einer Reihe von stattlichen Bänden, begleitet von vorzüglich ausgeführten Kartenwerken, publicirt. Mir wurde die Einladung zu Theil, die sehr umfangreichen Sammlungen der krystallinischen Gesteine zu bearbeiten, und nachdem ich mich in Folge dieser Aufforderung zunächst nach Nordamerika begeben hatte, um eine Einsicht in die Collectionen zu erhalten, und eine Auswahl des nach Europa zu Sendenden zu treffen, stellten mir die Expeditionsmitglieder bereitwilligst alle ihre Ergebnisse zur Verfügung, deren man zur Gewinnung eines geologischen Untergrundes für die petrographischen Studien bedurfte. Seitdem sind die letzteren abgeschlossen und veröffentlicht worden [1]). Weil aber diese Druckwerke nicht in den Buchhandel

---

*] Vorgetragen am 22. Januar 1877; zum Druck übergeben am 4. Februar 1878.

1) Geological exploration of the fortieth parallel. Clarence King, U. S. geologist in charge. Vol. VI. Microscopical petrography, by F. Zirkel. Submitted to the chief of engineers and published by order of the secretary

kommen, sondern blos von der amerikanischen Regierung geschenkweise vertheilt werden, ist es vielleicht nicht unangemessen, im Folgenden einen kurzen Auszug aus dem hauptsächlich Erwähnenswerthen zu geben.

Die Reihenfolge der behandelten Gesteine ist: Krystallinische Schiefer und Zugehöriges, Granit und Granitporphyr, Felsitporphyr, Syenit, Diorit, Hornblendeporphyrit, Diabas, Melaphyr, Gabbro, als vortertiäre Massen; sodann Propylit mit Quarzpropylit, Hornblende-Andesit mit Dacit, Trachyt, Rhyolith, Glasgesteine, Augitandesit, Basalt, Leucitgestein und allerlei klastische Anhängsel, als tertiäre (und spätere) Eruptivgebilde. Bekanntlich hat F. v. Richthofen bezüglich der letzteren erschlossen, dass im Allgemeinen an den verschiedensten Eruptionsstätten der Erde Propylit, Andesit, Trachyt, Rhyolith, Basalt zeitlich in dieser Ordnung aufeinanderfolgen, ein Ergebniss, welches auch hier auf den ausgedehnten Gebieten längs des 40. Breitegrades, wo diese Felsarten in so typischer Weise entwickelt, und die geologischen Lagerungsbeziehungen verhältnissmässig klar zu durchschauen sind, seine glänzende Bestätigung fand.

Krystallinische Schiefer und zugehörige Gesteine.

Unter den krystallinischen Schiefern von Nevada und Utah ist ein wegen seiner sonstigen Seltenheit bemerkenswerthes Gneissgestein ziemlich verbreitet, wie es z. B. am Nordende der Lake Range, Nev., ansteht. Der Feldspath ist fast lediglich frischer und reichgestreifter Plagioklas (nur ganz spärlich Orthoklas), neben dem Biotit und dem Quarz enthält das apatitreiche Gestein auch viel tiefdunkelgrüne Hornblende, so dass dieser Gneiss förmlich ein Aequivalent des quarzführenden Glimmerdiorits darstellt, wie der gewöhnliche Glimmergneiss dem Granit, der gewöhnliche Hornblendegneiss dem Syenit entspricht, und man könnte ihn geradezu einen Dioritgneiss nennen.

Humboldt Range ist ein ausgezeichnetes Gebiet für das Studium der archaeischen krystallinischen Schiefer. Am Westabhang dieser Berge erscheint ein brauner Glimmerschiefer mit

of war under authority of congress. Illustrated by twelve plates. Washington, Government Printing office, 1876.

gelbgrauen, bis 8 Mm. dicken Knoten von Fibrolith. Die Hauptmasse ist ein Gemenge von Quarz, braunem und farblosem Glimmer, wenig Plagioklas; die Knoten ergeben sich u. d. M. als ein sehr inniges verfilztes Gewebe höchst dünner farbloser nadelförmiger gerader oder gekrümmter Mikrolithen; dieselben sind zu Büscheln zusammengehäuft und diese Büschel als solche mit einander verwoben; nach aussen zu wird der Filz lockerer und hier sieht man deutlich, dass derselbe mit farbloser Quarzmaterie getränkt ist; der äussere Rand besteht aus Quarz, in dem die Nadelbüschel nur ganz vereinzelt liegen. Der Bucholzit von Bodenmais ist ein zum Verwechseln ähnliches Gebilde und hier wie dort liegen auch die Faserbüschel selbständig im Magnesiaglimmer. Sillimanit oder Andalusit (vielleicht auch Disthen) ist es, welcher dieselben zusammensetzt. — Im Clover Cañon (Humboldt Mountains) sind die Orthoklase der gewöhnlichen, sehr hornblendearmen, aber mit Apatiten förmlich gespickten Gneisse durch die Menge der Flüssigkeitseinschlüsse ausgezeichnet, deren sie stellenweise so viele enthalten, dass sie darin die an ihnen reichsten Quarze der Granite übertreffen; diese liquiden, mit Hohlräumen vergesellschafteten Einschlüsse sind im Gegensatz zu denen im Quarz, innerhalb des Feldspaths entweder rechteckig oder höchst unregelmässig mit zahlreichen Verästelungen gestaltet. — Die glimmerarmen Gneisse aus diesem Cañon führen eine grosse Menge der bekannten merkwürdigen Doppeleinschlüsse, deren innerster Theil aus flüssiger Kohlensäure besteht. Diese Einschlüsse treten überhaupt in einer ganz unerwarteten Anzahl in den Quarzen der Gneisse, Glimmerschiefer und Granite hier längs des vierzigsten Breitegrades auf, so dass sie in ihnen fast eine gewöhnliche Erscheinung darstellen und deshalb in der Folge auch nur ab und zu noch Erwähnung finden sollen. — Auch die oben angeführten Dioritgneisse kommen in diesem Clover Cañon vor, wo ihre Hornblende die wunderlichsten Fracturen und Zersplitterungen aufweist, und sie abermals viel Apatit (mit grossen wässerigen Einschlüssen), ausserdem Titanit enthalten.

In dem Gneiss vom Secret Pass, Humboldt Range, wurde auch zum ersten Mal ein mikroskopischer Gemengtheil aufgefunden, der in den mehr nach Osten gelegenen krystallinischen Schiefern eine besondere Rolle spielt, der Zirkon; er bildet grelle vielfacettirte blassbräunlichgelbe prismatische Kryställchen (wie

es scheint, die Combination P. ∞P∞. *m* P *n*) und ist vollkommen demjenigen aus den fichtelgebirgischen Eklogiten gleich [1]). Mr. R. W. Woodward, der Chemiker der Untersuchung des vierzigsten Breitegrades, hat in der That auch in diesem Gneiss, sowie in mehreren anderen den Gehalt an Zirkonerde später constatiren können. Neben diesen Gneissen findet sich im Clover Cañon ein Amphibolit von einer seltenen Reinheit, indem er frei ist von jedwedem anderen selbst mikroskopischen Gemengtheil, frei namentlich von Feldspath, Quarz, Apatit, Titanit. Die Hornblende führt einzelne unzweifelhafte Flüssigkeitseinschlüsse, die ersten, die ich in diesem Mineral sah, welches jedenfalls im Allgemeinen äusserst arm daran ist; vielleicht darf man glauben, dass die faserige Textur der Hornblende einer Einhüllung von flüssigen Partikeln nicht günstig ist. — In dem zirkonführenden Glimmerschiefer vom Spruce Mountain, Peoquop Range, liegen in dem Biotit und zwar stets parallel seiner Lamellirungsebene die zahlreichen, dünnen und zarten Mikrolithen, welche sich netzartig zu einem förmlichen Geflecht durchkreuzen, oder zierliche Sterne und Büschel erzeugen, vielfach auch eine Tendenz besitzen, unter einander Winkel von 60° oder 120° zu bilden. Es sind dies dieselben Interpositionen, wie ich sie zuerst im Biotit des bretonischen Kersantons wahrgenommen habe [2]) und wie sie,

1) Auf die Verbreitung mikroskopischer Zirkone in sächsischen Granuliten und erzgebirgischen Glimmerschiefern habe ich zuerst in einem an G. Leonhard gerichteten Briefe hingewiesen (N. Jahrb. f. Mineral. 1875, S. 628). Später that dann Törnebohm die Gegenwart des Zirkons in einer grossen Reihe von noch anderen Gesteinen dar (Geol. För. i Stockholm Förh. B. III. No. 34; N. Jahrb. f. Mineral. 1877, S. 97). Letztere Untersuchungen sind durchaus richtig, wenn auch Rosenbusch (Massige Gesteine 1877, S. 18) die Bestimmung des Zirkons für noch nicht hinreichend begründet erachtet. Vgl. auch E. Meyer in Zeitschr. d. d. geol. Ges. 1878, S. 10.

2) Sitzungsber. der. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1875, S. 202. Kalkowsky will in den Biotiten der Zschopauer Glimmerschiefer die sich unregelmässig durchkreuzenden und zu Büscheln zusammengeschossenen Mikrolithen nicht als primäre Einwachsungen, sondern als Zersetzungsproducte anerkennen, welche sich mit der Entfärbung der Glimmerblättchen erst in diesen einstellen, übrigens bei fortschreitender Umwandlung der letzteren, wie es scheine, wieder daraus verschwinden (N. Jahrb. f. Mineral. 1876, S. 701). Dem möchte ich, zur Unterstützung der Ursprünglichkeit aller dieser Mikrolithen, entgegenhalten, dass die unregelmässig und die sich unter 120° durchkreuzenden, sowie die Büschel bildenden schwerlich von einander getrennt werden können, ferner dass in den ameri-

namentlich schön unter 60° sich durchkreuzend, im grünlichen und bräunlichen Biotit des Glimmerschiefers vom Bruin Peak, Colorado, vorkommen.

Ogden und Farmington Cañon in der Wahsatch Range, Utah, sind Gebiete, wo die archaeischen krystallinischen Schiefer vorzügliche Entwicklung gefunden haben: Hornblende-Gneisse oft mit Zirkon, hornblendefreie Glimmergneisse mit fast erbsendicken, adernweise von Chlorit durchzogenen Granatkörnern, Hornblendeschiefer erscheinen hier; ein graulich-fleischfarbiger möglicherweise cambrischer Quarzit aus dem Farmington Cañon ist bemerkenswerth, weil er u. d. M. aus lauter abgerundeten Körnern von Quarz besteht, welche gemäss ihrem Ursprung als zusammengeschwemmte klastische Gebilde die verschiedenste Structur aufweisen: einige sind sehr reich, andere äusserst arm an liquiden Einschlüssen, etliche enthalten haarförmige dunkle Mikrolithen, die in benachbarten gänzlich fehlen, gewisse werden von parallelen Streifen einer schmutzig gelbgrauen staubähnlichen Materie durchzogen; Quarz, nicht Opal, dient als Bindemittel der Quarzkörner, aber jene höchst interessante, zuerst von Törnebohm wahrgenommene Erscheinung, dass der cämentirende Quarz dieselbe optische Orientirung erlangt hat, wie das von ihm umlagerte Korn, ist hier nicht zu beobachten. — Am Ende des Big Cottonwood Cañon, Wahsatch, findet sich als archaeisches Glied ein ziemlich grobkörniges Gemenge von Quarz und braunem Granat, mit feinem Epidotgespinnst in den Höhlungen; die Granaten erweisen sich höchst ausgezeichnet aus einzelnen Lagen aufgebaut, meist nur 0,0015 Mm. dick, so dass 666 Schichten auf 1 Mm. kommen. Die einzelnen Lagen oder Lagencomplexe sind wohl verschieden heller und dunkler gelbbraun gefärbt; gewisse derselben zeigen schwache Spuren von Doppelbrechung, welche aller Wahrscheinlichkeit nach hier auf Druck und Spannung beruht. Der begleitende Quarz führt grosse Flüssigkeitseinschlüsse von prächtig pyramidaler Form, so scharf, dass man in der klaren Masse aufs deutlichste selbst die

---

kanischen Schiefern diese Nadeln auch in ganz dunkelbraunem, völlig frisch gebliebenem Biotit liegen. Und nachträglich mag noch hinzugefügt werden, dass E. Meyer in den Glimmerschiefern des St. Gotthard diese Mikrolithen sich weit aus dem Glimmer hinaus, in den angrenzenden Quarz hinein erstrecken sah, ein vollgültiges Zeugniss, dass sie keine Umwandlungsproducte des ersteren sind.

Ecken und Kanten auf der unteren Seite dieser «negativen Krystalle» sehen kann.

Andere ausgedehnte Regionen sind in Colorado aus alten archaeischen Schiefern zusammengesetzt, unter welchen hornblendeführende Gesteine im Allgemeinen vorzuwalten scheinen, im Contrast zu Deutschland, wo umfangreiche Ablagerungen geologisch aequivalenter Schiefer sich frei von oder arm an Hornblende erweisen. Der silberweisse feinschuppige Glimmerschiefer vom Red Creek, Unita Mountains, gleicht täuschend dem bekannten Paragonitschiefer vom Monte Campione bei Faido, namentlich weil auch hier die grossen Krystalle von blassblauem Disthen darin liegen; ausserdem führt das Gestein grosse Staurolithe, wie die dem letzteren benachbarten dunkleren Glimmerschiefer von Airolo; u. d. M. erscheint ein Gemenge von fast farblosen, unregelmässig hexagonalen Blättchen von Paragonit nebst leistenförmigen Querschnitten derselben, Quarz und sehr spärlichen dunklen, öl- und braungrünen Biotitlamellen; mikroskopische Individuen von Staurolith oder Disthen sind nicht vorhanden, dagegen dort wie hier ziemlich viele bläulichgraue Durchschnitte von Turmalin. Die gelbbraunen Schnitte der grösseren amerikanischen Staurolithe sind abermals in der typischen Weise mit farblosen rundlichen Quarzkörnern dicht erfüllt. — Der an Hornblende und Plagioklas reiche Gneiss vom Rawlings Peak, Wyoming, enthält in seinen Quarzen ausserordentlich zahlreiche und schöne kochsalzwürfelführende Flüssigkeitseinschlüsse, deren Verbreitung in den Quarzen der älteren Gesteine hier längs des vierzigsten Breitegrades eine unvermuthet weite und so grosse ist, dass im Folgenden diese Gebilde nur noch ab und zu Erwähnung finden sollen. Hier bewegt sich auch die Libelle von selbst deutlich in der Chlornatriumlösung, und diese letztere enthält ausser dem ausgeschiedenen Würfelchen auch ganz kleine dünne blassgrüne Hornblendemikrolithen, welche auf der Wand des umgebenden Quarzes aufsitzen und in das Fluidum hineinragen. Bei der Hornblende dieses Gesteins bildet an Durchschnitten nach der Symmetrie-Ebene die Auslöschungsrichtung mit der Prismenaxe einen Winkel von 13 — 14°.

In der Park Range, Col., wird am Mount Davis und Mount Zirkel ausgezeichnete Lagenstructur der Gneisse durch abwechselnde helle feldspath-(plagioklas-)reiche und dunkle hornblende-

reiche Zonen hervorgebracht. Die Quarze beherbergen in besonderer Schönheit Doppeleinschlüsse von flüssiger Kohlensäure und einfache Einschlüsse von Wasser neben einander; und dieselben verschieden gearteten Interpositionen liegen auch vereint in den Quarzkörnern der schneeweissen Quarzite, welche in den Hornblendegneissen am Nordende der Park Range eingeschaltet sind, und bekräftigen so vielleicht die geologische und genetische Zusammengehörigkeit beider Gesteine. — Im North Park kommen auch ganz ausgezeichnete Dioritgneisse vor, deren Feldspath schon makroskopisch eine reiche Streifung trägt; im French Creek sind an solchen Plagioklasen die beiden Zwillingsverwachsungen nach $\infty \breve{P} \infty$ und $0P$ in der bekannten, zuerst von Stelzner hervorgehobenen Weise zugleich ausgebildet. — Der makroskopisch fast ganz homogen erscheinende archaeische Quarzit vom Gipfel des Mill Peak erweist sich u. d. M. als ein Aggregat farbloser eckiger Quarzkörnchen von durchschnittlich nur 0,015 Mm. Durchmesser, vermengt mit sehr kleinen, nach $-\frac{1}{2}R$ zwillingsgestreiften Kalkspathkörnchen — eine seltene Erscheinung in solchen Quarziten.

Der Unterschied in der mineralogischen Constitution zwischen den Glimmergneissen und den Hornblendegneissen dieser Gegenden lässt sich folgendermaassen zusammenfassen:

Glimmer-(Biotit-)Gneisse: Orthoklas weitaus vorwaltend, nur wenig Plagioklas; Flüssigkeitseinschlüsse im Quarz häufiger; Apatit seltener oder fehlend; Titanit gänzlich abwesend; Zirkon selten oder fehlend.

Hornblende-Gneisse: Plagioklas reichlich, mitunter vorherrschend; Flüssigkeitseinschlüsse im Quarz spärlicher; Apatit gewöhnlich sehr reichlich, mitunter fehlend; Titanit ab und zu vorhanden; Zirkon in ziemlicher Menge oder abwesend.

Apatit findet sich hier nur in solchen hornblendereichen Felsarten, welche zugleich Feldspath enthalten; in den reinen Hornblendegesteinen, wie auch in den blos aus Quarz und Hornblende zusammengesetzten Massen ist er ausserordentlich selten, selbst wenn solche die geologischen Aequivalente von, oder regelmässige Einlagerungen in apatitreichen Hornblendegneissen darstellen, und in allen die Hornblende völlig übereinstimmende Structur und Beschaffenheit besitzt.

Granit.

Die Granite des vierzigsten Breitegrades sind zum Theil zweifellos eruptive Gesteine, welche augenscheinlich durch Sedimentärschichten von verschiedenem geologischem Alter hindurchgebrochen sind, zum Theil aber nur Dependenzen der alten krystallinischen Schiefer, abwechselnd mit Gneissen u. s. w. und ohne jedwedes Anzeichen einer eruptiven Natur. Wie immer man den Ursprung der krystallinischen Schiefer deuten mag, der dieser begleitenden Granite muss der gleiche sein; diese nicht eruptiven, zumeist auch geschichteten Granite mögen im Folgenden der Kürze halber metamorphische genannt werden. Die entschieden eruptiven Granite zerfallen ihrerseits in zwei Gruppen: die eine umfasst die älteren von vorjurassischem Alter, die andere diejenigen, welche durch die Juraschichten gedrungen sind. Für die ausgedehnten Massen des Eruptivgranits der Sierra Nevada hat J. D. Whitney das jurassische Alter dargethan, und gleiches Alter wird, obschon es sich nicht strict beweisen lässt, von den amerikanischen Geologen für eine beträchtliche Menge von jüngeren Graniten längs des 40. Breitegrades angenommen, die nach ihrer petrographischen Beschaffenheit und ihrem ganzen Habitus mit denen der Sierra Nevada identisch sind. Wo daher im Folgenden von jurassischem Granit die Rede ist, soll damit jene Abtheilung bezeichnet werden, für welche der Sierra Nevada-Granit den Typus des Alters und der Constitution darstellt.

Eine ausführliche Untersuchung sehr zahlreicher Vorkommnisse hat das Ergebniss geliefert, dass die verschiedenen geologischen Granitabarten dieses Gebietes durch besondere makro- oder mikroskopische Eigenthümlichkeiten, wie folgt, charakterisirt sind:

I. Metamorphische (archaeische) Granite: Gesteine, oftmals röthlich gefärbt durch secundär infiltrirtes Eisenoxyd; häufig ist der gewöhnliche Biotit durch ein dunkelgrünes chloritisches Mineral ersetzt, meistens sind aber sowohl Glimmer als dieser letztere Gemengtheil nicht eben reichlich vorhanden; Hornblende und Apatit sind selten; Titanit und primärer Eisenglanz fehlen; die Quarze sind häufig arm an Flüssigkeitseinschlüssen und oft gerundet, weshalb sie fast wie klastische abgeriebene Sandkörner aussehen; dieser Eindruck wird noch dadurch unterstützt, dass die Flüssigkeitseinschlüsse nicht durch

die ganze Quarzmasse regellos zerstreut, oder zu Haufen versammelt sind, welche einzelne Strahlen aussenden, sondern ganz scharf in einzelne Zeilen angeordnet erscheinen, welche bei schwacher Vergrösserung wie gerade schwarze Linien, einander parallel oder durchkreuzend, den Quarz durchziehen, unverrückt bis an den Rand desselben, wo sie hart abschneiden — eine Erscheinung, welche ebenso die Quarze der Grauwacken darbieten.

II. Aeltere Eruptivgranite (vorjurassisch): Orthoklas gewöhnlich vorwaltend; frei von Titanit und von primärem Eisenglanz, ärmer an Magnetit; die Gemengtheile sind in viel minderem Maasse als bei der Gruppe III verunreinigt durch fremde solide krystallinische mikroskopische Interpositionen. Zwei Hauptabtheilungen können unterschieden werden:

1) mit weissem Glimmer, die seltenere Abtheilung, kaum je dunklen Glimmer führend, immer frei von Hornblende, und frei von oder sehr arm an Apatit.
2) Mit dunklem Magnesiaglimmer, die häufigere Abart, zerfallend in
   a) ohne Hornblende,
   b) mit grobkörniger Hornblende, dann gewöhnlich verhältnissmässig viel Apatit führend.

III. Jüngere Eruptivgranite: Reicher an Gemengtheilen überhaupt, welche auch in der Regel frischer sind; charakterisirt durch Titanit, dunkeln Glimmer und Hornblende, durch relativ sehr viel Plagioklas neben dem Orthoklas; die Feldspathe sind immer weiss, nie röthlich; Feldspathe und Quarze überaus verunreinigt durch Hornblende- und Biotitstaub; stets frei von weissem Glimmer, gewöhnlich reich an Apatit, häufig primäre Eisenglanztäfelchen führend. Magnetit verhältnissmässig reichlich; Quarze öfter reich als arm an Flüssigkeitseinschlüssen.

Es ist selbstverständlich, dass sich diese Charakteristik lediglich auf die untersuchten Vorkommnisse des vierzigsten Parallels bezieht, und dass sie keineswegs auch allgemein Anwendung auf die Granite anderer Gegenden finden kann. Für jene ist sie aber so allgemein gültig, dass, nachdem einmal die leitenden Gegensätze bei einer Suite verschiedenalteriger Gesteine ermittelt waren, jedesmal mit glücklichem Erfolg die Probe gemacht werden konnte, aus der petrographischen Beschaffen-

heit das (festgestellte aber während der Entscheidung unbekannte) Alter des Granits herauszulesen.

Der archaeische sehr glimmerarme Granit vom Granite Peak, Pah-Ute Range, Nevada, ist wegen seiner liquiden Einschlüsse in den Quarzen bemerkenswerth, welche dreifacher Art sind, nämlich 1) solche von vorwiegend wässeriger Natur, deren Libelle bei einer Erwärmung auf über 100° C. nicht verschwindet; 2) gewöhnliche einfache Einschlüsse von flüssiger Kohlensäure, deren Libelle schon bei 31° condensirt wird; 3) die bekannten eigenthümlichen Doppeleinschlüsse, deren Inneres aus liquider Kohlensäure besteht; letztere lassen manchmal erkennen, dass diese innerliche Flüssigkeit nach aussen nicht rund, sondern durch eine unregelmässig und winkelig verlaufende Linie begrenzt ist, wodurch es sehr wahrscheinlich wird, dass die äusserste Zone in der That eine feste Masse ist, indem, wenn sie ebenfalls eine Flüssigkeit darstellte, die liquide Kohlensäure darin vermuthlich die Kugelform annehmen würde. Einschlüsse von allen drei Arten liegen nebeneinander selbst in einem und demselben Quarzkorn.

Zu den archaeischen Graniten gehören ferner diejenigen hinter Overland Ranch, Humboldt Range, welche in den krystallinischen Schiefern eingeschaltet sind; der dunkle Glimmer in ihnen zeigt immerhin, wie auch in den anderen, geologisch aequivalenten eine gewisse Tendenz zum Parallelismus: stellenweise sind mehr oder weniger parallel gelagerte Lamellen desselben zu Flasern verwoben, diese einzelnen Flasern liegen aber nicht parallel. Der Plagioklas ist sehr spärlich, selbst im Vergleich mit den hornblendefreien Eruptivgraniten. Die Apatite in diesen metamorphischen Graniten sind sehr dünn und lang ausgedehnt, dabei gewöhnlich in viele Gliedchen aufgelöst, während diejenigen der Eruptivgranite viel gedrungener und bedeutend weniger zerstückelt erscheinen. Der durch die krystallinischen Schiefer so weit verbreitete Zirkon findet sich auch auf sehr bezeichnende Weise in den zugehörigen Graniten dieser Localität als verhältnissmässig grosse Individuen.

Ferner sind zu den archaeischen Graniten zu stellen der vom Bruin Peak (durch dessen trüben Feldspath Epidotschnüre hindurchsetzen) und vom Davis Peak (dessen Orthoklas so faserig ist, wie der der sächsischen Granulite), beide in der Park Range, Colorado. — Besonders typisch aber sind die archaeischen

Granite vom Grand Encampment Creek, welche z. Th. sehr arm an Glimmer sind, z. Th. fast überhaupt gar kein glimmerähnliches Mineral enthalten (namentlich auch nicht den für die eruptiven Granite leitenden braunen Glimmer), z. Th. statt dessen ein lauchgrünes stark dichroitisches chloritähnliches Mineral führen, welches viel weniger spaltbar und viel unvollkommener lamellirt ist und auch nur kurze verworren gelagerte Schuppen bildet. — Auch in der Medicine Bow Range (North Park) treten die archaeischen Granite hervor: der vom Südabhang des Clark's Peak, sehr grobkörnig mit dunklem grossblätterigem Glimmer, ist reich an Quarzen mit ungemein vielen Flüssigkeitseinschlüssen und langen dünnen schwarzen Mikrolithen; bemerkenswerth sind in ihm die absolut impelluciden bis erbsengrossen Partieen eines schwarzen metallglänzenden Erzes, wohl Magneteisen, weil seine Umrisse so oft viereckig erscheinen und gelbrothe kurze Zäckchen von Eisenoxyd gewissermaassen aus ihm herausdringen; sehr sonderbar ist, dass diese dicken dunkeln Körner u. d. M. zunächst rundum oder fast allseitig umgeben werden von einem durchschnittlich blos 0,5 Mm. breiten Saum eines sehr feinkörnigen Gemenges, welches seinerseits aus Quarz, Feldspath und farblosem Glimmer in kaum 0,1 Mm. grossen Partikeln besteht; solcher Glimmer erscheint sonst nicht als Gemengtheil, sondern ist auf diese peripherische Zone um die Erzkörner beschränkt, wie auch die Feinkörnigkeit dieses zonalen Aggregats gegen das sonst so grobe Korn des Gesteins merkwürdig absticht.

Andere ebenfalls zu den archaeischen zu rechnende Granite sind diejenigen von Cherokee Butte (Medicine Bow Range), worin die abgerundeten Quarze, wie dies auch in den Grauwacken der Fall, auffallend abweichende Dimensionen besitzen, indem ganz dicke Körner neben höchst kleinen vorkommen, die granatführenden vom Bellevue Peak in derselben Gegend, und die sehr feinkörnigen vom Elk Mountain, welche wieder statt des Glimmers schmutzig grüne chloritische Substanz besitzen. — Der Granat vom Long's Peak, Colorado Range, enthält u. d. M. farblose, grelle, stark längsgefurchte, lang prismatische Krystalle von Tremolit, welche sich im Querschnitt als ausgezeichnete polysynthetische Zwillinge nach $\infty P \infty$ erweisen, bis 0,01 Mm. breit.

Besonders für die Granite der Laramie Range ist geologisch

die Zugehörigkeit zu der archaeischen Gruppe sehr evident, da sie, wie der aus dem Granite Cañon, deutlich geschichtet sind und in die krystallinischen Schiefer geradezu übergehen. Zum Theil sind diese Granite röthlich, indem secundäres gelbrothes Eisenoxyd massenhaft auf allen Capillarspältchen in und zwischen den Gemengtheilen dendritisch eingedrungen ist. Der Quarz aus dem Granite Cañon enthält eine colossale Menge von blassbraunen, graugelben und grauen scharfen Glimmerblättchen, kaum über 0,005 Mm. gross, welche nach allen Richtungen darin stecken; auf einer quadratischen Quarzoberfläche von 0,2 Mm. Seitenlänge waren, fast in einer Ebene gelegen, 60 Glimmerblättchen zu zählen, was für 1 Qmm. Oberfläche 1500 derselben in einer Ebene ergeben würde. Sehr grobkörnig ist der archaeische Granit vom Virginia Dale, Laramie Hills; der vom Signal Peak in derselben Bergkette führt auch wieder statt des Magnesiaglimmers das chloritische Mineral; der secundär-rothe von der Westseite der Laramie Hills, n. w. von Sherman, enthält faserigen Orthoklas wie die Granulite und fast gar keinen lamellirten Gemengtheil, weder Glimmer noch Chlorit. Alle diese Granite von den Laramie Hills erweisen sich völlig frei von Apatit.

Zu den älteren Eruptivgraniten gehört z. B. im W. der aus dem Granite Cañon, s. ö. vom Winnemucca-See, Nevada, bestehend aus Orthoklas (mit Flüssigkeitseinschlüssen), Plagioklas, Quarz (dicht erfüllt mit geraden oder gebogenen nadelförmigen Mikrolithen, welche so dünn sind, dass sie gewöhnlich selbst bei stärkster Vergrösserung nur einen zarten schwarzen Strich darstellen), Biotit und relativ wenig Apatit, frei von Hornblende und Titanit. Ferner der w. von Rye Patch, Montezuma Range, und der von der Montezuma Mine bei Oreana, Nevada, beide ziemlich zersetzt. Labradorisirender Feldspath liegt in dem grobkörnigen Granit von der Havallah Range, Nevada, n. von Summit Springs; Orthoklase und Plagioklase enthalten hier rhombische und sechsseitige, scharfe, gelbe, braune, grauviolette und schwarze Täfelchen und Nadeln, stellenweise in Striemen, Fetzen und Körnchen aufgelöst, ferner blassgrüne Hornblendemikrolithen, oft mit anklebenden Magnetitkörnern; über die Einbettungsrichtung lässt sich nichts sicheres ausmachen. Andere Feldspathe und zwar blos Orthoklase zeigen jene zarte Faserung, wie sie auch den labradorisirenden von Frede-

riksvärn eigen ist. Die Quarze dieses Granits enthalten wiederum alle drei Arten von Flüssigkeitseinschlüssen, wie sie oben S. 165 in denen vom Granite Peak, Pah-Ute Range, aufgezählt wurden.

Völlig abweichend ist der ältere Eruptivgranit von den Ravenswood Hills, Shoshone Range, feinkörnig und blos weissen Glimmer, ohne eine Spur von Biotit, führend, eine Zusammensetzung, die es nach längerer Vergleichung der Vorkommnisse geradezu überflüssig macht, nach Hornblende oder Titanit suchen zu wollen. Ein dunkler feinkörniger älterer Granit mit viel Biotit und auch Hornblende steht am Westende des Winnemucca Peak, Nevada, an. Andere ältere eruptive Granite erscheinen am Nannie's Peak, Seetoya Mts, mit sehr frischem Plagioklas und, wie es scheint, etwas mehr angegriffenem Orthoklas, der hin und wieder eine so deutliche Zonenstructur aufweist, wie ein rhyolithischer oder trachytischer Sanidin; in dem Gestein kommen Stellen vor, welche ein mikroskopisch feines Gemenge von ziemlich gut krystallisirten Quarzen (durchschnittlich nur 0,1 Mm. dick) mit Feldspathen sind, eine Aggregationsweise, wie sie in noch grösserer Feinheit so oft die Grundmasse der Felsitporphyre bildet. Grössere Quarze führt dieser Granit, in denen jeder Flüssigkeitseinschluss sein Kochsalzwürfelchen beherbergt, manche besitzen deren zwei. — Zu dieser Abtheilung gehören auch noch die Granite von Shoshone Knob (mit 5 Mm. langen Hornblendeprismen neben Biotit) und aus dem Woodranch Cañon, beide in der Shoshone Range.

Ein ganz anderer Typus (vgl. oben S. 164) tritt uns in den jüngeren Eruptivgraniten entgegen, von denen eines der charakteristischsten Vorkommnisse am Nordende der Truckee Range ansteht, zusammengesetzt aus relativ wenig Orthoklas (stellenweise mit ausgezeichneter Zonenstructur), viel sehr frischem Plagioklas, Biotit, Hornblende (grüne Schnitte liefernd), viel Quarz, reichlich Apatit, dem bezeichnenden Titanit[1]) und dicken Magnetitkörnern. Eine auffallende Durcheinanderkrystallisation hat in diesen Gesteinen stattgefunden: Feldspathe und Quarze enthalten zarte Blättchen von Biotit, Nädelchen und Lamellen von Hornblende, gelbrothe Täfelchen von Eisenglanz,

1) Clarence King hat schon seit langer Zeit dargethan, dass die eruptiven Jura-Granite, und nur diese, durch makroskopischen Titanit charakterisirt sind.

Magnetitkörner, der Apatit steckt überall, namentlich aber in und an dem Glimmer. Kein Gemengtheil beherbergt Glaseinschlüsse und nirgends zeigt sich eine Spur einer Grundmasse. Das entschiedene Vorwalten des Plagioklases und das Auftreten der Hornblende entfernt dieses Gestein einigermaassen von den eigentlichen Graniten, denen es die reichliche Quarzmenge und der Biotit wieder zuführt; es steht eigentlich mehr zwischen Granit und Glimmerdiorit, als zwischen Granit und Syenit, und besitzt seine völlige Analogie in der Gneissreihe. Bei den Plagioklasen eines und desselben Gesteins ergibt sich die Neigung der Auslöschungsrichtung gegen die Projection der Verwachsungsebene der Lamellen bei den Durchschnitten in der Zone $0P : \infty P\infty$ (im makrodiagonalen Hauptschnitt) als nicht constant, doch ist die Auslöschungsschiefe meist nur gering. — Sehr ähnlich diesem sind die ebenfalls jüngeren Eruptivgranite, welche an dem Hügel w. von Granite Creek Station, Granite Range, und in den Pah-supp und Sahwave Mountains in Nevada vorkommen; die Orthoklase der letzteren enthalten ausgezeichnet schön plagioklastische Einlagerungen, und die Quarze aller sind reich an jenen dunklen haarähnlichen oft gekrümmten Mikrolithen, wie sie völlig übereinstimmend auch in den Quarzen der ächt archaeischen Granite gefunden werden; ein Mikrolith dieser Art war hier 0,35 Mm. lang, 0,0015 Mm. dick, also 233 mal länger als dick.

In den Pah-tson Mountains kommen beiderlei Eruptivgranite neben einander vor: der ältere führt an der Granite Ridge Muscovit, welcher eine förmlich rosettenartige concentrisch-strahlige Gruppirung zeigt; in dem Crusoe Cañon Granat und Lepidolith, eisblumenartig auseinanderlaufend, wie der Lithionglimmer in den grobkörnigen Graniten von Bagnères de Luchon in den Pyrenäen und im Pegmatit von Pressburg; beide sind ganz frei von Biotit, Hornblende und Titanit, sehr arm an Magnetit. Die jüngeren jurassischen Granite aus diesen Bergen (ö. vom Pahkeah Peak, Grass Cañon) stimmen ganz mit denen aus der Truckee Range überein; mit besonderer Vorliebe hat sich in allen der Titanit die Ränder des braunen Glimmers als Ausscheidungsstelle aufgesucht; hier und da ist sogar wohl mehr Plagioklas als Orthoklas vorhanden. Hornblende und Magnesiaglimmer sind hier mehrfach in eigenthümlicher Weise verwachsen, indem in einem grünen Hornblendeschnitt Lagen von braunem Biotit und

umgekehrt in letzterem Lamellen von Hornblende eingeschaltet sind, wobei die Begrenzung und Verschränkung eine derartige ist, dass hier schwerlich an stattgefundene Umwandlungsprocesse gedacht werden kann. Genau dieselbe Erscheinung wiederholt sich in jüngeren titanitführenden Graniten, welche den alten grobkörnigen Granit der Havallah-Range gangweise durchsetzen, und deren Quarze von den dunkeln haarförmigen Mikrolithen und Kochsalzwürfel-führenden Flüssigkeitseinschlüssen geradezu wimmeln; mitunter liegt ein kurzer Mikrolith in einem solchen liquiden Einschluss.

Titanit führen auch die Granite der Wachoe Mountains, deren Orthoklase sämmtlich sehr stark metamorphosirt sind, während die frischen und klaren alle reichliche trikline Zwillingsstreifung zeigen; die dicken Apatite enthalten hier ausgezeichnete Reihen von flüssigen Einschlüssen. Zu der jüngeren Abtheilung gehören ferner noch Granite aus der Wahsatch Range; z. B. der sehr charakteristische, an dicken Titanit-Körnern überreiche und viel Eisenglanz führende aus dem Little Cottonwood Cañon, dessen Feldspathe, Quarze und Biotite in unendlicher Fülle mit Hornblendepartikeln durchwachsen sind; der vom Claytons Peak mit scharfen grellen Apatiten, welche sonderbar plattgedrückt sind, indem zwei gegenüberliegende Prismenflächen oft fünfmal so breit sind, wie eine der vier anderen; der von der Mündung des Big Cottonwood Cañon mit seinen zierlich zonal alterirten Feldspathen, welche im Durchschnitt schon makroskopisch drei bis vier innerliche trübe concentrische Streifen enthalten, die durch klare Substanz getrennt werden, worin man zahlreiche Flüssigkeitseinschlüsse gewahrt.

Granitporphyr.

Unter dieser Bezeichnung sind porphyrartige Gesteine vereinigt, welche den üblichen Gegensatz zwischen ausgeschiedenen Krystallen (von Orthoklas und Quarz) und einer Grundmasse darbieten, wobei die letztere aber makroskopisch zu feinkörnig ist, um das Gestein zu den porphyrartigen Graniten zu stellen, und andererseits nicht den Grad scheinbarer Homogenität besitzt, der die Grundmasse der eigentlichen Felsitporphyre charakterisirt. Das Auftreten von Hornblende begründet alsdann den Namen Syenitgranitporphyr.

Wenig charakteristisch sind die Vorkommnisse von den Granite Hills, w. vom Spanish Spring Valley, eine lichtgelblichgraue Masse mit weisslichen Feldspathen und schwarzen Hornblendepünktchen, recht typisch dagegen die vom Nannie's Peak, Seetoya Range, und vom Maggie's Peak, welche ebenfalls geologisch mit Graniten zusammenhängen; bei ihnen treten aus der höchst feinkörnigen gelbgrauen Grundmasse reichlich Feldspathe und scharfe sechsseitige Biotitblättchen (bis 2 Mm. gross, selten in den analogen Gesteinen Deutschlands), weniger Quarze hervor. Die Grundmasse ist in der That vorwaltend ein körniges Gemenge von Feldspath und roh aber selbständig krystallisirtem Quarz (mit gewöhnlich rhombischen Durchschnitten), ohne Andeutung einer amorphen Materie, also vom Granit nur graduell unterschieden; hin und wieder aber hat eine ziemlich weit gediehene Bildung von Sphaerolithen stattgefunden, welche bald mehr Granosphaerite, bald Felsosphaerite sind. Kurze Fasern der letzteren sind auch rings um die kleinen Quarze zu einem förmlichen Strahlenkranz angeschossen, genau wie im Rhyolith vom Baulaberg in Island, nur mit dem Unterschied, dass die Quarze hier nicht die herrlichen Glasdihexaeder, sondern nur Flüssigkeitseinschlüsse enthalten. Neben dem reichlamellirten Glimmer ist auch etwas grüne Hornblende vorhanden. Aehnlich im Aeussern und in Structur ist ein Gestein aus dem Clover Cañon, Humboldt Range, in dessen erbsendicken Quarzen eine ungeheure Anzahl von Doppeleinschlüssen mit flüssiger Kohlensäure liegt.

An den Franklin Buttes, Nev., kommen charakteristische Syenitgranitporphyre vor, mit einer Grundmasse, die zwischen lichtgrünlichgrau und isabellfarbig schwankt, worin recht reichlich weisse Feldspathe, dunkelgrüne Hornblende, graue Quarze und scharfe schwarze Biotite hervortreten. U. d. M. ist auch hier die Grundmasse völlig und zwar ziemlich gleichmässig krystallinisch körnig, die trüben Feldspath- und die klaren Quarzkörner sind durchschnittlich etwa 0,03 Mm. dick. Sphaerolithbildungen fehlen hier. Die Quarze besitzen eine grosse Menge von liquiden Einschlüssen mit Kochsalzwürfelchen, bemerkenswerth, weil ausser diesen chemisch ausgeschiedenen Kryställchen oft noch eine ganze Menge von allerlei fremden, mechanisch aufgenommenen Körperchen in der Flüssigkeit liegt, blassgrüne Nädelchen und Körnchen (wahrscheinlich von Hornblende), blutrothe Eisenglanztäfelchen, u. a. unbestimmbare Dinge, bisweilen so reich-

lich, dass die Libelle keinen Platz zur Rundung findet und eine sackähnliche Krümmung aufweist. Mehrere der grösseren Quarze führen auch trotz der krystallinisch-körnigen Natur der Grundmasse mikrofelsitisch ausgebildete, roh dihexaedrisch gestaltete Einschlüsse (Sorby's stone cavities), aber niemals Partikel eigentlichen Glases[1]). Die Gesteine enthalten Apatit und stellenweise selbst makroskopischen Titanit. Im Allgemeinen ähnlich sind die Gesteine vom Marble Hill, Kinsley District, Nev., welche ebenfalls weniger Mittelglieder zwischen Granit und Felsitporphyr, als zwischen Granitporphyr und Felsitporphyr darstellen; auch hier ist die schwachgrünlichgraue Grundmasse (worin makroskopisch Feldspath, Quarz, Hornblende, Biotit) wieder ganz krystallinisch. Unter den Feldspathen, die oft im Innern noch ganz klar, aussen rahmenähnlich trüb umgewandelt sind, befinden sich manche schöngestreifte Plagioklase, die Hornblende ist gewöhnlich aus Stäben und Mikrolithen aufgebaut und deshalb leicht zur Verwitterung geneigt. Ein Vorkommniss fand sich, welches in jedem Punkte mit den anderen übereinstimmte; nur war die Grundmasse nicht lediglich ein Aggregat von individualisirtem Quarz und Feldspath, sondern ein Theil desselben war durch ausgezeichnet faserige, aber optisch nur schwach wirksame Sphaerolithe ersetzt. Alle diese Gesteine von den Marble Hills führen wiederum Titanit, dessen Association mit der Hornblende an die Zusammensetzung der jüngeren Eruptivgranite erinnert, zu welchen diese Granitporphyre als petrographische Modification vielleicht geologisch gehören.

Hieran schliessen sich ferner die Granitporphyre von den Goose Creek Hills, Nev., an; die Feldspathe in ihrer sehr feinkörnigen, grünlichgrauen Grundmasse sind theilweise zersetzt, mehr ist dies bei der Hornblende der Fall: ihre Contouren sind zwar völlig und scharf erhalten, aber ihre Substanz ist total in lauchgrüne zarte Faserbüschel umgewandelt, welche unter verschiedenen Richtungen aufeinander stossen; zwischen den Fasersystemen liegen schwarze opake eckige Körnchen, wohl gewiss Magnetit und dann auch sicherlich ein Umwandlungsproduct, da

1) Als späterer Zusatz mag hier die Bemerkung Platz finden, dass die Quarze der Granitporphyre von Beucha und von Altenberg i. S. allerdings die ausgezeichnetsten Glaseinschlüsse führen, obschon Rosenbusch (Massige Gesteine, 1877. S. 8) besonders betont, dieselben niemals wahrgenommen zu haben.

sie sich in der frischen Hornblende der entsprechenden Gesteine niemals finden. Ausser diesen beiden Alterationsproducten schliessen die Hornblendedurchschnitte noch einzelne und häufchenartig gruppirte dunkelgrünlichgelbe Körner, aller Wahrscheinlichkeit nach von neugebildetem Epidot, ein; bemerkenswerth ist, dass trotz dieser intensiven Metamorphose, welche drei epigenetische Substanzen erzeugte, die alten Apatitnadeln in der Hornblende sich ganz frisch erhalten haben. In dem ebenfalls hierher gehörigen Syenitgranitporphyr von dem Divide zwischen Bingham und Tooelle Cañons, Oquirrh Mts, Utah, ist die Umwandlung der Hornblende noch weiter gediehen: viel farbloser Kalkspath mit rhomboedrischen Spaltungssprüngen hat sich in den Durchschnitten als viertes Product angesiedelt; die lauchgrüne Alterationsmaterie, worin der Epidot und Magnetit auch hier liegen, ist in einzelnen Strängen und Bändern zugegen, welche in ihrer Richtung sehr genau mit der Spaltung der früheren Hornblende übereinstimmen (sich unter $124\frac{1}{2}^0$ durchschneiden) und knospen- und buchtenartig gegen den Kalkspath abgegrenzt sind, der förmlich die Lücken zwischen ihnen ausfüllt. Auch der Apatit fehlt hier nicht; das Gestein führt abermals Titanit.

In der Wahsatch Range bildet ein zum Granitporphyr gehörendes Gestein einen Gang in dem nördlichen Rücken der Twin Peaks, welcher in seiner sehr feinkörnigen Grundmasse bloss grosse Biotitblätter, keinen Feldspath und Quarz ausgeschieden enthält, die nur mikroskopisch darin stecken; ausserdem eine sehr grosse Menge von Apatit, aber keine Hornblende und deshalb selbstredend auch keinen Titanit. Aehnlich, aber etwas ärmer an Glimmer, grössere Orthoklase und Plagioklase haltend ist ein anderer Gang in den Kalksteinen des Big Cottonwood Cañon derselben Range; er ist absonderlich reich an Eisenkies, welcher förmliche ramificirende Adern durch grössere Quarzkörner bildet, auch als feine Trümer durch Feldspathe zieht und so als Ausfüllungsmasse von Sprüngen dient. Ein dritter Gang findet sich im Granit an der Mündung des Big Cottonwood Cañon. Andere zu den Granitporphyren gehörende Gesteine, welche äusserlich eine gewisse Aehnlichkeit mit den sächsischen, namentlich denen von Altenberg haben, erscheinen am Good Pass ö. vom Parkview Peak, zwischen North und Middle Park, Col., und am Parkview Peak selbst. Die Grundmasse ist schmutzig

gelblichgrau (ebenfalls ganz krystallinisch), in ihr liegen bisweilen zolllange Feldspathe, innen oft von adularartiger Klarheit, aussen milchig getrübt, etwas Quarz (ohne Glaseinschlüsse), schmutzige Hornblende, mitunter auch Biotit, mikroskopisch noch Apatit, Titanit, Magnetit, Eisenkies. Ein Vorkommniss vom Good Pass ist erwähnenswerth, weil hier die grossen Orthoklase so ausgezeichnet um und um auskrystallisirt sind, viel besser noch als z. B. in den porphyrartigen Graniten von Neubau bei Hof. Sie weisen an jedem Individuum die Flächen *T* und *l*, *M*, *P*, *z*, *y*, *n* sehr scharf auf, während die begleitenden Plagioklase auch hier diese vortreffliche Formentwicklung entbehren.

Felsitporphyr.

Eigentliche Felsitporphyre[1]) sind auf dem in Rede stehenden Gebiete nicht gerade sonderlich häufig, und es scheint fast, als

---

1) In seinem höchst vortrefflichen Buch über die massigen Gesteine (1877) nennt Rosenbusch den alten, auf dem Dasein einer makroskopisch nicht auflösbaren Grundmasse beruhenden Unterschied zwischen Granit und Porphyr einen Anachronismus (S. 86), an einer anderen Stelle (S. 25) seine Betonung ein unwissenschaftliches Verfahren, und er will die Porphyre, deren Grundmasse aus durchaus krystallinen, regellos gelagerten Elementen besteht, als Mikrogranite bezeichnen, die im strengsten Sinne nicht zu den Porphyren, sondern zu den Graniten gehören. Dass der Unterschied zwischen Graniten und diesen Porphyren blos ein gradueller ist, ist längst bekannt und kann ja gar nicht bezweifelt werden; aber meinem sehr verehrten Freunde scheint denn doch über dem mikroskopischen Bilde des Dünnschliffs das äussere Ansehen des Handstücks, wovon er gefertigt ist, etwas zu sehr in den Hintergrund getreten zu sein. Neben der mikroskopischen gibt es doch auch noch immer eine makroskopische Petrographie, welche, wenn sie auch nicht so subtile Fragen zu lösen vermag, innerhalb der ihr vorgeschriebenen Grenzen nicht minder wissenschaftlich ist. Ob die Dicke der krystallinischen Elemente nach Tausendstel von Millimetern oder nach Millimetern und Centimetern gemessen wird, ob unverhältnissmässig grosse Krystalle hervortreten oder nicht, das ist am Ende nicht so ganz gleichgültig. Und geologisch gehören die »Mikrogranite« im Allgemeinen gar nicht zu den Graniten, sondern eng zu den anderen eigentlichen basisführenden Quarzporphyren oder Felsophyren. Fast hundert Jahre lange Untersuchungen haben diesen Zusammenhang, der sich insbesondere im Alter ausspricht, dargethan, und auch in der Folge wird auf geologischen Karten wahrscheinlich immer noch der alte Gegensatz zwischen Granit und Felsitporphyr aus guten Gründen zum coloristischen Ausdruck gelangen, schwerlich aber der

ob die sonst verhältnissmässig in dieser Ausbildung seltenen Granitporphyre hier gewissermaassen diejenige geologische und petrographische Rolle spielen, welche z. B. in Deutschland und Frankreich von den Felsitporphyren übernommen wird. Die felsitische Grundmasse dieser westlichen Porphyre besitzt durchgängig eine sehr ausgeprägte mikrogranitische Structur, und nicht-individualisirte glasige oder mikrofelsitische Substanz [1]) ist darin äusserst selten.

Zwischen die der Trias zugerechneten Schichten im Miner's Cañon, Truckee Range, ist ein Felsitporphyr eingeschaltet mit einer hornsteinähnlichen oder hälleflinta-artigen sehr splitterigen, lichtgrünlichgrauen Grundmasse, welche dennoch durch und durch, aber höchst fein krystallinisch ist; die grösseren Ausscheidungen beschränken sich auf Quarze (bis 2 Mm. gross) mit Einschlüssen von Flüssigkeit und Grundmasse, aber keinen Glaskörnern. Milchweisse trübe Orthoklase liegen neben Quarzen in den Porphyren vom Willow Spring, n. vom French Cañon, Montezuma Range und vom Ravenswood Peak, Shoshone Range; die Feldspathe scheinen sehr alterirt, aber wenigstens ein Theil der staubähnlich eingelagerten Gebilde, welche man so gern mit begonnener Kaolinisirung in Verbindung bringt, gibt sich bei sehr starker Vergrösserung mit hinreichender Deutlichkeit als sehr winzige Flüssigkeitseinschlüsse zu erkennen; Einschlüsse der letzteren Art von verhältnissmässig riesigen Dimensionen und ausgezeichnet dihexaedrisch gestaltet, liegen in den Quarzen. Die sonst ganz krystallinische Grundmasse enthält hier und da

---

zwischen Makro- und Mikrogranit einerseits, Felsophyr andererseits überhaupt hervorgehoben werden können. Die Geologen dürften sich kaum entschliessen, die Porphyre des Nahethals den Graniten zuzugesellen, oder die Hallenser Porphyre zum Theil zu den Graniten zu rechnen. Es ist meines Erachtens nach völlig ausreichend, sich bewusst zu sein, dass das Gestein, welches man auf Grund des makroskopischen Befundes Felsitporphyr zu nennen fortfährt, auch Glieder birgt, deren Grundmasse durchaus ordnungslos krystallinisch struirt ist, wie es abermals beim Rhyolith der Fall. Wenn dies bei Special-Untersuchungen gebührend betont wird, wenn man (wie es im englischen Text geschah) derlei Vorkommnisse »Porphyre mit mikrogranitischer Grundmasse« (statt Mikrogranit) nennt, so wird der makroskopischen und mikroskopischen Beschaffenheit, sowie den geologischen Verbandverhältnissen vieler Regionen gebührend Rechnung getragen, und es ist der Vorwurf, einen Anachronismus zu begehen, objectiv nicht gerechtfertigt.

1) Ueber den Begriff Mikrofelsit vgl. den Abschnitt Rhyolith.

kleine Fleckchen gelblichgrauer globulitisch-glasiger Materie; etwas Hornblende ist zugegen und die Orthoklase sind in einer sonst sehr seltenen Weise von Apatitnadeln durchstochen. — Ein ausgezeichneter Felsitporphyr vom Granite Peak, Pah-Ute Range, geologisch gleichalterig mit dem dortigen Granit, führt ausser Orthoklas und Quarz auch weisse Muscovitblättchen in seiner Grundmasse, welche wieder sehr deutlich mikrogranitisch ist, und worin die kleinsten Quarzkörner, von kaum 0,01 Mm. Durchmesser, die schönsten Flüssigkeitseinschlüsse bergen.

Ganz abweichend davon verhält sich ein mit den dortigen Granitporphyren zusammen vorkommender Felsitporphyr von den Franklin Buttes, Nev.: seine gelblichgraue Grundmasse, worin Biotite liegen, ist zwar auch durch und durch krystallinisch körnig, aber die kleinen Quarze derselben enthalten die zierlichsten Glaseinschlüsse; in rundlichen Quarzdurchschnitten von 0,04 Mm. Durchmesser sieht man bisweilen in einer Ebene sechs bis acht derselben. Diese Gebilde pflegen sonst in den Gemengtheilen zu fehlen, wo das Gestein eine völlig krystalline Structur angenommen hat, und erscheinen andererseits nur da darin, wo ein Theil des ursprünglichen Magmas in den glasigen oder anderweit unindividualisirten Zustand übergegangen ist. Hier liegt also in der Einschliessung von Glaspartikeln in den Quarzen eine sehr seltene [1]) Erscheinung vor, welche es gleichwohl erweist, dass die Argumente für einen einstmals geschmolzenen Zustand einerseits und durchaus krystalline Structur andererseits sich nicht ausschliessen. Dabei verdient es betont zu werden, dass die fragliche Grundmasse, zusammengesetzt aus Feldspath, Quarz und Glimmer, weiter nichts ist als ein äusserst feinkörniger Granit, und dass somit die Einwendungen, welche man auf Grund des krystallinen Gefüges gegen die Erstarrung des Granits aus dem Schmelzfluss abgeleitet hat, von keinem Gewicht sind.

Die Kalksteine der Wachoe Mts. werden von Felsitporphyren durchsetzt, mit grossen, aussen milchigen, innen klaren Feldspathen und dihexaedrischen Quarzen, welche die zierlichsten liquiden Einschlüsse mit Salzwürfelchen enthalten (z. B. Salz-

1) Vgl. auch Baranowski über das gleiche Verhalten der Quarze im Granitporphyr von Beucha (Zeitschr. d. d. geol. Ges. 1874. XXVI. 522). Uebrigens sind es auch sonst in den Felsitporphyren nur die grössten Quarze, worin Glaseinschlüsse liegen.

würfel von 0,0017 Mm. Kantenlänge, in einem 0,015 Mm. langen, 0,004 Mm. breiten Einschluss). Nur in einem der untersuchten Porphyre, in dem, welcher in den benachbarten Kalksteinen des Spruce Mt., Peoquop Range, gangbildend auftritt, und makroskopisch blos kleine Quarze enthält, wurde eine sphaerolithische Entwickelung der Grundmasse wahrgenommen: die sehr reichlich vorhandenen und sehr deutlich radialfaserigen Kügelchen messen durchschnittlich 0,3 Mm. in der Dicke, sind aber fast ganz ohne Einwirkung auf polarisirtes Licht. Ein hornblendereicher Felsitporphyr erscheint noch als Gang im Granit des Long Peak, Colorado Range, bemerkenswerth, weil, wo seine Orthoklase klarere Stellen aufweisen, sie sich mit Flüssigkeitseinschlüssen überladen zeigen.

Vergleicht man diese amerikanischen Felsitporphyre mit namentlich den deutschen, so scheinen die Hauptunterscheidungspunkte der ersteren in der äusserst spärlichen Entfaltung von sphaerolithischer Structur und der fast völligen Abwesenheit von Glaseinschlüssen in den flüssigkeitseinschlussreichen Quarzen zu liegen; im Gegensatz dazu zeigen, um nur den letzteren Punkt hervorzukehren, die Porphyre von Halle, vom Odenwald, gewisse aus Westphalen und Sachsen in ihren Quarzen neben liquiden die schönsten hyalinen Partikel. Vielleicht kommt diese Differenz daher, dass die amerikanischen Porphyre im Allgemeinen höheren Alters sind, Aequivalente der älteren Eruptivgranite, während die deutschen vorwiegend jünger als die meisten dortigen Granite sind. Mit dem höheren Alter mag auch die geringe Neigung zur Sphaerolithbildung zusammenhängen, sowie die völlige Abwesenheit des Titanits in diesen Porphyren, welcher Gemengtheil wohl nicht fehlen würde, dafern die letzteren die petrographischen Modificationen der jüngeren Eruptivgranite wären.

Syenit.

Nur ein einziger wirklicher alter Syenit ist aus der durchforschten Gegend bekannt geworden, ein Gestein, welches die Hauptmasse der Cluro Hills, Cortez Range, bildet, makroskopisch aus vorwaltendem fleischrothem Orthoklas und grünlicher, etwas angegriffen scheinender Hornblende besteht, aber auch etwas Plagioklas und ganz wenig Quarz führt.

Diorit.

Die Virginia Range, in welche die Cañons des Walker-, Carson- und Truckee-River eingeschnitten sind, besteht zu mindestens acht Zehnteln ihrer Masse aus übergeflossenen jüngern vulkanischen Gesteinen. Nur wo in seltenen Zwischenräumen die tiefe Erosion in den Cañons die Grundgesteine blossgelegt hat, oder wo die hohen Gipfel nicht von den Lavaströmen bedeckt wurden, tritt das Material der ursprünglichen Bergkette zu Tage. Der Mount Davidson (7827′), welcher neben Virginia City emporsteigt, ist einer dieser uralten Piks und besteht aus Diorit, um welchen rings herum sich der Propylit ergossen hat, der auch zwei insularisch aus ihm hervortretende Berggrate am Cedar Hill zu bedecken nicht vermochte; in den Gründen der in das vulkanische tertiäre Material eingetieften Schluchten zeigt sich, dass jene Diorite selbst durch beträchtliche Massen von metamorphischen Schiefern, Kalksteinen und graphitischen Schiefern durchgebrochen sind, deren Schichtenstörung aus der Jurazeit datirt.

Der Diorit des Mount Davidson enthält mitunter grobkörnige Ausscheidungen und feldspathreiche lichte Zonen; er ist ziemlich reich an Quarz, frei von Orthoklas, der Flüssigkeitseinschlüsse führende Plagioklas recht frisch, die Hornblende faserig, Magneteisen nebst Titaneisen zugegen; grüngelber Epidot, der auch schon makroskopisch erscheint, schlängelt sich als allerfeinste Aederchen hindurch, ein und dasselbe mikroskopische Capillarspältchen ist hier mit Epidot, dort mit Kalkspath erfüllt. An der Südflanke von Ophir Ravine sind gewisse Diorite höchst mikrokrystallinisch, als scheinbar ganz homogene Masse ausgefallen. Recht ähnlich diesen Washoe-Dioriten erweisen sich die frischen Diorite von Bevel-hyma Ledge in den Peavine-Mountains, Nev., ziemlich hornblendearm und mit Feldspathen, die mit blassgrünem Hornblendestaub förmlich überladen sind. Andere Diorite erscheinen in dem Eisenbahneinschnitt des Truckee Cañon, in den Kawsoh Mts (wo Basalte hindurchbrechen), an dem Nache's Peak, Truckee Range, und an den Hügeln s. von Rabbit Hole Spring in den Kamma Mts, Nev., stets begleitend die grossen, wahrscheinlich während mesozoischer Zeit erfolgten Dislocationen, und sich älter als Propylit, jünger als Granit ergebend.

In der Pah-Ute Range kommen neben den grobkörnigen, etwas Quarz führenden Dioriten mit frischer schöner Hornblende auch die ausgezeichnetsten Glimmer-Aequivalente vor, Gesteine mit Feldspathen, wie in den Dioriten, fast keiner Hornblende, sehr quarzarm, mit vielen halbzolllangen schmalen Biotitblättern, reichlichem Apatit. Sehr grobkörnig ist der Diorit vom W.-Fuss der Augusta Mts, n. von Shoshone Springs; im Trout Cañon der Shoshone Range findet sich ein schöner Dioritporphyr, mit grünlichgrauer, u. d. M. ganz krystallinischer Grundmasse, fast erbsendicken Quarzen und einzelnen Orthoklasen, selbst in zollgrossen Krystallen; neben der angegriffenen Hornblende liegt in der Grundmasse reichlich zersetztes Titaneisen und etwas lauchgrüner Glimmer, worin sehr zierliche schmale sich unter 60° durchkreuzende bräunliche Büschel allerfeinster Nadeln. Die grünen Hornblenden in dem porphyritischen Quarz-Diorit vom S.-W.-Ende des Winnemucca Peak, welche oft 2 Mm. lang werden, sind in der Umwandlung zu Epidot begriffen, dessen grüngelbe, manchmal strahlig-faserige Massen Theile des Randes bilden, auch wohl die kleineren Hornblende-Individuen unter Erhaltung der Form ganz ersetzt haben; in den grössern Hornblenden finden sich nun ausser dicken rundlichen Epidotnestern kleinere Körnchen dieses Minerals zu langgezogenen Häufchen vereinigt, die wie ein Paragraphzeichen geschwungen sind. Auch die Faserung der Hornblende, welche offenbar secundär ist und wahrscheinlich die Epidotbildung einleitet, verläuft in oft S-förmig gewundenen Linien; augenähnlich schliessen dieselben neugebildeten Kalkspath geodenartig ein. — Andere, meist ebenfalls etwas quarzführende Dioritgesteine treten in der Shoshone Range am Ravenswood Peak und im Trout Creek Cañon auf, gangförmig im Dale Cañon, Havallah Range; zwischen den Grass und Cortez Valleys, am Agate Pass, Cortez Range, und im Bingham Cañon, Oquirrh Mts (beide biotithaltig). Eigenthümlich ist das Gestein vom Mill Creek Cañon, Cortez Range, eine sehr feinkörnige Grundmasse, mit grösseren Plagioklasen und kurzen schwarzen Hornblendeprismen; die Hauptmasse der Feldspathe ist triklin, begleitet von ganz wenig Orthoklas, viel brauner Biotit ist mikroskopisch zugegen; die eigentliche Grundmasse besteht sonderbarer Weise blos aus Hornblende und übermässig viel Quarz, so dass gewissermaassen ein Plagioklas führendes Hornblende-Quarz-Gestein vorliegt. Seltsam ist noch,

dass die grösseren Feldspathe stellenweise genau die bekannte Structur des Labradorits von der Pauls-Insel besitzen, mit den schwarzen Nädelchen, Körnchen und braunen Täfelchen, eine Structur, welche soweit bekannt, sonst nur Plagioklasen in ganz quarzfreien und augitische Mineralien enthaltenden Gesteinen eigen ist. Ein ausgezeichneter quarzführender Diorit mit Apatit, Titanit und Zirkon bildet ein Glied der archaeischen Formation an der Mündung des Ogden Cañon, Wahsatch Range, und geht in die dortigen Hornblendeschiefer über.

Hornblendeporphyrit.

Einige Vorkommnisse aus den Augusta Mountains besitzen eine ausserordentliche makro- und mikroskopische Uebereinstimmung mit dem bekannten Hornblendeporphyrit von Potschappel, welcher zu dem Porphyrzuge gehört, der sich s. w. von Dresden nach Potschappel einhererstreckt. Es ist ein dunkelgraues Gestein mit einem Stich ins Grünliche, aus welchem nur kleine schwarze Hornblendeprismen als erkennbare Gemengtheile hervortreten. Wie der Porphyrit von Potschappel, so enthält auch der so ähnliche aus den Augusta Mountains unter den grösseren Feldspathen oft mindestens eben so viel monokline als trikline [1]), während die kleineren meistens der letzteren Art zu sein scheinen. Die Grundmasse besteht aus einer gelblichgrauen, amorphen, etwas undeutlich globulitisch glasigen Basis, worin kleine Feldspathleistchen, die oft zu mehreren seitlich aneinandergeschossen sind, sowie zahlreiche schwarze Pünktchen und Körnchen liegen, oft zu Häufchen versammelt oder zu Ketten und Linien aneinander gereiht. Hornblende scheint sich nicht viel an der Zusammensetzung der Grundmasse zu betheiligen, sie bildet meist blos grössere Krystalle, deren Zahl u. d. M. nicht erheblich vergrössert wird. Diese grösseren, sehr gut spaltbaren Hornblendedurchschnitte von dunkel- und lichtbraungelber Farbe sind aber in dem sächsischen, wie in dem amerikanischen Porphyrit von einer überraschend ähnlichen eigenthümlichen Beschaffenheit: alle haben sie keine regelmässigen krystallographischen Umrisse, oft nicht einmal geradlinige Umgrenzung,

1) Die reichliche Gegenwart von orthotomem Feldspath in dem sächsischen Porphyrit ist auch von Rosenbusch bestätigt worden: Massige Gesteine, 1877. S. 285.

dabei sind sie meist entschiedene Bruchstücke; alle sind sie ferner mit dem Rande von dunklen Körnern umgeben, welcher, noch mit zur Hornblende gehörig, auch als äussere Zone desselben Gemengtheils in den Andesiten eine so grosse Rolle spielt. Die Breite dieses schwarzen Randes ist wechselnd, bald nur schmal, und dann weist der Durchschnitt besser contourirte Umrisse auf, bald so breit, dass er vorwaltet, und alsdann im Innern nur ein kleiner Hornblendefleck erscheint. Während früher diese peripherische Zone wohl für eine Aggregation von Magnetitkörnchen gehalten wurde, welche durch die Krystallisationskraft der Hornblende gezwungen worden seien, deren eigener Form zu folgen, führt das Studium des vorliegenden Gesteins zu einer anderen befriedigenderen Erklärung. Kein Beweis liegt vor, dass die Körner in der That Magnetit sind und sie mögen deshalb als Opacit bezeichnet werden. Der Porphyrit aber scheint wie kein anderes Vorkommniss die Ansicht zu unterstützen, dass die Hornblendekrystalle, als zuerst erstarrte Körper, von der umgebenden, noch geschmolzen plastischen Masse oberflächlich alterirt wurden, und dass der schwarze Opacitrand das Product dieser kaustischen Einwirkung darstellt. Mit der chemischen Reaction ging auch eine mechanische Beeinflussung Hand in Hand, daher die unzweifelhaft fragmentare Natur so vieler der Individuen, daher die Erscheinung, dass an den Enden der Durchschnitte der schwarze Rand förmlich zerrissen, und die Grundmasse in die Hornblende eingedrungen ist. Beide Einwirkungen ergänzen und bestätigen sich gegenseitig. Je tiefer der Process der kaustischen Alteration einwärts vorschritt, desto mehr wurde die Form des angegriffenen Krystalls verwischt. Diese Deutung macht es auch erklärlich, dass die schwarze Opacitkruste oft an der Oberfläche allmählich lockerer wird und sich in einzelne Körnchen auflöst; und es mag sein, dass viele der im Gestein vertheilten dunkeln Partikelchen, welche man auf den ersten Blick für Magnetit halten möchte, als feinzertheilte pulverige Körnchen des pyrogenen Umwandlungsproducts der Hornblende aufgefasst werden müssen. Weitere Thatsachen, welche dieser Ansicht zur Stütze gereichen, können erst bei den Hornblende-Andesiten besprochen werden[1]).

1) Andeutungsweise sprach schon Vogelsang dieselbe aus (Krystalliten S. 156). Es ist sehr bemerkenswerth, dass der Opacitrand (welcher ähnlich

In einem dieser Porphyrite aus dem Cañon s. vom Granite Point, Augusta Mts, ist die schwarz umrandete Hornblende einem späteren nassen Umwandlungsprocess anheimgefallen, welcher darin eine lebhaft grüne Viriditsubstanz erzeugte, die längs der Spältchen verläuft und netzartig kleine noch frische braune Kerne einhüllt; der schwarze Rand scheint von dieser Umwandlung nicht sonderlich betroffen zu werden. Kalkspath muss sich bei diesem Vorgang bilden, denn er findet sich auf grösseren Klüftchen des Gesteins makroskopisch abgelagert. Die grösseren oft sehr schön zonal gewachsenen Feldspathe führen regelmässig concentrisch eingelagerte Glaseinschlüsse, ja grosse rectanguläre Kerne von lichtbraunem Glas.

Diabas.

Die bis jetzt längs des vierzigsten Breitegrades näher untersuchten nicht sehr zahlreichen Diabase sind namentlich charakterisirt durch die verhältnissmässig frische Beschaffenheit ihrer Augite, die schwache Entwicklung einer secundären chloritischen oder viriditischen Substanz, durch das häufige Vorkommen von Olivin und die Seltenheit des Titaneisens; sie schliessen sich in allen diesen Punkten näher an die schottischen als an die deutschen Diabase an. Hin und wieder führen sie auch eine gewisse Quarzmenge[1]), aber, genau entsprechend den bisherigen Beobachtungen nur da, wo dann der Olivin fehlt. Etwas globulitisch-glasige Basis ist manchmal vorhanden.

Wenig gut charakterisirte Diabasgesteine kommen im Miner's Cañon, Truckee Range vor; in derselben Kette erscheinen frischere an den Diabase Hills, hier überflossen von den tertiären Basalten; da sie aus Plagioklas, Augit, Olivin und Magnetit bestehen, so wird durch die Natur (und auch durch die Beschaffen-

---

auch Biotite umsäumt) sich niemals um Augitkrystalle findet, selbst wo dieselben in einem Gesteine neben breitumränderten Hornblenden liegen; auch ist es immer nur braune Hornblende, nicht grüne, um welche er ausgebildet erscheint. Das erstere ist ein eben so räthselhafter Contrast, wie derjenige, dass in vielen Gesteinen der Augit so reichlich, die benachbarte Hornblende gar keine Glaseinschlüsse führt.

1) Quarz findet sich auch in den ausgezeichnet frischen Diabasgesteinen, welche eingeschaltete Lager und Gänge in den Trias-Sandsteinen von Newhaven, Conn., bilden, und von E. S. Dana untersucht wurden, der aber den Quarz darin nicht erwähnt (Amer. Journ. of sc. and arts [3] VII. 390).

heit) der Gemengtheile kein Gegensatz zu dem Basalt begründet, aber ihre Structur ist eine rein krystallinische, während der Basalt reichlich halbglasige Basis enthält. Der Olivin-Diabas des hohen Piks am Südende der Truckee Range führt etwas Orthoklas und seine reich lamellirten Plagioklase sind mit einem ausgezeichneten Schichtenbau aus sehr vielen wasserklaren Lagen versehen; es ist keineswegs leicht, zu verstehen, wie beides, polysynthetische Zwillingslamellirung und Wachsthum, durch zonale Umhüllung sich so neben einander ausbilden konnten.

In den Quarziten des Humboldt Cañon, West Humboldt Mts, setzt ein Gang eines dunkeln, sehr frischen, deutlich körnigen Gesteins auf, welches makroskopisch sowohl im Handstück als in den Präparaten so sehr einem tertiären Dolerit gleicht, dass man geneigt ist, dasselbe für eine Varietät der benachbarten Basalte zu halten, obschon die geologischen Verbandverhältnisse ein viel höheres Eruptionsalter für dasselbe höchst wahrscheinlich machen. Es ist nun bemerkenswerth, dass dieses Gestein neben Plagioklas und Augit u. d. M. sehr deutliche Quarze mit Flüssigkeitseinschlüssen enthält, einen Gemengtheil, der bis jetzt niemals in einem ächten tertiären Dolerit gefunden wurde; so corrigirt der mikroskopische Befund die auf Grund des makroskopischen Ansehens gemachte irrthümliche Bestimmung und gesellt, im willkommenen Einklang mit den geologischen Schlussfolgerungen, das Gestein den Diabasen zu. — Andere alte Diabasgänge setzen am Granite Peak, Pah-Ute Range, Nev., auf, und sehr frische Diabasfragmente enthält der Rhyolith von den Owyhee Bluffs, Rock Creek.

An die Diabase mögen noch kurz einige Vorkommnisse aus dem Berkshire Cañon, Virginia Range, gereiht werden, welche man den Melaphyren zuzurechnen geneigt sein möchte; sie sind scheinbar homogen, ohne makroskopisch hervortretende Gemengtheile, schmutzig grünlichgrau oder -bräunlich und führen bis haselnussdicke Mandeln von Kalkspath und oft mit Quarz vermengter Grünerde; selbständige Quarzmandeln oder Mandeln mit anderen Kieselsäure-Absätzen scheinen in ihnen nicht häufig zu sein. Frischer Augit ist bisweilen gar nicht wahrzunehmen, aber halbzersetzter Olivin[1]) zweifellos, halbglasige Basis hier und da eingeklemmt.

---

1) Als nachträglicher Zusatz sei hier bemerkt, dass demzufolge diese

Gabbro.

In dem grauen archaeischen Granit ö. vom Iron Mountain in den Laramie Hills, Col., kommt als hügelige Kuppe ein gabbroartiges Gestein vor, welches fast ganz aus bläulichgrauen, etwas schwach farbenspielenden oder wenigstens schillernden Plagioklasen besteht, deren breite *M*-Flächen grösstentheils parallel liegen, so dass erst auf dem Querbruch die polysynthetische Zwillingsstreifung zum Vorschein kommt. Im Handstück weniger als im Dünnschliff sieht man daneben noch ein graulich- oder gelblichgrünes Mineral. Der Plagioklas mit seiner Streifung von seltener Schönheit besitzt fast genau die Mikrostructur des ächten Labradorits von der Pauls-Insel, enthält eine enorme Anzahl dunkler scharf gezogener gerader Nadeln (bis 0,06 Mm. lang), theils undurchsichtig, theils bräunlich durchscheinend, daneben auch Körnchen derselben Art, herabsinkend zu staubähnlichen Partikelchen, aber verhältnissmässig weniger Täfelchen. Streifenweise sind diese Imprägnationen, der Lamellirung entsprechend, reichlicher angesammelt, kurz es ist dieselbe Structur, wie in den Gabbroplagioklasen von Volpersdorf und Buchau (Schlesien), Harzburg, La Prese (Veltlin), Skye und Mull (Hebriden), Valeberg bei Krageröe (Norwegen), vom Lichtenau-Fjord in Grönland. Eigenthümlich ist, dass, wo der Plagioklas diese besondere Structur besitzt, er von Diallag oder Hypersthen begleitet wird, und, soweit bekannt, der mit gewöhnlichem Augit oder Hornblende vergesellschaftete dieselbe nicht aufweist (S. 180). Der andere sehr zurücktretende nur hin und wieder eingeklemmte Gemengtheil ist ächter Diallag, nicht dichroitisch, mit einer hervortretenden Spaltbarkeit, schiefer Auslöschung,

---

Gesteine auch gemäss der neuesten Begriffsbestimmung von Rosenbusch (Massige Gesteine, 1877. 392) zum Melaphyr gehören. Es wird sich schwerlich etwas gegen seinen Vorschlag einwenden lassen, das porphyrische Glied der olivinführenden Plagioklas-Augitgesteine als Melaphyr zu bezeichnen. Aber es ist wohl nicht ganz richtig, wenn behauptet wird, dass diese Definition seit der vorläufigen Untersuchung von mir (1870) und der ausführlichen von Haarmann (1873) gewissermaassen schon in der Luft gesteckt, und dass es uns Beiden bereits sehr nahe gelegen habe, dieselbe aufzustellen. Die Propositon von Rosenbusch, welcher man in der That allseitige Annahme wünschen muss, ist immerhin ein Unternehmen aus eigener subjectiver Initiative, weil der neue Begriff — wie man nicht vergessen darf — keineswegs den grössten Theil des alten »Melaphyrs« deckt.

hin und wieder mit kleinen braunen lamellaren Interpositionen versehen, an den Rändern bisweilen uralitartig in grüne faserige Hornblende verwandelt. Sodann noch Titaneisen in unregelmässigen langgezogenen Partieen mit der Zersetzungskruste wie in Diabasen; Olivin fehlt. Mit seinem sehr vorwaltenden Plagioklas-(Labradorit-)gehalt steht dies Gestein wohl den norwegischen Noriten nicht fern, welche Scheerer und Kjerulf beschrieben[1]). Eine im Wiedemann'schen Laboratorium in Leipzig veranstaltete Analyse des Gesteins ergab:

Kieselsäure	52,14	Sauerstoff	27,80
Thonerde . .	29,17	»	13,60
Eisenoxydul	3,26	»	0,72
Kalk	10,81	»	3,09
Magnesia . .	0,76	»	0,32
Kali	0,98	»	0,16
Natron. . . .	3,02	»	0,80
Glühverlust	0,58		
	100,72		

Diese Zusammensetzung (Sauerstoffverhältniss von SiO^2 : Al^2O^3 : $(\overset{II}{R}O + \overset{I}{R^2}O)$ = 27,8 : 13,6 : 5,09 = 6,13 : 3 : 1,12) ist so sehr diejenige eines Labradorits, dass nur eine sehr kleine Diallagmenge zugegen sein kann. Chemisch sehr ähnlich ist der Norit vom Tronfield, Oesterthal und der Labradoritfels vom Naerdals Oeren im Bergenstift, welche einst von Kjerulf analysirt wurden.

Eigenthümliche Gesteine aus Ungarn und Siebenbürgen, welche in ihrer mineralischen Zusammensetzung überaus den alten Dioriten ähneln, aber geologisch eng mit den tertiären vulkanischen Gesteinen verknüpft sind, wurden bekanntlich 1860, als Felsarten mit vorwaltendem Plagioklas auch noch Trachyte hiessen, durch v. Richthofen Grünstein-Trachyte benannt, wobei er zugleich hervorhob, wie solche Massen die Träger reicher

---

1) Scheerer, Gaea norvegica II. 313; Neues Jahrb. f. Mineral. 1843. S. 663. — Kjerulf, Bull. de la soc. géol. XXIX. 1862. S. 413.

Erzgänge (z. B. Kapnik, Nágybánya) darstellen. Später fand er Gesteine von derselben petrographischen Beschaffenheit und geologischen Position in Washoe und den Silver Mountains in Nevada, und bezeichnete, weil, wo immer sie auftreten, die vulkanische Thätigkeit der Tertiärzeit durch dieselben eröffnet wird, diese Vorläufer der ganzen tertiären vulkanischen Gesteinsreihe als Propylite (1867). In späteren Perioden des Tertiärs drang in Ungarn und Siebenbürgen, nicht minder auch in den westlichen Gegenden der Vereinigten Staaten, ein ebenfalls vorwiegend aus Plagioklas und Hornblende bestehendes Gestein hervor, der Hornblende-Andesit, vormals von v. Richthofen als Grauer Trachyt bezeichnet. Es ist einer der besten Beweise für dieses Forschers eminenten geologischen Tact, diese beiden Gesteine auseinander gehalten zu haben, obschon er die petrographische Differenz derselben nicht exact in Worte fassen konnte. «It escapes description; it may at this present time safely be founded on what the botanist would call ‚habitus', a certain general character, which is as easy to recognize by the eye, as it is difficult to describe it in words and impossible to define its causes» [1].

Die Unbestimmtheit der Diagnose, welche vorwiegend auf geologischen Altersverhältnissen fusste und eine wohlbestimmte lithologische Charakteristik vermissen liess, hat es verhindert, dass v. Richthofen's Propylit eine anerkennende Beachtung Seitens der europäischen Geologen zu Theil wurde, welche entweder dessen specifische Selbständigkeit oder die Nothwendigkeit seiner petrographischen Trennung vom Hornblende-Andesit bezweifelten. Wie das Folgende zeigt, hat aber die eingehende Untersuchung von typischen Propyliten aus den westlichen Territorien der V. St. eine beträchtliche Anzahl von constanten mikroskopischen Eigenthümlichkeiten kennen gelehrt, welche hinreichen, um, wenigstens auf diesem Gebiet, mit Leichtigkeit die beiden Gesteine von einander zu unterscheiden.

Beide Felsarten haben aber auch ihre quarzführenden Aequivalente, analog den alten vortertiären Dioriten und Quarzdioriten. G. Stache that zuerst dar, dass Gesteine, welche durch v. Richthofen theils den Grünsteintrachyten (Propyliten), theils

1) Natural system of volcanic rocks, Memoirs of the Acad. of California 1867.

den grauen Trachyten (Hornblende-Andesiten) zugewiesen waren, Quarz enthalten[1]); er trennte diese Gesteine in grünsteinartige Quarztrachyte und andesitische Quarztrachyte und schlug Dacit[2]) als Name für beide und auch für die granitoporphyrischen Quarztrachyte vor, obschon die letzteren in der That Rhyolithe oder Nevadite mit vorwaltendem Sanidin sind. Weil aber die Annahme einer Differenz zwischen Grünsteintrachyt (Propylit) und andesitischem Trachyt (Hornblende-Andesit) den Geologen im Allgemeinen nicht hinreichend begründet erschien, ist es gekommen, dass der Name Dacit vorwiegend auf solche quarzführende Gesteine beschränkt wurde, welche sich durch andere Eigenthümlichkeiten als zu den Hornblende-Andesiten gehörig erweisen[3]). Jetzt, wo die specifische Selbständigkeit des Propylits als befestigt gelten muss, wird man nicht umhin können, den Namen Dacit blos in diesem Sinne zu gebrauchen, da er nicht füglich mehr (wie Stache vorschlug) für die quarzführenden Glieder beider Gesteine verwandt werden kann. Wenn demgemäss im Folgenden nur die quarzführenden Hornblende-Andesite Dacite heissen, so mögen die entsprechenden Aequivalente der Propylite als Quarz-Propylite bezeichnet werden; letztere entsprechen also den »grünsteinartigen Quarztrachyten« Stache's.

Propylit.

Mit Ausnahme des dioritischen Gipfels des Mount Davidson wurde die ganze Virginia Range in dem Washoe District, Nev.,

1) Fr. v. Hauer und G. Stache, Geologie Siebenbürgens, Wien 1863. S. 44, 102.

2) Missverständlich fasst v. Richthofen Stache's Dacit als mit quarzführendem Propylit und blos mit diesem identisch auf (Zeitschr. d. d. geol. Ges. XX, 1868 S. 692); in seinen Gruppirungen findet er gar keine Stelle für die quarzführenden Glieder der Hornblende-Andesite — seiner eigenen grauen Trachyte. In dem englischen Text konnte noch nicht auf die heillose Verwirrung aufmerksam gemacht werden, welche Lang in seinem jüngst erschienenen »Grundriss der Gesteinskunde« ohne jeden Zweck und Sinn bezüglich des Dacits angerichtet hat, indem dieser Name plötzlich auf Augitgesteine ausgedehnt wird. Ein solches unerhörtes eigenmächtiges Verfahren kann nicht scharf genug missbilligt werden. Wenn Lang behauptet, dass Richthofen's Propylit und der pyrenäische Ophit einander nahe stehen, so hat er sicherlich das eine der beiden Gesteine — vielleicht auch alle zwei — niemals in typischen Stücken in der Hand gehabt.

3) Vgl. z. B. Doelter in Tschermak's Mineral. Mitth. 1873, S. 102.

einst von einem Propylit-Ausbruch bedeckt, dem ältesten Eruptivgestein des Tertiärs. Im N. und S. nimmt der Propylit die oberen Bergtheile bis zur Grenze gegen den Diorit hin ein und senkt sich auf jeder Seite bis zur Ebene hinab. In den Ophir- und Crown Point-Schluchten bedeckt der Propylit den älteren Diorit und durchsetzt ihn in deutlichen Gängen. Das Gestein setzt in einer s. ö. Richtung bis zur Carson Plain ununterbrochen fort, nur durchbrochen von n. und s. streichenden Gängen von Hornblende-Andesit, welcher auch beschränkte Stellen davon überflossen hat. In allen oberen Theilen fand die Eruption des Propylits auf trockenem Lande statt, aber in den niederen Strecken brach er unter dem Spiegel des grossen Süsswassersees hervor, welcher vormals die dioritische Bergkette begrenzte, und hier geht er auch in Tuffablagerungen über, welche alle Anzeichen einer unter Wasser erfolgten Stratification an sich tragen und tertiäre Pflanzenreste enthalten. Nachdem eine beträchliche Erosion eine Zeit lang gewirkt hatte, rissen im Propylit drei mächtige parallele Spalten auf, durch welche grosse Massen von Hornblende-Andesit hervordrangen[1]). Der Propylit dieser Gegenden steht wie in dem ungarisch-siebenbürgischen Erzgebirge und in einigen Theilen von Mexico mit Silbererzgängen in bemerkenswerther Beziehung: er begrenzt auf einer Seite die berühmte Comstock-Lode gerade während ihrer productivsten Erstreckung, und ist verknüpft mit mehreren Silbergängen im Aurora-District, in den Silver Mountains und mit der Moss Lode in Arizona. — Im Folgenden sollen zunächst einige quarzfreie Propylite Erwähnung finden.

Die ausgezeichneten Propylite aus der Crown Point-Schlucht haben eine fast homogen erscheinende lichtgrünlichgraue Grundmasse mit mehrere Mm. grossen, oft blassgrünlichen Plagioklasen; diese Feldspathe sind im Innern noch ziemlich frisch, aussen und auf Sprüngen einwärts trüb verändert. Alle diese grösseren, wie auch die mikroskopischen sind reichlich imprägnirt mit feinen Hornblendepartikelchen, einem förmlichen blassgrünlichen Hornblendestaub, wie dies so oft in den Feldspathen der älteren Diorite und Porphyrite, fast nie in denen der jüngeren Hornblende-Andesite der Fall ist. Die im Schnitt grün

1) Clarence King, Geology of the Washoe Mining district, Vol. III. S. 17—25.

ausfallende Hornblende ist im noch einigermaassen frischen Zustande recht gut spaltbar, grösstentheils aber schon zersetzt, und zwar scheint das lebhaft grüngelbe Alterationsproduct, welches sich augenscheinlich aus ihr entwickelt und bereits feine Spältchen ausfüllt, auch als perlschnurartig an einander gerückte Körnchen sich in dem Gestein ansiedelt, sicher Epidot zu sein[1]); die braune Hornblende der Andesite producirt kaum jemals secundären Epidot. Die Hornblendekrystalle in diesem Propylit werden bis 0,1 Mm. gross; seine Grundmasse ist auch reich an Hornblende in der Form blassgrüner Körnchen und feiner Nädelchen, wie in den Dioritporphyren, während eine solche reichliche Gegenwart von Hornblende niemals in den Andesiten vorkommt. Einzelne blassgelbe Augitdurchschnitte, staubige und reine Apatite liegen in gewissen Varietäten, während sämmtliche Vorkommnisse verhältnissmässig dicke Magnetitkörner enthalten. — Erwähnenswerth ist der Propylit vom Gold Hill Peak, Washoe, welcher in seiner grünlichgrauen Grundmasse eine Anzahl verwaschener fetzenartiger schwarzumsäumter Fragmente von dunkelbrauner ganz frischer Hornblende, daneben sehr wenige blasse Augite, ausserdem aber in grosser Menge eine dunkler oder lichter grüne, etwas faserige und aggregatpolarisirende Substanz enthält, deren Umgrenzung ohne Zweifel erweist, dass sie ein Umwandlungsproduct von Hornblende ist. Diese letztere Hornblende, welche niemals einen schwarzen Rand besitzt oder besessen hat, scheint die eigentliche (propylitische) Hornblende des Gesteins zu sein; jene frische braune Hornblende mit dem zerbröckelten dunkeln Opacitrand hat auf den ersten Blick nichts mit der andern zu thun und besitzt das Ansehen eines förmlich fremden erratischen Körpers, der auch zugleich

1) Die Bildung von Epidot ereignet sich auch oft im Innern der Feldspathe, wo sie auf die Zersetzung des eingeschlossenen Hornblendematerials zurückzuführen ist, und es ist sehr wahrscheinlich, dass die sog. Pseudomorphosen von Epidot nach Feldspath, welche von G. Bischof, Blum und J. Lemberg beschrieben worden und chemisch so schwer zu deuten sind, nicht auf einer Umwandlung von Feldspath in Epidot, sondern auf einer Entwickelung von Epidot aus solcher, in den Feldspathen ursprünglich eingehüllten Hornblendesubstanz beruhen, eine Vermuthung, welche dadurch unterstützt wird, dass alle solche Pseudomorphosen porphyrisch ausgeschiedene Krystalle in Hornblende führenden Gesteinen sind (vgl. auch H. Francke, Studien über Cordillerengesteine, Leipziger Doctordissertation 1875).

viel widerstandsfähiger ist. In der an Feldspathmikrolithen reichen Grundmasse spielt das Alterationsproduct der Hornblende eine grosse Rolle, welches aber hier, wie es scheint, kein Epidot ist.

Im Allgemeinen ähnlich sind die typischen tertiären Propylite aus der Ophir-Schlucht, Washoe. Die grösseren Hornblendekrystalle sind völlig in lebhaft gelben Epidot mit einem Stich ins grünliche umgewandelt und zwar ist dabei die Form der Hornblende aufs beste erhalten: die bekannten Durchschnittslinien, herstammend von der verticalen Säulenzone ($\infty P . \infty \breve{P} \infty$) begrenzen einen Raum, welcher ein Aggregat breitstrahliger, verworren büscheliger Epidote von oft verschieden intensiver Färbung darstellt. Ausser diesen breiten Strahlen haben, gewöhnlich dunkler gefärbt, rundliche Körner von Epidot sich aus der Hornblende entwickelt, welche zu oft gekrümmten Linien aneinandergereiht, das strahlige Aggregat durchziehen, namentlich aber auch (manchmal als zwei parallele Reihen) den Rand des Hornblendedurchschnitts äusserlich scharf markiren. Von petrographischen Gesichtspunkten aus würde gewiss Niemand derlei Gesteine mit den Hornblende-Andesiten vereinigen, Jeder wird sie ohne Bedenken den alten Dioritporphyren zugesellen.

In der Virginia Range kommt an dem Hügel ö. vom Steamboat Valley ein gelblichbrauner zersetzter und im Sheep Corral Cañon ein grauer frischer Propylit vor, der dort entschieden älter ist, als die benachbarten Andesite und Trachyte; auch die niedrigen Hügel, welche die Truckee und Montezuma Range verbinden, bestehen aus typischem Propylit. Sehr charakteristisch erscheint dieses Gestein mit grösseren Feldspathen in einigen Hügeln n. vom Storm Cañon, Fish Creek Mountains, Nev.; hier sind die Hornblenden z. Th. noch einigermaassen frisch, z. Th. aber unter trefflicher Erhaltung ihrer Umrisse verwandelt in ein Aggregat von a) Kalkspath mit rhomboedrischer Spaltbarkeit, b) Strahlen und Körnern des üblichen Epidots, c) einem schmutzig grünen viriditartigen Mineral, welches kein Epidot ist. Das Gestein führt auch etliche Augite in scharfen blassgelben Durchschnitten und Magnesiaglimmer in mitunter gekrümmten, feinlamellirten Blattlagen, ein Gemengtheil, der in allen bisher erwähnten Propyliten fehlte. Im Storm Cañon selbst enthält der lichtgelblich- oder röthlichgraue schöne Propylit reichlich grüne

Hornblende, welche, gerade wie es oft in den alten Dioriten der Fall, aus längeren und kürzeren parallel gruppirten Stäben aufgebaut ist; auch hier hat Epidotbildung begonnen. Der grünlichgraue Propylit von Tuscarora, Cortez Range, mit seiner charakteristischen Grundmasse führt wieder zweierlei Hornblenden, genau wie der vom Gold Hill Peak in Washoe (S. 189), keinen Augit oder Biotit. In dieser Kette findet sich auch im Wagon Cañon röthlichgrauer Propylit mit 5 Mm. grossen matten Plagioklasen und deutlich makroskopischer, schmutziggrün verwitterter und weich gewordener Hornblende. Alle erwähnten Gesteine enthalten auch kleine Mengen von monoklinem Feldspath.

Der typische quarzfreie Propylit aus dem Sheep Corral Cañon ist nach einer im Wiedemann'schen Laboratorium in Leipzig veranstalteten Analyse folgendermaassen zusammengesetzt:

Kieselsäure	64,62
Thonerde	11,70
Eisenoxydul	8,39
Kalk	8,96
Magnesia	1,18
Kali	1,95
Natron	3,13
Phosphorsäure	Spur
Glühverlust	1,02
	100,95

Der verhältnissmässig hohe Kieselsäuregehalt ist unbezweifelbar, denn eine andere Probe ergab dafür 64,60, eine dritte 65,05 pCt.; die Kieselsäuremenge in diesem Propylit ist demzufolge viel höher, als die der Diorite und Dioritporphyre (50—60 pCt.), mit denen solche Gesteine in mineralogischer Hinsicht die nächste Verwandtschaft besitzen; derselbe scheint auch etwas mehr Kieselsäure zu besitzen, als die europäischen Hornblende-Andesite, welche durchschnittlich 58—62 pCt. davon führen; der neuerlich analysirte Andesit vom 40. Breitegrad gab entsprechend nur 61,02 pCt. Kieselsäure, und die ungarischen Grünsteintrachyte (Propylite) sind gleichfalls etwas basischer.

Quarzpropylit.

Dieses Gestein ist mit Ausnahme der Quarzführung in jeder Hinsicht dem eben besprochenen gleich, und es mag deshalb nur

von wenigen Vorkommnissen die Rede sein. Eines der besten Beispiele davon bildet die Hügel in der östlichen Umgebung von Golconda, ein dunkelgelblichgraues Gestein, aus welchem nur einzelne bis pfefferkorngrosse klare Quarze und matte weissliche Feldspathe hervortreten. Die etwas angegriffene Grundmasse ist zum grössten Theile ein inniges Gemenge von trüb gewordenem isabelfarbigem Feldspath, dessen kleine Individuen mitunter gut umgrenzt sind, und blassgrünen körnigen und nadeligen Hornblendetheilen; hin und wieder tritt ein schlechtgelungener Ansatz zur Sphärolithbildung hervor. Die grösseren Feldspathe sind auch recht angegriffen und sehen zwischen gekreuzten Nicols wie mit blitzendem schillerndem Staub bedeckt aus, wobei dieses Alterationsproduct sicherlich in erster Linie kohlensaurer Kalk ist (vgl. die Analyse); anfangs waren sie auch durch Hornblendepartikelchen vielfach verunreinigt; an den allermeisten kann man Spuren der Streifung noch gewahren. Die Quarze in diesem Tertiärgestein sind recht merkwürdig, weil sie keine Glas-, sondern nur Flüssigkeitseinschlüsse (mit beweglichen Libellen) enthalten, ja es kommen hier jene Doppeleinschlüsse vor, deren Inneres liquide Kohlensäure ist. In dieser Hinsicht verhält sich in der That der Quarz dieses tertiären Propylits — und ohne Ausnahme der aller folgenden Vorkommnisse — genau so wie der der vortertiären Dioritporphyre und gänzlich abweichend von dem aller übrigen quarzführenden tertiären Eruptivgesteine, der Dacite und Rhyolithe dieser Gegenden, welche nur Glaseinschlüsse beherbergen. Viel mikroskopischer Quarz scheint in der Grundmasse nicht zu stecken. U. d. M. sieht man auch grössere grüne halbzersetzte faserig gewordene Hornblendedurchschnitte mit beginnender Epidotbildung und recht reichlichen Apatit. Eine Analyse von Dr. Walter Kormann in Leipzig ergab folgendes Resultat:

Kieselsäure	66,336
Thonerde	14,803
Eisenoxyd	4,068
Kalk	2,991
Magnesia	0,920
Kali	3,190
Natron	5,160
Glühverlust	3,341
	100,809

In dem bedeutenden Glühverlust ist 1,034 pCt. kohlensaurer Kalk enthalten. Das Eisen wurde als Eisenoxyd bestimmt, weil beim Glühen die das Oxydul bezeichnende Bräunung nicht zu beobachten war.

Sehr ähnlich ist der Quarzpropylit von West Gate, Augusta Mountains, und der aus der Nachbarschaft des Cortez Peak, Cortez Range, in dessen lichtgrünlichgrauer Grundmasse sehr viele, aber höchstens 0,1 Mm. grosse Quarze liegen; neben der aus Mikrolithenstäben aufgebauten Hornblende findet sich auch Titanit. Eine unvollständig gebliebene Analyse ergab: 67,79 Kieselsäure, 16,13 Thonerde, 3,64 Eisenoxydul, 2,30 Kalk, 0,53 Magnesia, 1,70 Glühverlust. Diese Quarzpropylite sind demnach kieselsäurereicher als die quarzfreien und chemisch den Daciten so ähnlich, dass kein erheblicher Unterschied constatirt werden kann. Auch im Wagon Cañon, Cortez Range, erscheinen hierher gehörige Gesteine mit etwas klareren Feldspathen, und, ausser der Hornblende, makroskopischen frischen Biotitblättern, welche parallel ihrer Spaltbarkeit sonderbarer Weise Lagen von Kalkspath in sich eingeschaltet enthalten, die bald nach $-\frac{1}{2}R$ zwillingslamellirt, bald ausgezeichnet rhomboedrisch spaltbar sind. In den Quarzen Flüssigkeitseinschlüsse von grosser Kleinheit, in der Grundmasse scheint auch etwas globulitische isotrope Materie zu stecken.

Unterhalb Virginia City am Cross Spur zeigt sich die Kalkcarbonat-Bildung aus den Feldspathen des dortigen quarzführenden Propylits sehr deutlich. Mit das ausgezeichnetste Gestein dieser Art wurde im Berkshire Cañon, Virginia Range, beobachtet: die graue Grundmasse ist reich an makroskopischer dunkelgrüner Hornblende, ganz colossal ist die Vertheilung dieses Gemengtheils innerhalb der Grundmasse und des Feldspaths in Form von kleinen Körnchen, kurzen Nädelchen, zarten Blättchen, auch schönen langspiessigen blassgrünen Mikrolithen; selten sieht man so deutlich, wie diese Hornblendenadeln sich zu Krystallen zusammenschaaren wollen: der Attraction folgend, sind sie im Begriff von allen Seiten zu einer solchen wachsenden Aggregation zusammenzuwandern, sie biegen sich förmlich herzu, und besonders hübsch sind die Ansätze, wo einige Dutzend Nadeln sich zu einem Individuum zusammenlegen wollen, welches aber wenig mehr als ein Büschel geworden ist. Die grösseren Gebilde dieser Art zeigen in ihrem Innern schon schöne Hornblendespalt-

barkeit, während sie an den Enden und Rändern noch ganz zerfasert und ausgefranzt sind; da die einzelnen Stäbe als solche kaum deutlich spaltbar sind, so scheint es fast, als ob die Spaltbarkeit hier erst durch die Aggregation hervorgebracht werde. Die Quarzpropylite von Washoe überfliessen die Propylite und die archaeischen Gesteine des American Cañon sammt dem zugehörigen Granit und werden ihrerseits von Basalt bedeckt. Dass sie jünger sind als die quarzfreien Propylite, ergibt sich auch daraus, dass sie oberhalb der American Flat road Gänge darin bilden. Der Quarzgehalt ist übrigens in ihnen local recht wechselnd, manchmal verhältnissmässig sehr gross.

Hornblende-Andesit.

Der Washoe-District ist von drei Spaltensystemen durchsetzt, durch welche Hornblende-Andesite [1]) an die Oberfläche gedrungen sind, wo sie sich als dünne deckenförmige Massen ausbreiteten [2]). Einige dieser Gänge durchsetzen die Diorite des Mount Davidson und die Propylite auf der n. und s. Bergseite. Auf den Höhen oberhalb Ophir Grade finden sich ausgedehnte Andesitmassen, welche sich abwärts über den Propylit ergossen haben. Aufwärts die Crown Point Ravine werden zwei dieser Gänge angetroffen, deren Ausgehendes eine Mächtigkeit von 100 Fuss zeigt. Eine andere Zone von Andesitgängen durchsetzt American Flat und das Plateau angesichts von Virginia City, aber ihr Ausgehendes ist nach N. zu von den späteren Ergüssen des Sanidin-Trachyts bedeckt. Eine dritte und die bedeutendste Andesitmasse liegt deckenförmig ungefähr 2 Miles östlich (Gold Cañon und Silver Terrace Spur).

Diese Andesite haben in der Regel eine rein dunkelgraue Grundmasse (ohne einen Stich ins grünliche), welche u. d. M. hauptsächlich ein Aggregat von schmalen leistenförmigen Feldspathkrystallen und Feldspathmikrolithen darstellt, gewöhnlich mit deutlicher Fluctuation und durchsäet mit vielen schwarzen Magnetitkörnchen; dazwischen liegt vielfach etwas isabelfarbige halbglasige Basis. Körner oder Mikrolithen von Hornblende kom-

1) Dafür soll in der Folge der Kürze halber blos Andesit gesetzt werden.

2) Vgl. Clarence King, Geology of the Washoe Mining district, Vol. III. S. 28.

men in der eigentlichen Grundmasse fast gar nicht vor, ähnlich wie es auch in den Andesiten des Siebengebirges der Fall. Fast alle grösseren Feldspathe sind ziemlich frische Plagioklase; die geschnittene Hornblende ist im unzersetzten Zustande schön braun, vielfach von dunklem Opacitrand umgeben, und in den äusserst spärlichen Vorkommnissen, wo sie grüne Töne aufweist, zeigt sie alsdann zugleich die unzweifelhaftesten Spuren der Umwandlung. Hier und da findet sich Augit in unregelmässigen flaschengrünen Durchschnitten, so dass also hier zwischen Hornblende und Augit derselbe Farbengegensatz wie im Siebengebirge vorkommt. Eine Analyse des Andesits von dem ersten Hügel n. vom Gold Hill Peak ergab nach Dr. Walter Kormann:

Kieselsäure	61,12
Thonerde	11,61
Eisenoxyd	11,64
Kalk	4,33
Magnesia	0,61
Kali	3,52
Natron	3,85
Glühverlust	4,35
	101,03

Im Glühverlust befinden sich 1,51 pCt. Kohlensäure; ein Theil des Eisens muss als Eisenoxydul vorhanden sein, wie die Veränderung der Farbe beim Glühen ergab. Der Thonerdegehalt ist vergleichsweise niedrig, sonst stimmt dies Gestein chemisch recht gut mit den europäischen Andesiten.

Viele und sonderbare Andesitvarietäten kommen am Südabhang des Eingangs in den Truckee Cañon vor, graue, blassgelbliche oder röthliche Gesteine, ziemlich porös und etwas rauh; Handstücke, welche einem geologischen Ganzen angehören, sind bald reich an dunkelbrauner Hornblende mit breitem schwarzem körnigem Rand, und frei von erkennbarem Augit, bald wird die weitaus vorwaltende Hornblende von etwas blassgrünem Augit begleitet, wobei dieser letztere stets den schwarzen Rand entbehrt, aber viele Glaseinschlüsse enthält, die umgekehrt der Hornblende ausnahmslos fehlen; daneben trifft man Stücke mit mehr Augit als Hornblende, und schliesslich solche mit blos wenig Augit und gar keinen grösseren Hornblende-Individuen. Der trübe Rand der grossen Feldspathe beruht nicht auf Verwitterung, sondern auf der Gegenwart einer enormen

Anzahl glasiger und halbglasiger Partikel, wodurch aber die ausgezeichnete Zonalstructur gar nicht gestört erscheint. Blassbraune etwas globulitische Basis ist hier vorhanden, dort nicht aufzufinden. Wie der Gehalt an Hornblende und Augit variirt, so ist es auch, freilich in minderem Maasse mit den Feldspathen: in den meisten Vorkommnissen aus dieser Gegend sind die grösseren Individuen fast alle reich gestreift, aber einwärts im Berkshire Cañon trifft man auf eine geologisch von den anderen Gesteinen untrennbare Stelle, wo der optisch wohl charakterisirte Sanidin entschieden vorwaltet; hier ist also die Andesitablagerung an einem Punkt als Trachyt ausgebildet. — Andere Andesite, z. Th. etwas halbglasig, alle mit schöner brauner Hornblende, treten am Westufer des Pyramid Lake, in den Kamma Mountains (Lander Spring, Honey Lake, Road Pass), n. vom Wrights Cañon in der West Humboldt Range auf, weitere in den Augusta Mountains. Einer der letzteren, aus dem Augusta Cañon, ist makroskopisch dem von der Wolkenburg im Siebengebirge sehr ähnlich. Die mehrere Mm. grossen Hornblendekrystalle weisen die bedeutendsten Fracturen auf, die z. Th. schon mit der Loupe im Dünnschliff hervortreten. Die Durchschnitte sind lebhaft braun, sehr spaltbar und von dem bekannten schwarzen Rande umgeben; die Brüche eines Individuums kann man an den unmittelbar in der Nachbarschaft liegenden Fragmenten verfolgen und controlliren; oft ist eines der grösseren Individuen in 30, 40 Brocken zerstückelt, mitunter liegt geradezu eine Breccie von Hornblendefragmenten und -Splittern mit verkittender Grundmasse vor. Sehr bemerkenswerth ist, dass sich um die zerbrochenen Krystalle und zwischen den Bruchstücken her die ausgezeichnetsten Fluctuationen der Grundmasse ziehen, welche zeigen, wie die vorliegende Ruptur gerade durch diesen Strom des halbplastischen Magmas verübt worden ist, welches dann mit einem Schlage verfestigt worden sein muss. Ausserdem liegen auch viele keilförmige eckige isolirte Splitter durch die Grundmasse zerstreut, welche nicht mit anderen auf einen bestimmten zerbrochenen Hornblendekrystall zurückgeführt werden können. Diese gewissermaassen erratischen Fragmente sind ohne Ausnahme ganz von dem schwarzen Rande umsäumt, welches erweist, dass dieser nichts mit der ursprünglichen Krystallbildung zu thun hat, sondern der Hornblende erst nach der Fractur zu Theil geworden ist. Und so gereicht diese Erschei-

nung der Ansicht zur kräftigen Stütze, dass der dunkle Opacitrand das Product sei von der kaustisch-chemischen Einwirkung der umgebenden noch halbgeschmolzenen Masse auf die schon ausgeschiedenen Hornblendekrystalle (S. 181). Diese Vermuthung wird dadurch nicht widerlegt, dass man auch Bruchstücke findet, welche die dunkle Zone nur an denjenigen Randlinien aufweisen, welche den ursprünglichen Krystallflächen entsprechen, nicht aber ebensowohl auch längs der Rupturlinien: denn dieselben sind Fragmente von peripherisch schon alterirten Krystallen, welche nach der Zertrümmerung als solche nicht mehr weiter angegriffen wurden. Gerade die letztere Erscheinung, welche die sehr frühe, schon vor der Krystall-Zersplitterung erfolgte Ausbildung des schwarzen Randes erweist, widerstreitet aber zugleich der Annahme, als ob es sich bei demselben um eine der secundären Alterationen auf nassem Wege handle, welche sich an Krystallen erst später innerhalb des längst verfestigten Gesteins ereignet haben, indem es gar nicht denkbar ist, dass diese sich blos auf einzelne Flächen von Bruchstücken beschränkt haben sollte. Ausserdem ist nun, den schwarzen Rand durchbrechend, die Grundmasse buchtenartig, oft sehr tief, in den Krystall eingedrungen, als ob hier eine förmliche theilweise Wiedereinschmelzung stattgefunden habe, und es ziehen sich die deutlichsten Fluctuationsströme sogar bis in die Mitte der Hornblenden hinein. Sehr bezeichnend findet sich dann die schwarze Zone auf der Grenze zwischen der Hornblende und der eingedrungenen Grundmasse.

Die Cortez Range bietet eine Menge von Andesitvarietäten dar, von denen hier nur einige erwähnt seien. Der dunkelgraue aus dem Annie Creek hat eine Mikrostructur der Grundmasse, welche mit der charakteristischen der später zu erwähnenden Augitandesite zusammenfällt, indem sie einen dichten, glasgetränkten Mikrolithenfilz darstellt; neben der tiefdunkelbraunen Hornblende (welche bei Durchschnitten nach der Symmetrie-Ebene eine Auslöschungsschiefe von ca. 12° gegen die Prismenaxe besitzt) erscheinen auch verhältnissmässig viele lichtgelblichbraune Augite; die prachtvoll zonal gewachsenen Feldspathe sind zum recht grossen Theil Sanidin, deutend auf eine gewisse Beziehung zu den Augitandesiten; alle enthalten ausgezeichnet schöne gelbliche Glaseinschlüsse mit dicken Bläschen, conform der Schaalenumhüllung eingelagert; ja es ziehen sich Schaalen

rahmenartig in den Feldspathdurchschnitten einher, welche aus einem wahren Glaskorn-Staub bestehen, grauschwarze Streifen, in denen hunderte von weniger als 0,001 Mm. dicken Glaspartikelchen sich fast unmittelbar berühren; zwischen solchen Streifen liegen dann in der Feldspathsubstanz auch Zeilen dickerer gelblicher Glaseier. — Aehnlich im Ganzen ist der Andesit von der Emigrant Road, n. vom Palisade Cañon, Cortez Range; die hier viel reichlichere tiefbraune Hornblende ist sehr breit schwarz umrandet, oft so stark, dass die eigentliche Substanz auf einen kleinen Fleck im Innern reducirt erscheint; andere Hornblendeformen bestehen sogar gänzlich aus dem dunkelkörnigen Opacitaggregat, welches auch ganz unregelmässig geformte schwanzähnliche Gestalten bildet, deren Zusammenhang mit einstmaliger Hornblende aber unzweifelhaft ist. Im stärksten Gegensatz findet sich der blassbräunlichgelbe Augit des Gesteins niemals dunkel umrandet. Die Plagioklase sind enorm verunreinigt, weniger durch rundliche Glaseinschlüsse, als durch lange, oft sich verbreiternde und verschmälernde Fetzen und Striemen von hellbräunlichem Glas, mitunter ist es ein wahres Netzwerk von Glas, dessen Löcher mit Feldspath ausgefüllt sind. Zu dieser seltenen halbglasigen Varietät, welche sonderbarer Weise unter den westlichen Andesiten von Washoe und Nevada nicht bekannt ist, gehört auch der vom Traverse Mountain in Utah mit 2 Mm. grossen Hornblenden.

Im Allgemeinen sind diese amerikanischen Andesite denen von Rheinpreussen, Nassau, Ungarn recht ähnlich; auffallend ist es daher, dass sie sich, trotzdem von so vielen Localitäten eine so grosse Anzahl von Vorkommnissen untersucht wurde, mit einer einzigen Ausnahme (Washoe Range) frei von Biotit, und stets frei von Tridymit erwiesen haben; etwas Sanidin und etwas Augit scheinen aber neben vorwaltendem Plagioklas und Hornblende diesen Andesiten beider Hemisphären eigen zu sein.

Am Schlusse dieses Abschnitts erhebt sich die Frage, ob petrographische Unterschiede zwischen Propylit und Hornblende-Andesit vorhanden sind, zwei Gesteinen, welche aus denselben Hauptgemengtheilen bestehen, aber verschiedenen Epochen des Tertiärs angehören. Es existirt in der That, wie sich z. Th. aus dem Vorstehenden ergibt, eine Anzahl von Differenzpunkten, welche in ihrer Vereinigung das Auseinanderhalten beider recht wohl ermöglichen. Bei der Aufzählung dieser Punkte,

welche aus der Prüfung von Dünnschliffen einer sehr grossen Reihe von Gesteinen abgeleitet wurden, ist es vielleicht nicht überflüssig, hinzuzufügen, dass die Vorkommnisse durch geologische Untersuchungen im Felde bereits der einen oder anderen Gruppe zugewiesen worden waren und dass die Benennung nicht von speciell petrographischen Gesichtspunkten aus vorgenommen wurde, noch durch vorgefasste Meinung beeinflusst war. Ausführliche Studien haben gelehrt, dass in jedem Handstück geologisches Alter und petrographische Charakteristik sich völlig decken. Die Unterschiede sind für diese Gegenden:

a) die allgemeine Farbe der propylitischen Grundmasse ist mehr grünlichgrau, die der andesitischen mehr rein grau, oder mit einem Stich ins Braune.

b) in Structur und Beschaffenheit der Gemengtheile ähnelt der Propylit noch sehr den älteren vortertiären Dioritporphyren.

c) die Grundmasse der Propylite ist sehr reich an zarten Partikelchen von Hornblende, während in der der Andesite dieses Mineral nur in grösseren Individuen erscheint, und feiner Hornblendestaub hier fehlt.

d) die propylitischen Feldspathe sind gewöhnlich erfüllt mit einer beträchtlichen Menge von Hornblendestaub, während die andesitischen sich davon ganz frei erweisen; die letzteren enthalten nicht selten Glaseinschlüsse, welche in den propylitischen Plagioklasen nicht vorzukommen scheinen.

e) die Farbe der eigentlichen Hornblendedurchschnitte im Propylit ist immer grün (niemals braun), die derjenigen im Andesit fast ausnahmslos braun; die propylitische Hornblende zeigt niemals den schwarzen Opacitrand, der so häufig die der Andesite umgibt; Propylit enthält mitunter ausser der weitaus vorwaltenden grünen Hornblende einige braune Hornblende-Durchschnitte, welche in vielen Punkten einen besonderen (andesitischen) Anblick gewähren, wogegen in den Andesiten zwei Hornblendearten niemals neben einander vorkommen.

f) die propylitische Hornblende ist oft sehr deutlich aufgebaut aus dünnen Nadeln und stabförmigen Mikrolithen und deshalb für gewöhnlich etwas faserig, nicht so besonders gut spaltbar; ähnliches ist in Andesiten nie beobachtet worden.

g) die Production von mikroskopischem Epidot (namentlich durch Zersetzung der Hornblende), welche in den Propyliten

(wie in den alten Dioriten) so sehr häufig ist, wurde mit einer einzigen Ausnahme in diesen Andesiten nie beobachtet und fehlt auch, soweit bekannt, in den europäischen Vorkommnissen.

h) Augit erscheint sehr oft als ein accessorischer Gemengtheil in Andesiten, ist aber verhältnissmässig sehr selten in Propyliten.

i) die andesitische Grundmasse besitzt hier und da eine halbglasige Entwicklung, während eine glasführende propylitische Grundmasse nicht gefunden wurde, und hierin besteht eine fernere Aehnlichkeit mit den älteren Dioritporphyren.

Sämmtliche erwähnte Unterschiede zwischen propylitischer und andesitischer Hornblende erstrecken sich auch auf die quarzführenden Glieder, Quarzpropylit und Dacit. Wie sich die betonten Gegensätze zwischen Propylit und Andesit in Ungarn-Siebenbürgen gestalten, darüber fehlen vorläufig die Anhaltspunkte, weil bei den bisherigen Untersuchungen dortiger Vorkommnisse jene beiden Gesteine überhaupt nicht gebührend auseinander gehalten wurden [1]).

Dacit.

Alle im Folgenden namhaft gemachten Gesteine gelten für geologisch jünger als Propylit und für älter als Trachyt; sie stehen in naher Verbindung mit Andesiten und erweisen sich im Allgemeinen jünger als diese. Aus der grossen Reihe seien zunächst einige besonders charakteristische Vorkommnisse hervorgehoben.

Dazu gehört vor allem der von den Hügeln oberhalb American City, Washoe, dessen bräunlichgraue Grundmasse eine vollkommen rhyolithische Structur hat, wogegen die makroskopischen Feldspathe alle oder fast alle mehr oder weniger deutlich gestreift sind; daneben treten erbsendicke und kleinere Quarze und Hornblende hervor. Die Grundmasse besitzt grösstentheils ein sphärolithisches Gefüge von seltener Vollendung: die Kugeln (mit einem

---

1) In der (bald nach dem englischen Text erschienenen) vortrefflichen »Mikroskopischen Physiographie der massigen Gesteine« von Rosenbusch kommt das Wort Propylit überhaupt gar nicht vor, zum Zeugniss, dass derselbe bis dahin als solcher nicht mikroskopisch untersucht war.

mittleren Durchmesser von 0,1 Mm.) bestehen aus feinen blassgelblichgrauen Fäserchen, oft von verschiedener Länge, welche prächtig zu einem Centrum zusammenstrahlen; neben diesen normalen sieht man rudimentäre, nicht fertig gewordene, gestörte Kugeln als Sectoren oder eisblumenartig auseinander laufende Partieen. Diese sphärolithische Materie polarisirt entweder gar nicht oder nur ganz schwach mit sehr undeutlichem Lichtschein. Die kleineren Feldspathe sind ohne Zweifel einstmals schön gestreift gewesen, wenn sie auch jetzt nur mehr deutliche Spuren davon aufweisen. In beträchtlicher Quantität hat sich schon kohlensaurer Kalk als Kalkspath an ihrer Masse betheiligt, welcher stellenweise den Feldspath ersetzt und darin unförmliche Partieen mit ausgezeichneter Spaltbarkeit bildet. Zwischen gekreuzten Nicols sieht derjenige, welcher das eigenthümliche Polarisiren feiner Kalkspathpartikelchen kennt, an den glitzernden farbenspielenden zarten Schüppchen, dass Kalkspathstaub schon in reichlicher Menge in den Plagioklasen lagert. Wenn daraus geschlossen werden kann, dass dieselben ursprünglich verhältnissmässig basisch und kalkreich waren, so mag dazu erwähnt werden, dass auch C. Doelter den Plagioklas der typischen Dacite aus der Gegend von Vöröspatak auf Grund mehrerer Analysen als Labradorit mit einem Kalkgehalt zwischen 10 und 11,5 pCt. erkannt hat[1]). Die Feldspathe dieser Washoe-Dacite enthalten auch kleine aber sehr deutliche Flüssigkeitseinschlüsse; die Quarze sind von diesen letzteren völlig frei und führen in diesem Gestein auch keine eigentlichen Glaseinschlüsse, aber kugelige, eiförmige und verschieden gestaltete Partikel der sphärolithisch-faserigen Grundmasse, welche auch, gerade wie es bei Felsitporphyren und Rhyolithen der Fall, als rundliche Buchten in die Quarze eindringt. Die Hornblende ist etwas zersetzt, Apatit in geringer Menge zugegen, Augit, Olivin und Tridymit fehlen. — Neben dieser kommt eine andere Varietät vor mit grünlichgrauer Grundmasse, welche aber gar nicht sphärolithisch, sondern mikrofelsitisch[2]) ist, mit feinen darin liegenden unbestimmt polarisirenden Körnchen; eiförmige, selbst bläschenführende Einschlüsse davon liegen in den Quarzen. Eine Analyse dieses Gesteins hat Dr. Councler in Leipzig mit folgendem Resultat ausgeführt:

---

1) Tschermak's Mineralog. Mittheilungen 1874. S. 13.

2) Ueber den Begriff des Mikrofelsits vgl. Rhyolith.

Kieselsäure	69,30
Thonerde	17,90
Eisenoxydul	4,10
Kalk	1,60
Magnesia	1,30
Kali	3,60
Natron	2,00
Glühverlust	2,10
	101,90

Der Kieselsäuregehalt beträgt also viel mehr als im Andesit (vgl. S. 195) und nähert sich dem des Rhyoliths, während die allgemeine Zusammensetzung derjenigen des Quarzpropylits ähnlich ist. Die auffallende Erscheinung, dass in diesem Gestein, dessen grössere Feldspathe triklin sind, Kali etwas über Natron überwiegt, findet ihr Analogon in den Analysen siebenbürgischer Dacite. Dies gilt nicht von den durch Sommaruga veranstalteten, welcher in einigen dieser letzteren Dacite 10 oder 15 mal so viel Kali als Natron fand, denn seine Alkalien-Bestimmungen haben sich als incorrect herausgestellt [1]; aber sorgfältige Chemiker, wie K. v. Hauer, haben bisweilen eine das Natron mehr oder weniger übersteigende oder ihm fast gleichkommende Kalimenge nachgewiesen; so z. B. Kali : Natron = 4,91 : 3,12; 5,40 : 3,86; auch 3,58 : 3,61 (Streit bei Tschermak) und 3,33 : 3,59 (v. Andrian). Dies scheint darzuthun, dass Sanidin oft in der Grundmasse der Dacite in nicht unbeträchtlicher Menge vorhanden ist. J. Roth ist sogar geneigt, zu glauben, dass Dacit und Rhyolith sich durch den Umstand unterscheiden, dass der erstere Plagioklas und Quarz in einer an Kali, der letztere Sanidin und Quarz in einer an Natron verhältnissmässig reichen Grundmasse enthält [2]. Vergleicht man die übrigen Dacit-Analysen, so zeigt dieser Washoe-Dacit einen relativ hohen Kieselsäuregehalt; doch ist er noch nicht der sauerste, indem Marx einen Dacit von Leon de Nicaragua el Cerrito, Central-Amerika, mit selbst 71,27 Kieselsäure (und 18,46 Thonerde) analysirte [3]. Der geringe Kalkgehalt in unserem Ge-

1) Ç. Doelter in Tschermak's Mineralog. Mittheil. 1873. S. 92.

2) Beiträge zur Petrographie der plutonischen Gesteine, Berlin 1869. S. 187.

3) Zeitschr. d. d. geolog. Gesellsch. 1868. S. 524.

stein kommt wahrscheinlich von der eingetretenen Veränderung her, auf welche der hohe Glühverlust verweist; ein Theil des Kalks ist wohl schon als lösliches Carbonat weggeführt.

Aeusserlich ähnlich sind die Dacite von der Hügelkette w. vom Devils Gate, Washoe; die Grundmasse ist eine blassgelblichgraue mikrofelsitische Substanz, worin hier und da der Beginn zu einer Individualisation gemacht ist, sich darbietend als eine zwischen gekreuzten Nicols dunkel werdende Masse, woraus einzelne Pünktchen ganz schwach hervorleuchten. Längs geschwungenen Linien ist örtlich eine etwas bestimmtere Individualisation eingetreten, und so erscheinen gewellte Fluctuationsstreifen, welche etwas besser polarisiren und auch im gewöhnlichen Licht eine fast mikrokrystallinische Zusammensetzung aus farblosen Körnchen zeigen, aber auf beiden Seiten bald in die Mikrofelsitmaterie verschwimmen. In dieser letzteren liegen auch prächtige Sphärolithe in verschiedenen Stadien der Entwicklung, runde vollkommene Kugeln, hufeisenförmige Ansätze, kleine Büschelchen, welche kaum den zehnten Theil eines Kreises ausmachen. Ein Ring aus feinen und zarten radial gestellten sphärolithischen Fäserchen findet sich oftmals um eine rundliche Partie einer nicht faserig struirten, vorwiegend mikrofelsitischen Masse; mitunter wiederholt sich dies nach aussen noch einmal, dabei erfolgt ein ganz allmählicher Uebergang aus den zwei concentrischen Faserringen in den dazwischen gelegenen Mikrofelsit. Die dicken Quarze beherbergen vorzügliche Glaseinschlüsse, ebenso wie diejenigen des Dacits aus dem Basalt Cañon, Washoe; der letztere mit seiner ebenfalls rhyolithartigen Grundmasse führt anstatt der Hornblende schönen braunen Biotit. Alle diese Gesteine (auch der hornblendehaltige aus dem Gould and Curry Quarry) besitzen ferner etwas Sanidin; ihre feinporöse Beschaffenheit scheint auf einer Herauslösung ganz kleiner, völlig in Kalkcarbonat verwandelter Plagioklase zu beruhen.

Andere Dacite mit gelblich- oder bläulichgrauer felsitischer Grundmasse und reich an dunkeln wohlkrystallisirten Quarzen, ärmer an gestreiften, auch schon verkalkten Feldspathen treten im Berkshire Cañon auf, wo sie älter sind, als die sanidinführenden, übrigens eben so quarzreichen Rhyolithe. Sehr typisch ist der Dacit vom Mullen's Gap, w. vom Pyramid Lake, ein anderer vom Westabhang der Hügel s. von Rabbit Hole Spring, Kamma Mts, und der dunkelgrünlichgraue vom Shoshone Peak,

Shoshone Range, in dessen erbsendicken Quarzen sich herrliche Glaseinschlüsse befinden.

Fasst man die Stellung dieser in der That classischen Dacite einerseits zu den Quarzpropyliten, andererseits zu den Hornblendeandesiten dieser Regionen in's Auge, so ergibt sich hierfür aus einer grossen Reihe vergleichender Untersuchungen Folgendes: Der Unterschied zwischen Dacit und Andesit besteht nicht lediglich in der Anwesenheit von Quarz in dem ersteren, der Abwesenheit desselben in dem letzteren Gestein, die mikroskopische Structur der beiderseitigen Grundmassen ist völlig verschieden: diejenige der Dacite besitzt eine echt rhyolithische Structur, ist eine vorwiegend mikrofelsitische, hier und da mehr oder weniger etwas körnige krystallinische Masse mit sehr häufiger Tendenz zur Sphärolithbildung, während die andesitische Grundmasse hauptsächlich aus einem einfachen Aggregat von Mikrolithen besteht. Im ursprünglichen Zustande ist die Farbe der Hornblende in beiden Gesteinen braun. Augit begleitet oft die vorwaltende Hornblende der Andesite als accessorischer Gemengtheil, fehlt aber gänzlich in den Daciten, worin ein anderer Punkt der Annäherung zwischen diesen und Rhyolithen gegeben ist. Was das Verhältniss der Quarzpropylite und Dacite betrifft, so ist es S. 199 gezeigt worden, dass alle Differenzen zwischen propylitischer und andesitischer Hornblende auch für die quarzführenden Glieder der beiden Gesteine bestehen. Da die Mikrostructur der Grundmasse bei den quarzführenden Propyliten mit derjenigen der quarzfreien übereinstimmt, so ist es klar, dass ein beträchtlicher Unterschied obwaltet zwischen dieser beiderseitigen und derjenigen der Dacite, und sie entfernt sich gleichfalls auch von der der Andesite. Aber daneben gibt es noch einen andern und vielleicht bemerkenswerthern Contrast: die Quarze der Quarzpropylite sind (wie die der älteren Dioritporphyre) hier reich an flüssigen, frei von glasigen Einschlüssen, die Quarze der Dacite (wie die der Rhyolithe) führen keine liquiden, sondern nur ausgezeichnete Glaspartikel. Mit Bezug auf diesen Punkt ist es sehr des Hervorhebens werth, dass das einzige Hornblende-Plagioklasgestein Siebenbürgens, in dessen Quarzen zweifellose Flüssigkeitseinschlüsse beobachtet wurden[1]), das von Borsa-bánya, nicht, wie man wohl gemeint hat,

1) F. Z. Neues Jahrb. f. Mineralogie 1870. S. 802.

zu den Daciten, sondern nach v. Richthofen zu seiner Propylitgruppe gehört[1]). J. C. Doelter erwähnte einst Flüssigkeitseinschlüsse in Quarzen von echten siebenbürgischen Daciten, hat aber später diese Angabe zurückgezogen[2]). Früher glaubte man, dass die Grenze zwischen den blos oder vorwiegend Flüssigkeit und den blos Glas führenden Gesteins-Quarzen der Beginn der Tertiärzeit sei, aber jetzt, nach dem Studium der Quarzpropylite muss sie etwas höher hinaufgerückt und in das Tertiär zwischen Propylit und Dacit (Andesit) verlegt werden. Während die Quarzpropylite reich an Apatit sind, führen die Dacite (wiederum wie Rhyolithe) desselben ausserordentlich wenig. — Im Allgemeinen existirt daher noch ein stärkerer Gegensatz zwischen Quarzpropylit und Dacit, als zwischen Propylit und Andesit: die Differenz findet ihren schärfsten Ausdruck in den quarzführenden Gliedern. Der Unterschied des Quarzpropylits vom Propylit beschränkt sich auf die An- oder Abwesenheit des Quarzes; zwischen Dacit und Andesit ist die Verschiedenheit aber eine bei weitem manchfaltigere.

Trachyt.

Eine breite Zone von Trachyt zieht auf 40 Miles Erstreckung von Virginia City und den Washoe-Hügeln nach dem Pyramid Lake; fast alle die hervorragenden von der Erosion bearbeiteten Gipfel (Sugar Loaf, Mounts Rose, Kate, Emma) und die hohen plateau-artigen Massen bestehen daraus; in dem Pass n. von der Gould and Curry Mill bricht ein etwas weniger als 100 F. mächtiger Trachytgang, der als einer der Hauptzufuhrcanäle gelten muss, durch den Propylit. Wo die Erosion bis zu grösserer Tiefe gewirkt hat, wie z. B. im Six Mile Cañon, an der Basis des Mt. Rose, tritt ganz unten eine ältere Trachytvarietät zu Tage, überlagert von sehr mächtigen trachytischen Breccien, welche einen beträchtlichen Theil der ganzen Ablagerung ausmachen und von jener Abart haselnussgrosse Bruchstücke und bis zu 20 F. dicke Blöcke enthalten. Ueber diesen Breccien dehnt sich nun die 100 bis 1000 F. mächtige Decke des jüngeren Trachyts aus; Eruptionen desselben durchsetzen die ältere Ab-

1) Zeitschr. d. d. geol. Gesellsch. XX. 1868. S. 687.
2) Tschermak's Mineralog. Mittheil. 1874. S. 14.

art, fliessen über deren gerundete Formen und nehmen im Allgemeinen die höheren Striche und Gipfel der Berge ein. Auch in anderen Gegenden längs des 40. Breitegrades können zwei verschiedenalterige Trachyte unterschieden werden, welche überall petrographisch in wesentlichen Punkten differiren: die älteren erinnern noch an die eben vorangegangenen Andesite, sind reich an Plagioklas (so dass beide Feldspathe sich oft das Gleichgewicht halten oder Sanidin nur schwach überwiegt), und enthalten, wie die Andesite, verhältnissmässig viel braune Hornblende. Die jüngeren Trachyte führen den Sanidin weitaus vorwaltend, viel weniger Hornblende, und im Allgemeinen reichliche makroskopische Biotitlamellen, sind übrigens auch etwas rauher und poröser als die älteren.

Der ältere Trachyt vom Mount Rose und Sugar Loaf schliesst sich auch dadurch an die Andesite an, dass, wie bei diesen, eigentliche Hornblende sich kaum ordentlich an der Grundmasse betheiligt, welche aus Feldspathmikrolithen, braunen oder schwarzen Ferrit- und Opacitkörnchen und etwas farblosem Glashauch besteht. Bei dem röthlichgrauen jüngeren Trachyt dieser Berge sind die Poren mit mikroskopischen Tridymitaggregaten überladen, welche auch in dem jüngeren Trachyt vom Cross Spur Quarry in Washoe stecken, dessen reichlicher Biotit übermässig von Apatitnadeln perforirt wird.

Unter den Trachyten des 40. Breitegrades erscheint auch die eigenthümliche Combination von vorwaltendem Sanidin mit Augit, welche bisher niemals innerhalb der tertiären Eruptivmassen beobachtet war, aber gleichzeitig im Bereich der älteren Gesteine durch G. vom Rath als »Augit-Syenit« aufgefunden wurde (vom Monzoni in Tyrol, Südküste von Norwegen)[1]. Analoger Augittrachyt bildet z. B. die niederen Hügelzüge zwischen Sheep Corral Cañon und Wadsworth, ein dunkelbraunschwarzes, etwas halbglasig aussehendes Gestein, jünger als Propylit; die grösseren Krystallausscheidungen sind Sanidin und blassgrüner Augit (daneben eine ganz geringe Menge von Plagioklas und randloser brauner Hornblende); die sehr reichliche Grundmasse besteht aus farblosen Mikrolithen und kleinen Kryställchen (wahrscheinlich zum sehr grossen Theil Sanidin) und ganz blassgrünen Mikrolithen (nach der Analogie eher zum Augit als zur Horn-

1) Sitzg. der niederrhein. Ges. f. Nat.- u. Heilk. 8. März 1875.

blende gehörig), welche mit Magnetit in einem bei grosser Dünne fast farblosen Glas liegen, so dass hier im Ganzen das Structurbild des Augitandesits vorliegt. Eine von Dr. Anger veranstaltete Analyse dieses Gesteins ergab: 68,84 Kieselsäure, 13,62 Thonerde, 3,91 Eisenoxydul, 4,30 Kalk, 2,74 Magnesia, 2,56 Kali, 2,68 Natron, 2,30 Glühverlust (100,92). Ein anderer lichtgrauer, aber fast ganz krystallinischer Augittrachyt findet sich nicht weit entfernt an dem linken Ufer bei der Truckee Ferry, Truckee Cañon. An dieser Fähre erscheint auch ein sehr schöner halbglasiger eigentlicher Trachyt mit Sanidin (ganz zurücktretendem Plagioklas), Biotit (beide in bis 3 Mm. grossen Individuen), reichlicher tiefbrauner Hornblende, spärlichem lichtgelblichgrünem Augit und Magnetit. Der benachbarte Purple Hill weist einen dunklen Trachyt mit halbzollgrossen Sanidinen auf, der in seiner aus Feldspathmikrolithen bestehenden Grundmasse gar nichts von Hornblende, Biotit oder Augit enthält, sondern nur noch Magnetit und bräunlichgelbe Ferritkörnchen, so dass hier eine grosse Menge von Varietäten versammelt ist.

Andere mehr oder weniger typische Trachyte geben zu keinen besonderen Bemerkungen Veranlassung; so die bräunlichgrauen tridymitführenden von den Kawsoh Mts., der röthlichgraue, welcher den Gipfel der Insel im Pyramid Lake bildet, der graue in der Kette s. von den Kamma Mts. (mit 3 Mm. grossen Sanidinen), die gelblichgrauen vom Chataya Pass in der Pah-Ute Range (titanitführend), die vom Coal Creek, Setoya Range, und aus dem Susan Creek, River Range, alle in Nevada; die letzteren sind etwas erdig, blassröthlich und domitähnlich mit ausgeschiedenem spärlichem Sanidin und Glimmer (und einer globulitischglasigen Basis); sie führen körnige Aggregate von blassrosarothem, isotropem Granat, scharfcontourirte, himmel- oder berlinerblaue, nur bis 0,0025 Mm. grosse Kryställchen, in gewisser Lage oft mit deutlichen hexagonalen Umrissen, aller Wahrscheinlichkeit nach Hauyn, ferner Tridymitaggregate, und ausserdem jene wasserklaren, von unregelmässigen Sprüngen durchzogenen und ziemlich stark lichtbrechenden, in Zacken ausgezogenen isotropen Körner, wie sie auch in dem Rhyolith von der Hohenburg bei Berkum liegen[1]), und ohne Zweifel Glas-

1) F. Z., Die mikr. Beschaff. d. Min. u. Gest. S. 386.

partikel darstellen. Die meisten dieser Gesteine sind recht arm an Hornblende, reich an Ferrit und Opacit.

Viele Trachyte wurden aus der Wah-we-ah Range untersucht; z. Th. sind dieselben trotz ihres grossen Biotitgehalts und ihrer rauhen Beschaffenheit ziemlich reich an Plagioklas; in der Grundmasse steckt vielfach eine mikrofelsitische Basis, ab und zu mit einer Anlage zu roher Sphärolithbildung; einer dieser Trachyte führt auch etwas Quarz, dessen Durchschnitte mit einer schmalen, 0,01 Mm. breiten Zone von faserig-sphärolithischer Natur scharf umgeben sind, welche auch gegen die Grundmasse gut abgegrenzt ist. Geologisch untrennbar davon kommen in diesen Bergen auch dunkelgraue Augittrachyte vor, welche keine Hornblende, aber etwas Biotit in glasreicher Grundmasse führen. Fernere biotithaltige Trachyte finden sich im Wagon Cañon in der Cortez Range und n. vom Cave Creek, Humboldt Range. Der tridymitführende Trachyt der Südwand des Palisade Cañon (Cortez Range) und von der benachbarten Emigrant Road zeigt die Hornblende mit dem bekannten braun- oder schwarzkörnigen Rand (vgl. S. 196) umgeben, der oft tief nach innen eindringt und aussen zerfliesst; einige Hornblendequerschnittsformen bestehen nur aus diesem dunkeln rahmenähnlichen Rand, der an einer Stelle eine Lücke hat, durch welche das Mikrolithengewebe der Grundmasse in das Innere eingedrungen ist, wo alle Hornblende durch dasselbe ersetzt wurde. Ueberaus reich an den dünnsten Biotitlamellen ist der Trachyt von dem ö. Fusse der Aqui Mts. in Utah, der in seiner grauweissen Grundmasse keinen Feldspath makroskopisch ausgeschieden enthält. Einer der schönsten Trachyte ist der graue vom Ostende der Traverse Mts.: klare zonal gebaute Feldspathe (weit überwiegend Sanidin) mit den zierlichsten Glaseinschlüssen, ferner trefflich spaltbare, dunkelbraune frische Hornblende, ohne schwarzen Rand in reichlicher Menge, einige Glimmerblätter und blassgrüngelbe Augite, viel Apatit, alles gelegen in einer Grundmasse, welche vorwiegend ein mit Glas getränktes und mit Magnetit durchstäubtes Aggregat von Feldspathmikrolithen ist.

Recht ähnlich und besonders charakteristisch sind auch die prächtigen schon makroskopisch sehr krystallreichen Trachyte der Wahsatch Range (City Creek, Provo Cañon, Silver Creek); die braune Hornblende ist gewöhnlich frisch und unangegriffen, nur

einigemal mit schmalem Rand umsäumt, der auch wohl den Biotit umgibt. Grössere Hornblendedurchschnitte werden wohl im Innersten, bis wohin die Spaltbarkeit fortzieht, durch allmähliches Verblassen ganz farblos und hier liegen dann Dampfporen und winzige Flüssigkeitseinschlüsse. In einem Handstück aus dem Upper Provo Cañon waren alle grösseren Hornblenden Zwillinge nach $\infty P \infty$; in einem Plagioklas führte ein Glaseinschluss von 0,03 Mm. Dicke in seinem Inneren einen Flüssigkeitseinschluss mit mobiler Libelle, die bei 120° C. nicht absorbirt wurde. Biotit und Augit fehlen bald, bald sind sie vorhanden; der letztere ist im Gegensatz zu der stets davon freien Hornblende gewöhnlich mit Glaskörnern überladen, ein Contrast, der sich auch sonst sehr häufig wiederholt, und auf welchen, wie es scheint, noch nicht die verdiente Aufmerksamkeit gelenkt wurde. Mehrfach sind diese auch staubigen Apatit führenden Wahsatch-Trachyte so reich an Tridymit, dass sie darin nur von dem mexikanischen Gestein des Cerro de San Christoval übertroffen werden. Fracturen der Gemengtheile und Fluctuationserscheinungen in der Grundmasse haben weite Verbreitung. Kaum zu unterscheiden von den vorstehenden ist der Trachyt von dem Divide zwischen North- und Middle Parks, Colorado.

Schliesslich müssen noch die sonderbaren, quarzführenden Trachytgesteine von den Elkhead Mts mit ihrer eigenthümlichen Zusammensetzung kurze Erwähnung finden. Der graue Trachyt von Skellig's Ridge lässt makroskopisch Sanidin, Hornblende und Biotit erkennen, daneben unzweifelhafte etwas fettglänzende Quarzkörner; dabei ist aber der ganze Habitus des Gesteins durchaus trachytisch, keineswegs rhyolithisch. Alle jene Quarze sind abgerundete zerborstene Körner, welche leicht herausfallen und Löcher zurücklassen. Durch das Mikroskop wird die Anzahl der Quarze nicht vermehrt; wenn sie auch nicht eigentlich als fremde erratische Körper zu bezeichnen sind, so spielen sie doch jedenfalls im Gestein eine ganz unwesentliche accessorische Rolle, gänzlich ohne Einfluss auf das Aussehen des Gesteins, etwa von derselben Bedeutung wie die Gegenwart oder Abwesenheit von Tridymit in einem Trachyt. U. d. M. erweist sich der Trachyt ausserordentlich reich an sehr kleinen Hornblendekrystallen und sogar noch reicher an Biotit, daneben auch nicht wenig blasser gelblichgrüner Augit; diese Gemengtheile liegen mit Feldspathmikrolithen in einer blassbräunlichen, etwas globulitischen

(wie in den alten Dioriten) so sehr häufig ist, wurde mit einer einzigen Ausnahme in diesen Andesiten nie beobachtet und fehlt auch, soweit bekannt, in den europäischen Vorkommnissen.

h) Augit erscheint sehr oft als ein accessorischer Gemengtheil in Andesiten, ist aber verhältnissmässig sehr selten in Propyliten.

i) die andesitische Grundmasse besitzt hier und da eine halbglasige Entwicklung, während eine glasführende propylitische Grundmasse nicht gefunden wurde, und hierin besteht eine fernere Aehnlichkeit mit den älteren Dioritporphyren.

Sämmtliche erwähnte Unterschiede zwischen propylitischer und andesitischer Hornblende erstrecken sich auch auf die quarzführenden Glieder, Quarzpropylit und Dacit. Wie sich die betonten Gegensätze zwischen Propylit und Andesit in Ungarn-Siebenbürgen gestalten, darüber fehlen vorläufig die Anhaltspunkte, weil bei den bisherigen Untersuchungen dortiger Vorkommnisse jene beiden Gesteine überhaupt nicht gebührend auseinander gehalten wurden [1]).

Dacit.

Alle im Folgenden namhaft gemachten Gesteine gelten für geologisch jünger als Propylit und für älter als Trachyt; sie stehen in naher Verbindung mit Andesiten und erweisen sich im Allgemeinen jünger als diese. Aus der grossen Reihe seien zunächst einige besonders charakteristische Vorkommnisse hervorgehoben.

Dazu gehört vor allem der von den Hügeln oberhalb American City, Washoe, dessen bräunlichgraue Grundmasse eine vollkommen rhyolithische Structur hat, wogegen die makroskopischen Feldspathe alle oder fast alle mehr oder weniger deutlich gestreift sind; daneben treten erbsendicke und kleinere Quarze und Hornblende hervor. Die Grundmasse besitzt grösstentheils ein sphärolithisches Gefüge von seltener Vollendung: die Kugeln (mit einem

---

1) In der (bald nach dem englischen Text erschienenen) vortrefflichen »Mikroskopischen Physiographie der massigen Gesteine« von Rosenbusch kommt das Wort Propylit überhaupt gar nicht vor, zum Zeugniss, dass derselbe bis dahin als solcher nicht mikroskopisch untersucht war.

mittleren Durchmesser von 0,1 Mm.) bestehen aus feinen blassgelblichgrauen Fäserchen, oft von verschiedener Länge, welche prächtig zu einem Centrum zusammenstrahlen; neben diesen normalen sieht man rudimentäre, nicht fertig gewordene, gestörte Kugeln als Sectoren oder eisblumenartig auseinander laufende Partieen. Diese sphärolithische Materie polarisirt entweder gar nicht oder nur ganz schwach mit sehr undeutlichem Lichtschein. Die kleineren Feldspathe sind ohne Zweifel einstmals schön gestreift gewesen, wenn sie auch jetzt nur mehr deutliche Spuren davon aufweisen. In beträchtlicher Quantität hat sich schon kohlensaurer Kalk als Kalkspath an ihrer Masse betheiligt, welcher stellenweise den Feldspath ersetzt und darin unförmliche Partieen mit ausgezeichneter Spaltbarkeit bildet. Zwischen gekreuzten Nicols sieht derjenige, welcher das eigenthümliche Polarisiren feiner Kalkspathpartikelchen kennt, an den glitzernden farbenspielenden zarten Schüppchen, dass Kalkspathstaub schon in reichlicher Menge in den Plagioklasen lagert. Wenn daraus geschlossen werden kann, dass dieselben ursprünglich verhältnissmässig basisch und kalkreich waren, so mag dazu erwähnt werden, dass auch C. Doelter den Plagioklas der typischen Dacite aus der Gegend von Vöröspatak auf Grund mehrerer Analysen als Labradorit mit einem Kalkgehalt zwischen 10 und 11,5 pCt. erkannt hat[1]). Die Feldspathe dieser Washoe-Dacite enthalten auch kleine aber sehr deutliche Flüssigkeitseinschlüsse; die Quarze sind von diesen letzteren völlig frei und führen in diesem Gestein auch keine eigentlichen Glaseinschlüsse, aber kugelige, eiförmige und verschieden gestaltete Partikel der sphärolithisch-faserigen Grundmasse, welche auch, gerade wie es bei Felsitporphyren und Rhyolithen der Fall, als rundliche Buchten in die Quarze eindringt. Die Hornblende ist etwas zersetzt, Apatit in geringer Menge zugegen, Augit, Olivin und Tridymit fehlen. — Neben dieser kommt eine andere Varietät vor mit grünlichgrauer Grundmasse, welche aber gar nicht sphärolithisch, sondern mikrofelsitisch[2]) ist, mit feinen darin liegenden unbestimmt polarisirenden Körnchen; eiförmige, selbst bläschenführende Einschlüsse davon liegen in den Quarzen. Eine Analyse dieses Gesteins hat Dr. Councler in Leipzig mit folgendem Resultat ausgeführt:

1) Tschermak's Mineralog. Mittheilungen 1874. S. 13.

2) Ueber den Begriff des Mikrofelsits vgl. Rhyolith.

Kieselsäure	69,30
Thonerde	17,90
Eisenoxydul	4,10
Kalk	1,60
Magnesia	1,30
Kali	3,60
Natron	2,00
Glühverlust	2,10
	101,90

Der Kieselsäuregehalt beträgt also viel mehr als im Andesit (vgl. S. 195) und nähert sich dem des Rhyoliths, während die allgemeine Zusammensetzung derjenigen des Quarzpropylits ähnlich ist. Die auffallende Erscheinung, dass in diesem Gestein, dessen grössere Feldspathe triklin sind, Kali etwas über Natron überwiegt, findet ihr Analogon in den Analysen siebenbürgischer Dacite. Dies gilt nicht von den durch Sommaruga veranstalteten, welcher in einigen dieser letzteren Dacite 10 oder 15 mal so viel Kali als Natron fand, denn seine Alkalien-Bestimmungen haben sich als incorrect herausgestellt[1]; aber sorgfältige Chemiker, wie K. v. Hauer, haben bisweilen eine das Natron mehr oder weniger übersteigende oder ihm fast gleichkommende Kalimenge nachgewiesen; so z. B. Kali : Natron = 4,91 : 3,12; 5,40 : 3,86; auch 3,58 : 3,61 (Streit bei Tschermak) und 3,33 : 3,59 (v. Andrian). Dies scheint darzuthun, dass Sanidin oft in der Grundmasse der Dacite in nicht unbeträchtlicher Menge vorhanden ist. J. Roth ist sogar geneigt, zu glauben, dass Dacit und Rhyolith sich durch den Umstand unterscheiden, dass der erstere Plagioklas und Quarz in einer an Kali, der letztere Sanidin und Quarz in einer an Natron verhältnissmässig reichen Grundmasse enthält[2]. Vergleicht man die übrigen Dacit-Analysen, so zeigt dieser Washoe-Dacit einen relativ hohen Kieselsäuregehalt; doch ist er noch nicht der sauerste, indem Marx einen Dacit von Leon de Nicaragua el Cerrito, Central-Amerika, mit selbst 71,27 Kieselsäure (und 18,46 Thonerde) analysirte[3]. Der geringe Kalkgehalt in unserem Ge-

1) Ç. Doelter in Tschermak's Mineralog. Mittheil. 1873. S. 92.

2) Beiträge zur Petrographie der plutonischen Gesteine, Berlin 1869. S. 187.

3) Zeitschr. d. d. geolog. Gesellsch. 1868. S. 524.

stein kommt wahrscheinlich von der eingetretenen Veränderung her, auf welche der hohe Glühverlust verweist; ein Theil des Kalks ist wohl schon als lösliches Carbonat weggeführt.

Aeusserlich ähnlich sind die Dacite von der Hügelkette w. vom Devils Gate, Washoe; die Grundmasse ist eine blassgelblichgraue mikrofelsitische Substanz, worin hier und da der Beginn zu einer Individualisation gemacht ist, sich darbietend als eine zwischen gekreuzten Nicols dunkel werdende Masse, woraus einzelne Pünktchen ganz schwach hervorleuchten. Längs geschwungenen Linien ist örtlich eine etwas bestimmtere Individualisation eingetreten, und so erscheinen gewellte Fluctuationsstreifen, welche etwas besser polarisiren und auch im gewöhnlichen Licht eine fast mikrokrystallinische Zusammensetzung aus farblosen Körnchen zeigen, aber auf beiden Seiten bald in die Mikrofelsitmaterie verschwimmen. In dieser letzteren liegen auch prächtige Sphärolithe in verschiedenen Stadien der Entwicklung, runde vollkommene Kugeln, hufeisenförmige Ansätze, kleine Büschelchen, welche kaum den zehnten Theil eines Kreises ausmachen. Ein Ring aus feinen und zarten radial gestellten sphärolithischen Fäserchen findet sich oftmals um eine rundliche Partie einer nicht faserig struirten, vorwiegend mikrofelsitischen Masse; mitunter wiederholt sich dies nach aussen noch einmal, dabei erfolgt ein ganz allmählicher Uebergang aus den zwei concentrischen Faserringen in den dazwischen gelegenen Mikrofelsit. Die dicken Quarze beherbergen vorzügliche Glaseinschlüsse, ebenso wie diejenigen des Dacits aus dem Basalt Cañon, Washoe; der letztere mit seiner ebenfalls rhyolithartigen Grundmasse führt anstatt der Hornblende schönen braunen Biotit. Alle diese Gesteine (auch der hornblendehaltige aus dem Gould and Curry Quarry) besitzen ferner etwas Sanidin; ihre feinporöse Beschaffenheit scheint auf einer Herauslösung ganz kleiner, völlig in Kalkcarbonat verwandelter Plagioklase zu beruhen.

Andere Dacite mit gelblich- oder bläulichgrauer felsitischer Grundmasse und reich an dunkeln wohlkrystallisirten Quarzen, ärmer an gestreiften, auch schon verkalkten Feldspathen treten im Berkshire Cañon auf, wo sie älter sind, als die sanidinführenden, übrigens eben so quarzreichen Rhyolithe. Sehr typisch ist der Dacit vom Mullen's Gap, w. vom Pyramid Lake, ein anderer vom Westabhang der Hügel s. von Rabbit Hole Spring, Kamma Mts, und der dunkelgrünlichgraue vom Shoshone Peak,

Shoshone Range, in dessen erbsendicken Quarzen sich herrliche Glaseinschlüsse befinden.

Fasst man die Stellung dieser in der That classischen Dacite einerseits zu den Quarzpropyliten, andererseits zu den Hornblendeandesiten dieser Regionen in's Auge, so ergibt sich hierfür aus einer grossen Reihe vergleichender Untersuchungen Folgendes: Der Unterschied zwischen Dacit und Andesit besteht nicht lediglich in der Anwesenheit von Quarz in dem ersteren, der Abwesenheit desselben in dem letzteren Gestein, die mikroskopische Structur der beiderseitigen Grundmassen ist völlig verschieden: diejenige der Dacite besitzt eine echt rhyolithische Structur, ist eine vorwiegend mikrofelsitische, hier und da mehr oder weniger etwas körnige krystallinische Masse mit sehr häufiger Tendenz zur Sphärolithbildung, während die andesitische Grundmasse hauptsächlich aus einem einfachen Aggregat von Mikrolithen besteht. Im ursprünglichen Zustande ist die Farbe der Hornblende in beiden Gesteinen braun. Augit begleitet oft die vorwaltende Hornblende der Andesite als accessorischer Gemengtheil, fehlt aber gänzlich in den Daciten, worin ein anderer Punkt der Annäherung zwischen diesen und Rhyolithen gegeben ist. Was das Verhältniss der Quarzpropylite und Dacite betrifft, so ist es S. 199 gezeigt worden, dass alle Differenzen zwischen propylitischer und andesitischer Hornblende auch für die quarzführenden Glieder der beiden Gesteine bestehen. Da die Mikrostructur der Grundmasse bei den quarzführenden Propyliten mit derjenigen der quarzfreien übereinstimmt, so ist es klar, dass ein beträchtlicher Unterschied obwaltet zwischen dieser beiderseitigen und derjenigen der Dacite, und sie entfernt sich gleichfalls auch von der der Andesite. Aber daneben gibt es noch einen andern und vielleicht bemerkenswerthern Contrast: die Quarze der Quarzpropylite sind (wie die der älteren Dioritporphyre) hier reich an flüssigen, frei von glasigen Einschlüssen, die Quarze der Dacite (wie die der Rhyolithe) führen keine liquiden, sondern nur ausgezeichnete Glaspartikel. Mit Bezug auf diesen Punkt ist es sehr des Hervorhebens werth, dass das einzige Hornblende-Plagioklasgestein Siebenbürgens, in dessen Quarzen zweifellose Flüssigkeitseinschlüsse beobachtet wurden[1]), das von Borsa-bánya, nicht, wie man wohl gemeint hat,

1) F. Z. Neues Jahrb. f. Mineralogie 1870. S. 802.

zu den Daciten, sondern nach v. Richthofen zu seiner Propylitgruppe gehört[1]). J. C. Doelter erwähnte einst Flüssigkeitseinschlüsse in Quarzen von echten siebenbürgischen Daciten, hat aber später diese Angabe zurückgezogen[2]). Früher glaubte man, dass die Grenze zwischen den blos oder vorwiegend Flüssigkeit und den blos Glas führenden Gesteins-Quarzen der Beginn der Tertiärzeit sei, aber jetzt, nach dem Studium der Quarzpropylite muss sie etwas höher hinaufgerückt und in das Tertiär zwischen Propylit und Dacit (Andesit) verlegt werden. Während die Quarzpropylite reich an Apatit sind, führen die Dacite (wiederum wie Rhyolithe) desselben ausserordentlich wenig. — Im Allgemeinen existirt daher noch ein stärkerer Gegensatz zwischen Quarzpropylit und Dacit, als zwischen Propylit und Andesit: die Differenz findet ihren schärfsten Ausdruck in den quarzführenden Gliedern. Der Unterschied des Quarzpropylits vom Propylit beschränkt sich auf die An- oder Abwesenheit des Quarzes; zwischen Dacit und Andesit ist die Verschiedenheit aber eine bei weitem manchfaltigere.

Trachyt.

Eine breite Zone von Trachyt zieht auf 40 Miles Erstreckung von Virginia City und den Washoe-Hügeln nach dem Pyramid Lake; fast alle die hervorragenden von der Erosion bearbeiteten Gipfel (Sugar Loaf, Mounts Rose, Kate, Emma) und die hohen plateau-artigen Massen bestehen daraus; in dem Pass n. von der Gould and Curry Mill bricht ein etwas weniger als 100 F. mächtiger Trachytgang, der als einer der Hauptzuführcanäle gelten muss, durch den Propylit. Wo die Erosion bis zu grösserer Tiefe gewirkt hat, wie z. B. im Six Mile Cañon, an der Basis des Mt. Rose, tritt ganz unten eine ältere Trachytvarietät zu Tage, überlagert von sehr mächtigen trachytischen Breccien, welche einen beträchtlichen Theil der ganzen Ablagerung ausmachen und von jener Abart haselnussgrosse Bruchstücke und bis zu 20 F. dicke Blöcke enthalten. Ueber diesen Breccien dehnt sich nun die 100 bis 1000 F. mächtige Decke des jüngeren Trachyts aus; Eruptionen desselben durchsetzen die ältere Ab-

1) Zeitschr. d. d. geol. Gesellsch. XX. 1868. S. 687.
2) Tschermak's Mineralog. Mittheil. 1874. S. 14.

art, fliessen über deren gerundete Formen und nehmen im Allgemeinen die höheren Striche und Gipfel der Berge ein. Auch in anderen Gegenden längs des 40. Breitegrades können zwei verschiedenalterige Trachyte unterschieden werden, welche überall petrographisch in wesentlichen Punkten differiren: die älteren erinnern noch an die eben vorangegangenen Andesite, sind reich an Plagioklas (so dass beide Feldspathe sich oft das Gleichgewicht halten oder Sanidin nur schwach überwiegt), und enthalten, wie die Andesite, verhältnissmässig viel braune Hornblende. Die jüngeren Trachyte führen den Sanidin weitaus vorwaltend, viel weniger Hornblende, und im Allgemeinen reichliche makroskopische Biotitlamellen, sind übrigens auch etwas rauher und poröser als die älteren.

Der ältere Trachyt vom Mount Rose und Sugar Loaf schliesst sich auch dadurch an die Andesite an, dass, wie bei diesen, eigentliche Hornblende sich kaum ordentlich an der Grundmasse betheiligt, welche aus Feldspathmikrolithen, braunen oder schwarzen Ferrit- und Opacitkörnchen und etwas farblosem Glashauch besteht. Bei dem röthlichgrauen jüngeren Trachyt dieser Berge sind die Poren mit mikroskopischen Tridymitaggregaten überladen, welche auch in dem jüngeren Trachyt vom Cross Spur Quarry in Washoe stecken, dessen reichlicher Biotit übermässig von Apatitnadeln perforirt wird.

Unter den Trachyten des 40. Breitegrades erscheint auch die eigenthümliche Combination von vorwaltendem Sanidin mit Augit, welche bisher niemals innerhalb der tertiären Eruptivmassen beobachtet war, aber gleichzeitig im Bereich der älteren Gesteine durch G. vom Rath als »Augit-Syenit« aufgefunden wurde (vom Monzoni in Tyrol, Südküste von Norwegen)[1]. Analoger Augittrachyt bildet z. B. die niederen Hügelzüge zwischen Sheep Corral Cañon und Wadsworth, ein dunkelbraunschwarzes, etwas halbglasig aussehendes Gestein, jünger als Propylit; die grösseren Krystallausscheidungen sind Sanidin und blassgrüner Augit (daneben eine ganz geringe Menge von Plagioklas und randloser brauner Hornblende); die sehr reichliche Grundmasse besteht aus farblosen Mikrolithen und kleinen Kryställchen (wahrscheinlich zum sehr grossen Theil Sanidin) und ganz blassgrünen Mikrolithen (nach der Analogie eher zum Augit als zur Horn-

1) Sitzg. der niederrhein. Ges. f. Nat.- u. Heilk. 8. März 1875.

blende gehörig), welche mit Magnetit in einem bei grosser Dünne fast farblosen Glas liegen, so dass hier im Ganzen das Structurbild des Augitandesits vorliegt. Eine von Dr. Anger veranstaltete Analyse dieses Gesteins ergab: 68,84 Kieselsäure, 13,62 Thonerde, 3,94 Eisenoxydul, 4,30 Kalk, 2,74 Magnesia, 2,56 Kali, 2,68 Natron, 2,30 Glühverlust (100,92). Ein anderer lichtgrauer, aber fast ganz krystallinischer Augittrachyt findet sich nicht weit entfernt an dem linken Ufer bei der Truckee Ferry, Truckee Cañon. An dieser Fähre erscheint auch ein sehr schöner halbglasiger eigentlicher Trachyt mit Sanidin (ganz zurücktretendem Plagioklas), Biotit (beide in bis 3 Mm. grossen Individuen), reichlicher tiefbrauner Hornblende, spärlichem lichtgelblichgrünem Augit und Magnetit. Der benachbarte Purple Hill weist einen dunklen Trachyt mit halbzollgrossen Sanidinen auf, der in seiner aus Feldspathmikrolithen bestehenden Grundmasse gar nichts von Hornblende, Biotit oder Augit enthält, sondern nur noch Magnetit und bräunlichgelbe Ferritkörnchen, so dass hier eine grosse Menge von Varietäten versammelt ist.

Andere mehr oder weniger typische Trachyte geben zu keinen besonderen Bemerkungen Veranlassung; so die bräunlichgrauen tridymitführenden von den Kawsoh Mts., der röthlichgraue, welcher den Gipfel der Insel im Pyramid Lake bildet, der graue in der Kette s. von den Kamma Mts. (mit 3 Mm. grossen Sanidinen), die gelblichgrauen vom Chataya Pass in der Pah-Ute Range (titanitführend), die vom Coal Creek, Setoya Range, und aus dem Susan Creek, River Range, alle in Nevada; die letzteren sind etwas erdig, blassröthlich und domitähnlich mit ausgeschiedenem spärlichem Sanidin und Glimmer (und einer globulitischglasigen Basis); sie führen körnige Aggregate von blassrosarothem, isotropem Granat, scharfcontourirte, himmel- oder berlinerblaue, nur bis 0,0025 Mm. grosse Kryställchen, in gewisser Lage oft mit deutlichen hexagonalen Umrissen, aller Wahrscheinlichkeit nach Hauyn, ferner Tridymitaggregate, und ausserdem jene wasserklaren, von unregelmässigen Sprüngen durchzogenen und ziemlich stark lichtbrechenden, in Zacken ausgezogenen isotropen Körner, wie sie auch in dem Rhyolith von der Hohenburg bei Berkum liegen[1]), und ohne Zweifel Glas-

1) F. Z., Die mikr. Beschaff. d. Min. u. Gest. S. 386.

Keilchen zusammengesetzten Strängen mit mehr oder weniger deutlich krystallinisch-körnigen Aggregaten in den Maschen, selten.

i) völlige Aggregation von faserigen Sphärolithen. Die reine Sphärolithstructur der Grundmasse findet in diesen Gegenden nur sehr selten makroskopische Entfaltung, durchschnittlich übersteigen die einzelnen Kugeln nicht 0,5 Mm. Dicke; das Mikroskop zeigt aber diese Structur in sehr vielen Rhyolithen höchst typisch ausgebildet. Die rundlichen Zusammenballungen der Fasern sind bald besser, bald schlechter kugelig, besitzen ein mehr oder weniger deutliches Centrum; die Structur wird manchmal dadurch noch besonders evident, dass feine zarte schwarze Härchen oder dunkelbraune ferritische Nadeln und Borsten, in die hellen Fasern eingemengt, auf dasselbe Sphärolithcentrum zulaufen, und so im centralen Schnitt zierliche Sterne erzeugen. Die Faserkugeln besitzen gewöhnlich kein fremdes Centrum, ab und zu dient als solches ein Feldspathpartikelchen. In solchen ächt sphärolithischen Massen ist meistens gar keine axiolithische Faserung zu bemerken, nur da, wo der Zwischenraum zwischen zwei grösseren Kugeln eine längliche Gestalt besitzt, hat wohl hin und wieder eine longitudinal-axiale Gruppirung der Fasern stattgefunden; sonst sind die Lücken zwischen den normalen Sphärolithen gewöhnlich auch, aber sehr roh, radialfaserig. So struirte Grundmassen sind oft recht reich an makroskopischen Krystallen; übrigens gehen die eigentlichen Sphärolithe vielfach in lange eisblumenähnlich divergentfaserige, an den Enden gekrümmte Büschel über. Granosphärite kommen in diesen Rhyolithen überhaupt nicht vor.

k) confuses Aggregat von genau parallelfaserigen Bündelsystemen (vgl. S. 215). Grundmassen von dieser Beschaffenheit, worin die einzelnen Fasersysteme ungefähr 0,02 Mm. Länge erreichen und nur sehr schwach auf polarisirtes Licht wirken, besitzen gewöhnlich ein steingutähnliches oder porcellanähnliches Aussehen und diese Mikrostructur kommt in der That derjenigen überaus nahe, welche H. Behrens von dem künstlichen Porcellan beschrieben hat[1]; derlei Massen sind meist sehr krystallarm.

l) verwirrtes filzähnliches Aggregat von kurzen Fasern (hin

[1] Poggendorff's Annalen CL. 386.

und wieder mit kleinen polarisirenden Körnchen dazwischen, die bisweilen in kurze Streifchen versammelt sind).

m) Aggregat von Cumuliten, wie es, als hier sehr seltenes Vorkommniss, z. B. vorwiegend die Grundmasse eines Rhyoliths vom New Pass, Desatoya Mts, bildet. Die blassgelbliche Substanz polarisirt als solche ganz und gar nicht, bei gekreuzten Nicols flimmern nur spärliche selbständige Pünktchen und Stäubchen daraus hervor; gleichwohl ist sie aber weder eigentliches, structurloses Glas, noch der gewöhnliche Mikrofelsit. U. d. M. besteht sie bei sehr starker Vergrösserung aus äusserst kleinen hellen Kügelchen, welche zu träubchen- und brombeerähnlichen Gebilden zusammengehäuft sind, und den Cumuliten Vogelsangs [1]) entsprechen. Die Kügelchen sind deutlich concentrisch-schaalig, aber nicht, wenigstens nicht erkennbar, faserig; ihr Centrum ist gewöhnlich etwas dunkler, an den Rändern verfliessen sie vielfach in einander. Aehnliche cumulitische Grundmassen beobachtete Vogelsang in ungarischen Rhyolithen.

n) halbglasige Masse, bestehend aus einem mit Glas getränkten filzigen Aggregat kleiner dünner Mikrolithen (ähnlich der augitandesitischen Grundmasse), übergehend in Obsidian; Grundmasse gewöhnlich reich an grösseren Krystallen von Quarz, Sanidin und Biotit; von den Mikrolithen mögen manche dem Augit angehören.

o) fluidale Stränge und Linien von dunkelbraunen Körnchen, wellig und arabeskenartig gewunden, welche als Netzwerk mit langovalen Maschen homogenes Glas einschliessen. Die umzingelten Glasflecken (so erscheint der Durchschnitt) sind gewöhnlich im Innern etwas dunkler, bräunlichgelb, und verblassen nach aussen zu, wo sie an die Körnchen-Curven angrenzen. Sehr krystallarme Grundmasse.

p) ähnliche Stränge und Linien von Körnchen, welche anstatt homogenem Glas faserige sphärolithische oder axiolithische Körper einschliessen. Die gewundenen Fäden der dichtgedrängten dunkelbraunen Körnchen sind oft mit kurzen, wimperähnlichen, stachelähnlichen Härchen besetzt, so dass sie förmlich dornartig aussehen; auch diese kleinen Ansatzhärchen, welche in die umschlungenen Fasergebilde hineinragen, bestehen aus höchst winzigen linear gruppirten Körnchen, welche

1) Die Krystalliten, 1875. 134.

nach den Enden zu immer feiner werden. Die Sphärolithe zwischen den Fluidallinien sind meist in die Länge gezogen. Mitunter erscheinen auch anstatt der Linien im Durchschnitt breitere bräunlichrothe Streifen oder schmale Bänder, welche aus denselben kleinen dunkeln Körnchen bestehen, zwischen denen hier wahrscheinlich etwas Glas lagert.

q) hellfarbiges homogenes Glas, durchzogen von perlitischen Sprüngen, welche auf beiden Seiten von schmalen heller oder dunkler braunen Mikrofelsitzonen eingefasst werden. Die Dicke einer solchen Mikrofelsitwand, welche seitlich in das Glas übergeht, übersteigt hier nicht 0,01 Mm. Bei richtiger Einstellung sieht man wohl das zarte klaffende Spältchen dazwischen, oft scheint dasselbe aber auch ausgeheilt. Es ist im Ganzen eine ähnliche Erscheinung, wie sie viele Meissener Pechsteine aufweisen, wo aber die an die Sprünge angrenzende Zone meist besser krystallinisch entwickelt ist. Bei dem Rhyolith s. ö. von Wadsworth, Nevada, kann man z. B. zwischen gekreuzten Nicols Glas und Mikrofelsit nicht von einander unterscheiden.

Die häufigeren Ausbildungsweisen der Rhyolithgrundmasse dürften jedenfalls in den vorstehend erläuterten Fällen auch für andere Gegenden erschöpft sein. Eine, bei euganeischen und isländischen Rhyolithen vorkommende Modification, bei welcher die Grundmasse ein regelloses Aggregat von leistenförmigen Kryställchen und Mikrolithen ist, zwischen denen wohl etwas farbloses Glas steckt, wurde in obiges Schema nicht aufgenommen, weil sie sich hier längs des 40. Breitegrades gar nicht entwickelt fand.

Die Fluctuationsphänomene dieser Rhyolithe werden hervorgebracht:

1) durch den schichtenweise abwechselnden Gehalt an färbenden Theilchen (z. B. Nädelchen und Körnchen von Ferrit und Opacit) bei übrigens gleichbleibender Natur und Structur der Hauptmasse;
2) durch den bandweisen Wechsel verschiedener Structurvarietäten der Grundmasse, welche gewöhnlich allmählich in einander übergehen, nämlich durch die Abwechslung von
   a) mehr oder weniger deutlich krystallinisch körnigen Lagen mit sphärolithisch struirten,
   b) mikrofelsitischen mit sphärolithisch struirten,

c) mehr oder weniger vollkommen krystallinischen mit mikrofelsitischen Lagen,
d) unvollkommener — mit deutlicher körnigen Lagen,
e) bräunlichgelben, fein globulitischen Glaslagen mit farblosen Lagen, welche entweder undeutlich krystallinisch-körnig oder schwach-faserig sind; die letzteren Lagen enthalten dann gewöhnlich und sehr charakteristisch dunkle haarähnliche gekrümmte Mikrolithen oder raupenähnliche Margariten, welche meistens in den bräunlichen Glaslagen wurzeln.

Schliesslich folgen noch etliche, wie es scheint, der Beachtung werthe Bemerkungen über einzelne Gemengtheile. Die Quarze, an denen diese Rhyolithe durchschnittlich sehr reich sind, enthalten gewöhnlich die schönsten Glaseinschlüsse, selbst bis zu 1 Mm. dick, und manchmal vollkommen dihexaedrisch gestaltet. Diese Glaspartikel sind in den lichten Rhyolithen meist farblos, in den dunkleren meist bräunlich, dem Magma entsprechend, welches dann hier später so häufig in einerseits lichte, andererseits sehr dunkle Substanzen differenzirt wurde. Unter den vielen Tausenden von Quarzen, welche in diesen Rhyolithen sorgfältigst untersucht wurden, waren aber nur zwei, welche Flüssigkeitseinschlüsse besassen. Und der eine von diesen ausnahmsweisen Quarzen kommt in einem Rhyolith vor, welcher ausserdem völlig granitische Orthoklase unter Verhältnissen enthält, dass man diese Mineralien mit grösster Wahrscheinlichkeit als fremde Bruchstücke älterer Gesteine ansehen muss; während das den anderen flüssigkeitseinschlussführenden Quarz enthaltende Gestein nur petrographisch ein Rhyolith ist, gemäss dem nachträglich abgegebenen Zeugniss der Feldgeologen aber schon bei den Aufnahmen als geologisch eng zu den älteren Trachyten gehörig erkannt war und mit Bezug auf seine Eruptionszeit von den eigentlichen Rhyolithen völlig differirt. Das Studium der massenhaften Rhyolithe des 40. Breitegrades bestätigt daher wieder schlagend das aus der Untersuchung ähnlicher europäischer Felsarten gewonnene Ergebniss, dass die Quarze in den ächten Gliedern dieser Gruppe nur Glaseinschlüsse führen [1]).

Auch die Feldspathe sind mitunter recht reich an Glaseinschlüssen, welche im Gegensatz zu denen in den Quarzen hier

1) Auf diese Thatsache habe ich schon 1872 aufmerksam gemacht.

gewöhnlich recht unregelmässig mit Einbuchtungen und zahnähnlichen Vorsprüngen contourirt sind. Besondere Aufmerksamkeit erfordern die Sanidine gewisser dieser Rhyolithe, welche, äusserlich trüb und etwas milchig aussehend, in ihrer klaren Masse eine ungeheure Menge von Flüssigkeitseinschlüssen mit mobiler Libelle enthalten, so reichlich, wie dies früher nie wahrgenommen wurde (z. B. Rhyolith aus dem Sheep Corral Cañon, dessen Quarze, im schärfsten Contrast, wieder blos Glas führen). Dies verschiedene Verhalten der Einschlüsse in den verschiedenen Gemengtheilen desselben Gesteins ist überhaupt manchmal recht auffallend, wie denn mit Glaskörnern gespickte Sanidine neben Quarzen liegen, welche ganz frei davon sind, oder die Feldspathmasse mit unermesslich vielen Dampfporen erfüllt ist, die dem benachbarten Quarz völlig fehlen.

Eigenthümlich ist der herrliche blaue Lichtschein, welchen die bis 3 Mm. grossen Sanidine einiger dieser Rhyolithe (z. B. vom Pass unterhalb Chataya Peak, Pah-Ute Mts, aus der Schlucht n. vom Shoshone Pass, vom New Pass, Desatoya Mts) im auffallenden Licht viel schöner und intensiver zeigen, als der »labradorisirende« Feldspath von Frederiksvärn; auch im dünnsten Schliff erscheint derselbe, während im durchfallenden Licht der Schnitt ganz farblos ist. Dies Phänomen ist deshalb sehr sonderbar, weil die Feldspathmasse in allen diesen Vorkommnissen absolut frei ist von jedweder mikroskopischen Einlagerung, dabei völlig compact und gänzlich ohne Sprünge, es sich auch hier nicht um eine Polarisationserscheinung bei einem zwillingslamellirten Plagioklas handelt[1]). — Wenigemal wurde auch eine Umwandlung des rhyolithischen Plagioklases in Calcit, ähnlich der im Dacit vor sich gehenden (vgl. S. 201) wahrgenommen; der neugebildete Calcit zeigt dann innerhalb des Feldspaths nicht nur seine rhomboedrische Spaltung, sondern selbst Zwillingsbildung nach $-\frac{1}{2}R$. — Mikrolithen von Feldspath sind im Gegensatz zu den Trachyten in der rhyolithischen Grundmasse gewöhnlich äusserst selten.

Nur ab und zu ist viel mikroskopischer Biotit in diesen Gesteinen vorhanden; die grösseren Lamellen tragen oft aussen die schwarze Körnerzone, die bisweilen tief in das Innere ein-

1) Vogelsang, Sur le labradorite coloré. Archives Néerlandaises, 1868. Tome III.

greift. Einigemal führt sogar dieser rhyolithische Biotit die Sterngruppen spiessiger Nädelchen, genau wie der in den krystallinischen Schiefern und in Graniten. Von Muscovit fehlt auch hier jede Spur. Hornblende ist nicht sonderlich häufig, der Augit steht ihr zwar an allgemeiner Verbreitung nach, doch ist er keineswegs so gänzlich ausgeschlossen, wie man früher glaubte. Tridymit wurde hier in manchen Rhyolithen beobachtet, z. B. in der Schlucht n. von Truckee Road zwischen Glendale und Clark's Station, vom Gipfel der Shoshone Mesa, von den Antelope Hills s. von Leech Spring, Nev., in den Goose Creek Hills; meist ist es grauer, quarzarmer Rhyolith, worin die (hier blos mikroskopischen) Tridymite auftreten, und der durchgängige sehr bedeutende Quarzgehalt dieser amerikanischen Rhyolithe mag vielleicht dazu beigetragen haben, dass die meisten Vorkommnisse tridymitfrei ausgefallen sind. Apatit ist nicht häufig und in bemerkenswerther Weise auf diejenigen Rhyolithe beschränkt, welche reich an grösseren Krystallen sind oder eine ziemlich krystallinisch entwickelte Grundmasse besitzen; er fehlt stets in den mikrofelsitischen, stark faserigen und sonstwie unbestimmt krystallinischen Gesteinen, eine auffallende Erscheinung, weil, sofern seine Individualisirung an die Gegenwart von Phosphorsäure geknüpft ist, eine Beziehung zwischen dieser letzten und jenen Structurmoden nicht zu erblicken ist, welche ihrerseits schwerlich von der chemischen Zusammensetzung abhängen. Der Rhyolith vom Pleasant Valley, s. vom Pine Nut Pass, Piñon Range, enthält rothe Granatkörner, bis zu 0,2 Mm. im Durchmesser.

Endlich mag noch hervorgehoben werden, dass so viele dieser Rhyolithe ganz kleine, oft erst mit dem Mikroskop wahrnehmbare eckige unzweifelhafte Fragmente anderer Varietäten einschliessen, welche sich durch Umgrenzung und totale Verschiedenheit in Structur und Farbe scharf hervorheben, und manchmal in sehr bedeutender Zahl vorhanden sind.

Glasige und stark halbglasige (hyaline) Rhyolithe.

Die eigentlichen Rhyolithe werden an vielen Stellen von den ausgezeichnetsten Obsidianen, pechsteinähnlichen Massen, Bimssteinen und Perliten begleitet; da die allgemeine Structur derselben bekannt ist, so werden hier nur gewisse erwähnenswerthere Vorkommnisse specieller hervorgehoben.

Am linken Flussufer an der Truckee Ferry, Truckee Cañon, steht zwischen und über den Trachyten ein braunes obsidianähnliches Glas an, welches im Dünnschliff lebhaft orangefarbig wird und bis auf einige ganz schwache Ansätze zu Feldspathmikrolithen gar keine Ausscheidung enthält. Ebenda findet sich auch ein schön pechglänzender Obsidian, welcher aus Lamellen und Schichten von zwei Glasarten besteht, die auf das confuseste durcheinander gewunden und geschlungen sind. Das eine Glas ist in den Schliffen ganz farblos und rein, das andere blassbräunlich mit höchst winzigen bräunlichen Körnchen von nur 0,0005 Mm. Durchmesser; die Durchflechtung ist so, als ob die dünnen Lagen künstlich durcheinandergeknetet seien, und man sieht sehr deutlich, dass es sich hier um wirkliche Schichten und nicht blos um fadenähnliche Stränge handelt. Der Durchschnitt ist oft dem eines knorrigen Holzstammes vergleichbar und manche Lamellen sind gewunden wie eine Schiffsschraube. Sehr instructiv für die Aggregation kleiner Globuliten im Glas ist die dunkelgraue Glasmasse vom Rhyolithe Peak, n. von Desert Station, Truckee Range: die einfachen Elemente sind ganz blassgrünliche, 0,002 bis 0,003 Mm. dicke, rundliche und eckige isotrope Körnchen, welche bald isolirt umherliegen, bald zu 2, 3 oder mehreren sich zu einem Klümpchen oder Sternchen zusammenballen, bald auch kurzkettenartig mit oder ohne Zwischenräume aneinandergereiht sind; die Globuliten des so erzeugten Nadelgebildes werden nach dem einen Ende kleiner, so dass dasselbe hier in eine förmliche Spitze ausläuft; zwei dieser Nadeln divergiren oft von einem dickeren Globuliten aus, wie die beiden Schenkel eines geöffneten Zirkels. Durch mehrfache Wiederholung entstehen allerlei knieförmige Gestalten. Daneben bilden isolirt hintereinander liegende Körnchen die zierlichsten gekrümmten korkzieherartigen Ranken und Kringel, die oft mit einem Ende spinnenähnlich zusammenschiessen. Alle diese Erscheinungen, welche ganz mit denen übereinstimmen, welche Vogelsang aus den künstlichen Schlacken von der Friedrich-Wilhelmshütte bei Siegburg beschrieb [1]), wiederholen sich ausserordentlich häufig in den Glasgesteinen des 40. Breitegrades.

Die beiden ausgezeichnetsten Verbreitungsgebiete der glasigen Gesteine sind die Pah-tson Mts und die Montezuma Range,

1) Die Krystalliten, 1875. S. 25. Taf. II.

wo sie in Verbindung mit Rhyolithen vorkommen. Besonders schön sind hier die bläulichgrauen Perlite, welche als innersten Kern ihrer Glaszwiebeln haselnuss- und wallnussdicke glänzende compacte Obsidiankörner und -kugeln enthalten. Solche Perlite finden sich in den Pah-tson Mts an der Basalt ridge, am Aloha Peak, und namentlich im Grass Cañon; sie sind meist durch gewundene und geknotete Ranken, Kringel und Wimper von aneinandergereihten Globuliten entglast, ein Devitrificationsmodus, der für die Perlite überhaupt charakteristischer scheint, als für Obsidiane, Bimssteine und Pechsteine; Ströme von solchen Gebilden, auch wohl Stränge farbloser mikrolithischer Stacheln, gehen wie üblich ungestört durch die Glasschaalen hindurch. Hornblende und Glimmerblättchen, nach der Dünne lichtbraun bis schwarzbraun mit sehr starker Absorption sind reichlicher als Feldspathe in diesen Perliten ausgeschieden, welche sich gegenüber den ungarischen durch den gänzlichen Mangel jeder Sphärolithbildung auszeichnen. Die dem Marekanit entsprechenden Obsidiankerne aus diesen Perliten sind in einer sonst höchst seltenen Weise frei von fast jeglicher mikrolithischen oder globulitischen Ausscheidung, eine der reinsten Glasmassen, die es auf Erden gibt, wobei dann auffallend ist, dass sie im Gegensatz zu anderen ähnlich beschaffenen gar keine mikroskopischen Gasporen enthalten.

In den Perliten der Montezuma Range, w. von Parker's Station, stellen sich auch vielfach schwarze gerade oder geknickte Trichite ein; hinter Lovelock's Knob steht, in schöne Säulen abgesondert, ein mattglänzendes graues Mittelglied zwischen Perlit und Rhyolith an, welches Quarzkrystalle, Biotittafeln, dunkelbraune Hornblendeprismen und prächtige Augite enthält, welch letzterer Gemengtheil überhaupt in den Gläsern der weiter nach O. gelegenen Gegenden eine grosse Rolle spielt. Es ist sehr wahrscheinlich, dass in den entsprechenden europäischen Vorkommnissen früher der Augit vielfach mit Hornblende verwechselt worden ist und dass die dunkel- oder hellergrünen dickeren oder dünneren Prismen in Obsidianen und Pechsteinen mehr dem ersteren als dem letzteren Mineral zugerechnet werdes müssen.

Interessant ist ein Mittelglied zwischen Perlit und Rhyolith von der Shoshone Mesa, welches in seiner grauen halbglasigen Masse eine ausgesprochene Tendenz zur Schaalenbildung und

ausserdem nussgrosse Sphärolithe zeigt; die letzteren entfalten durch die Verwitterung eine concentrisch-schaalige Structur, wobei dann die einzelnen Lagen abweichend angreifbar sind, so dass die weniger zersetzbaren uhrglasförmig isolirt werden; alle Uebergänge existiren zwischen frischen vollständigen Sphärolithen und Hohlräumen, in denen 5, 6 gebogene Schaalen mit ihren Rändern hervortreten — ein ausgezeichnetes Vorkommniss der Richthofen'schen »Lithophysen«, welche hier entschieden nicht als blasenartige Auftreibungen, sondern als Verwitterungsproducte im Sinne von J. Roth zu deuten sind. Das Gestein enthält noch Quarz, bis 4 Mm. grosse Feldspathe, Hornblende und Augit. Aechte Glasgesteine finden sich weiter am Westfusse der Owyhee Bluffs und am Gipfel des Mount Neva, Cortez Range.

Ein rothbraunes Glasgestein mit halbzollgrossen Feldspathen und Quarzen findet sich an den Ombe Bluffs, gerade s. von der Union Pacific Railway; in den Quarzen stecken in unübertrefflicher Deutlichkeit stecknadelkopfgrosse makroskopische Einschlüsse des benachbarten Glases mit seiner charakteristischen Farbe, wie dies sonst nur noch in den Feldspathen einiger arraner Pechsteine zu erblicken ist. U. d. M. sieht man, dass die Glasmasse des Gesteins eigentlich zwiefarbig ist: sie besteht aus vorwaltendem, im Dünnschliff ganz morgenroth oder intensiv gelbroth gefärbtem und, scharf abgegrenzt davon, aus fast ganz farblosem Glas, beide abwechselnd in vielfach durcheinander geschlungenen Streifen, als ob man dünne Lagen der beiden Glassorten übereinander gedeckt, diese Masse gehörig durcheinandergeknetet und dann das Ganze noch in die Länge ausgezogen hätte. Das orangerothe Glas enthält eine grosse Menge langer schmaler Hohlräume, alle parallel der Streifenrichtung, aber fast keine Entglasung; das farblose ist compacter und darin liegen ziemlich reichlich schwarze Körnchen und Ansätze zur Trichitbildung. Am Ostabhange der Goose Creek Mts tritt ein stark halbglasiges Gestein auf mit deutlicher Tendenz zur Bildung perlitischer Kugeln und fast erbsendicken Quarzen; u. d. M. ergeben sich als sehr reichlich vorhandene Ausscheidungen a) Quarz in rohen Dihexaedern; b) c) Sanidin und Plagioklas; d) sehr lamellirter Biotit; e) schönster, schwach gelblichgrüner Augit, oft um und um krystallisirt in der Form ($\infty P . \infty \breve{P} \infty . \infty \breve{P} \infty . -P$); f) spärliche dunkelbraune Hornblende; g) Mag-

netit. Zwischen diesen Gemengtheilen ein wogendes Mikrolithenaggregat mit einer deutlichen Glasbasis; die Mikrolithen sind eigentlich ganz blassgrün und es kann kaum ein Zweifel sein, dass sie dem Augit angehören. In dieser Gegend kommt noch ein anderes Gestein mit einer recht merkwürdigen Structur vor: es stellt im Handstück ein hellgraues Glas dar, worin viele rundliche, auch eckige, bis erbsendicke Partien einer matt- oder wachsglänzenden dunkelisabelfarbigen Substanz liegen; im Dünnschliff werden dieselben nur schwach pellucid und treten vorzüglich gegen die Glasmasse hervor. In dem Glase, welches die Hauptmasse bildet, liegen u. d. M. einzelne grössere Quarze und Feldspathe, daneben aber die üblichen mikrolithischen Ausscheidungsproducte, locker zu ausgezeichneten fluidalen Strömen aggregirt. Man ist nun erstaunt, zu sehen, wie diese Mikrolithenströme durch die matten graugelben Partieen ungehindert hindurchsetzen, ihre Richtung beim Eintritt oder Austritt gar nicht verändern, so dass diese Flecken, was Natur, Quantität und Anordnung der Mikrolithen betrifft, sich genau so verhalten, wie die Glasmasse. Sehr bemerkenswerth ist aber, dass hier innerhalb dieser isabelfarbigen Flecken kein reines Glas zwischen den Mikrolithen liegt, sondern eine feinsphärolithische Substanz, wobei die Richtung der zarten Fäserchen selbst bei den unregelmässig contourirten Partieen mehr oder weniger senkrecht auf der Umgrenzung steht. Diese Fasermasse, welche bei gekreuzten Nicols ab und zu einen schwachen Lichtschein aussendet, erzeugt die Mattheit und geringere Pellucidität der Flecken. Eine Entwickelung sphärolithischer Fasern hat demzufolge local in diesem Gestein an Stelle der Glasmasse stattgefunden, aber erst nachdem die Mikrolithen nicht nur schon ausgeschieden, sondern auch schon vermöge der Fluctuation durch das ganze Gestein zu welligen Strömen arrangirt waren; sie ereignete sich alsdann, ohne die Natur oder Stellung der Mikrolithen irgendwie zu beeinträchtigen oder zu verändern.

Augitandesit.

Längs des 40. Breitegrades ist diejenige Gesteinsart, welche man neuerdings mit dem Namen Augitandesit belegt, in höchst typischen Vorkommnissen verbreitet; diese ganz besonders scharf charakterisirten Gesteine, in den Hauptzügen mit den allmählich

in grosser Menge von vielen anderen Punkten der Erde bekannt gewordenen Augitandesiten merkwürdig getreu übereinstimmend, unterscheiden sich hier von den gewöhnlichen Feldspathbasalten, denen sie makroskopisch und geologisch am nächsten stehen, durch folgende Momente:

a) neben dem Plagioklas ist immer, durch die optische Orientirung charakterisirt, Sanidin vorhanden, aber doch stets in zurücktretender Quantität.

b) der Olivin fehlt im Allgemeinen, um so mehr, je mehr Sanidin vorhanden ist.

c) die Mikrostructur weicht von der der meisten Basalte völlig ab, indem die Hauptmasse des Gesteins einen glasgetränkten Filz gleichmässig grosser Mikrolithen darstellt; die grösseren Feldspathe sind viel mehr mit Glaseinschlüssen überladen, als die der Basalte, und die Glasbasis selbst gibt dem Gestein meist ein etwas pechglänzendes Aussehen.

d) die grösseren Augite sind von einer besonderen Schärfe der Krystallumrisse und oft ziemlich stark pleochroitisch.

e) oft ist etwas Hornblende als accessorischer Gemengtheil vorhanden, die den Feldspathbasalten in der Regel ganz abgeht.

f) die chemischen Analysen weisen einen verhältnissmässig hohen Kieselsäuregehalt auf, der den aller Basalte weit übertrifft.

g) vielleicht darf noch erwähnt werden, dass die Apatite dieser Gesteine meist staubig sind, wie es häufiger in Andesiten und Trachyten, als in Basalten der Fall ist.

Die Unterschiede zwischen Augitandesit und Basalt sind, da die Hauptgemengtheile, Plagioklas und Augit, zusammenfallen, demgemäss (mit Ausnahme von f) eigentlich nur von mehr secundärer Bedeutung; damit hängt es zusammen, dass ein makroskopisches Studium die Augitandesite früher grösstentheils den Basalten zurechnete; beide Gesteine sind auch hier geologisch eng verbunden, besitzen dieselbe Form des Auftretens und sind zusammen noch jünger als selbst die Rhyolithe. Von den gewöhnlichen Trachyten unterscheiden sich die Augitandesite, was die Gemengtheile betrifft, durch das Vorwalten des Plagioklas und die reichliche Gegenwart des Augits; näher stehen sie so den seltenen Augittrachyten mit ihrem wechselnden, oft nur schwach vorwaltenden Sanidingehalt, ihrer spärlichen Hornblendeführung und ihrem Mangel an Olivin; aber geologisch und geographisch haben die Augitandesite selbst mit solchen

Trachyten nichts zu thun. Die von den typischsten Augitandesiten mit monotoner Constanz festgehaltene Structur (vgl. c) ist derart, dass sie das der Wahrnehmung kleiner Differenzen fähige Auge überhaupt kaum je bei eigentlichen Trachyten wiederfindet.

Gegenden, wo solche charakteristischen Augitandesite vorkommen, sind: die Kuppe w. vom Basalt Creek, Washoe (mit 58,015 pCt. Kieselsäure); die Hügel w. vom Steamboat Valley, Nevada; die Hügel s. vom Truckee River, s. von Wadsworth; im Antimony Cañon, Augusta Mts.; die n. Abhänge von Jacob's Promontory, Reese River Valley; im Susan Creek Cañon, Nev.; die niedrigen Hügel der Cortez Range, Independence Valley, Nev.; am North Pass im Wagon Cañon, Cortez Mts.; am South Point und im Spring Cañon, Wachoe Mts.; w. vom White Rock, Cedar Mts.

Noch einige allgemeine Bemerkungen mögen hier Platz finden. Die Feldspathleisten erreichen wohl die Länge von 2 Cm., ihr Erfülltsein mit meist zonal eingelagerten Glaseinschlüssen geht oft ins Ungeheure; die Sanidine sind vielfach schön schichtenförmig aufgebaut; sie werden natürlich dunkel, wenn bei Schnitten nach *P* die Kante *PM* parallel einem Nicolhauptschnitt liegt. Die Plagioklase zeigen im Allgemeinen auf *P* eine nur geringe Auslöschungsschiefe gegen die Zwillingsebene der Lamellen. Die absonderlich scharfrandigen Augite mit ihrem achtseitigen ($\infty P . \infty \breve{P}\infty . \infty \breve{P}\infty$) Querschnitt, bei welchem die Pinakoide gewöhnlich dem Prisma mindestens das Gleichgewicht halten, sind niemals schwarz umsäumt, während die Hornblende hier niemals so wohlkrystallisirt ist, im Gegentheil in sehr unregelmässig gestalteten Individuen, vielfach auch nur als entschiedene Fragmente auftritt, zumeist aussen den schwarzen Körnchenrand trägt und geradezu einen erratischen Eindruck macht, als ob sie dem Gestein selbst fremd wäre. In den Augiten liegt auch stellenweise eine colossale Menge von Glaseinschlüssen: ein Krystalldurchschnitt, lang 0,3 Mm., breit 0,12 Mm., besass in einer Ebene nicht weniger als 95 ovale Glaskörnchen, jedes mit einem Bläschen; auf einer Fläche von 1 Quadr.-Mm. Augit würden nach diesem Verhältniss 2650 Glaseinschlüsse enthalten sein, und wenn sie gleichmässig durch den ganzen Krystall vertheilt wären, würde 1 Cub.-Mm. Augit mehr als 7 Millionen derselben (7022500) führen. Mitunter sind die Glaspartikel in den Augitkrystallen so gross, dass sie selbst Augit-

mikrolithen enthalten. Das Gestein w. vom White Rock, Cedar Mts, besitzt auch Biotitlamellen, sonst sehr selten in diesen ebenso einförmig als übereinstimmend zusammengesetzten Massen; Quarz ist nirgendwo vorhanden. Die Grundmasse, worin die Feldspath- und Augitkrystalle liegen, ist ein filziges Aggregat von ganz farblosen Feldspath- und sehr blassgelblichgrünen Augitmikrolithen, nebst scharfen schwarzen Magnetitkörnchen, durch und durch getränkt mit einer bald mehr graulichen, bald mehr bräunlichen Glasbasis, welche nur selten rein in grösseren Flecken hervortritt[1]). Weder eine mikrofelsitische, noch eine globulitische Basis ist hier irgendwo zugegen. Im Allgemeinen zeigt es sich, dass die Augitandesite mit einer blassgraulichen Glasbasis viel reicher an grösseren und mikrolithischen Augiten sind, als die mit bräunlichem Glas, und es wird deshalb sehr wahrscheinlich, dass das Eisen des ursprünglichen Magmas bei den ersteren meistentheils in die Augite überging, bei den letzteren in der hyalinen Basis verblieb. Von diesem Gesichtspunkte aus ist es bemerkenswerth zu beobachten, dass die Feldspathe, die in dem grauglasigen Mikrolithengewebe liegen, so oft Einschlüsse von braunem Glas enthalten, welche erweisen, dass zur Zeit ihrer Einhüllung die Differenzirung des Magmas und die Ausscheidung der Augite (und Magnetite) noch nicht vor sich gegangen war. Im Allgemeinen sind übrigens die Augitandesite mit grauglasiger

---

1) Diese Structur ist ohne Zweifel die am meisten charakteristische für alle ächten Augitandesite, die deshalb in den meisten Vorkommnissen weniger als eine andere Gesteinsart untereinander differiren. Sehr typische beschrieb Dr. Wichmann von den Palau-Inseln in Australien (Journal des Museum Godeffroy, 1875, Heft VIII), und sandte Dr. Ulrich in Melbourne an das Leipziger mineralogische Museum, herstammend von Kyneton in Victoria, Australien; einer der besten europäischen ist das dunkle pechglänzende Gestein (sog. Trachyt) von Begonya in Ungarn, welches wegen des Hyalits auf seinen Klüften in vielen Sammlungen verbreitet ist, ferner das von Ober-Fernezely.

Die vielbesprochenen Santorinlaven wurden schon in dem englischen Text (Sommer 1875) zu den Augitandesiten gezählt, nachdem ich mich durch optische Prüfung davon überzeugt, dass in ihnen der Plagioklas weitaus den Sanidin überwiegt. Gerade diese Laven tragen in ihren verbreitetsten Repräsentanten die oben geschilderte Structur vorzüglich zur Schau. Das Gestein von der Löwenburg im Siebengebirge gehört dagegen, abgesehen von seiner total abweichenden Mikrostructur, schon wegen seines, den Basalten nicht nachstehenden Olivingehalts durchaus nicht zu den Augitandesiten nach der neuen Fassung des Begriffs.

Basis mehr auf den Osten, die mit braunglasiger mehr auf den Westen der untersuchten Territorien beschränkt.

Basalt.

Trotz der ungeheuren Anzahl und der Ausdehnung der Eruptionen sog. Basaltgesteine gehören diese Massen mit ganz spärlichen, auch auf den äussersten Osten der untersuchten Gegenden beschränkten Ausnahmen zu den Feldspathbasalten. Wenn demzufolge der allgemeine Typus der mineralischen Zusammensetzung bei der Abwesenheit von Nephelin und Leucit in diesen Gesteinen ziemlich monoton ist, so verschafft andererseits die verschieden ausgefallene und grossentheils recht charakteristische Mikrostructur willkommene Abwechslung beim Studium der Plagioklasbasalte.

Von den Gegenden, wo die Basalte eine besondere Entwickelung gefunden haben, sind folgende zu nennen: der American Flat Cañon, Washoe; gewisse Partieen der Virginia Range (z. B. ö. von Spanish Spring Station); namentlich der Truckee Cañon und die umliegenden Berge, wo die Basalte stellenweise über die älteren Diabasgesteine geflossen sind; die Kawsoh Mts; die Ketten an dem Ostufer des Pyramid Lake, und an dem Nordwestufer des Winnemucca Lake; die Black Rock Mts, Pahtson Mts, die Montezuma Range und die Pah-Ute Range; Fish Creek Mts; die Havallah Range; Shoshone Mesa; der Agate Pass in der Cortez Range; Ombe Mts, Elkhead Mts; Buffalo Peak im North Park, Colorado.

Anstatt der ermüdenden speciellen Schilderung der einzelnen Vorkommnisse mögen hier die allgemeinen Resultate zusammengefasst werden, wie sie sich aus der Untersuchung von ungefähr 200 Repräsentanten ergeben haben. Dieselben bieten folgende Haupt-Structurvarietäten dar:

a) Gesteine von einer durchschnittlich gleichmässigkörnig krystallinischen Zusammensetzung (aus Plagioklas, Augit, Olivin, Magnetit), ohne Disposition zu porphyritischer Mikrostructur, äusserst arm an oder frei von einer amorphen, glasigen oder halbglasigen Basis (sehr oft aber ist dennoch eine schwache Spur von globulitischem Glas zwischen den krystallinischen Gemengtheilen vorhanden). Dieser Structurtypus findet sich sowohl bei den eigentlichen grob- oder mittelkörnigen Dole-

riten, als auch bei einigen äusserlich homogen erscheinenden eigentlichen Basalten. Während aber diese Gefügeart ohne Zweifel unter den deutschen oder nordwesteuropäischen (irischen, schottischen, faeröischen, isländischen) Basaltgesteinen die verbreitetste ist, erscheint sie verhältnissmässig selten unter den amerikanischen vom 40. Breitegrad. Die grösseren Plagioklase sind hier im Allgemeinen wohl etwas reicher an halbentglasten Einschlüssen, als es in den deutschen sonst entsprechenden Gesteinen der Fall. Derlei Basalte pflegen fast gar keinen erkennbaren Sanidin zu enthalten, der sich nur da einzustellen scheint, wo eine globulitisch-glasige Basis eine grössere Entwickelung gewinnt. Die Augite dieser Gesteine sind gewöhnlich ziemlich dunkel und wenig selbständig contourirt, die Olivine mehr oder weniger stark metamorphosirt, Apatit ist seltener als in Deutschland, Eisenglanz wird wohl häufiger gefunden. Schöne mittel- oder grobkörnige Dolerite wurden u. a. aus den Black Rock Mts, aus der Wüste zwischen den Kamma- und Pah-supp Mts, von den Cliffs der Shoshone Mesa, vom Whirlwind Peak, Shoshone Range, vom Watch Hill, Elkhead Mts, untersucht.

b) Gesteine, bestehend aus einem mikroskopisch feinkörnigen völlig krystallinischen Aggregat von sehr verkrüppelten Mikrolithen und Körnchen, welches als Grundmasse dient, worin dann mikroporphyrisch und makroporphyrisch grössere Krystalle von Feldspath und Olivin, seltener von Augit, auffallend contrastirend eingebettet liegen. In jenem Grundgewebe walten rundliche oft tropfenähnliche Körner und abgerundete Mikrolithen von blassem Augit und scharfe schwarze Magnetitkörner vor den Feldspathen vor, keines dieser Individuen übersteigt gewöhnlich 0,01 Mm. in der Dicke. Der Olivin betheiligt sich in der Regel gar nicht an dieser Grundmasse, er bildet meist nur wohlgestaltete grössere porphyrische Krystalle, wie umgekehrt der meiste Augit des Gesteines gerade auf die Grundmasse beschränkt ist. Andere charakteristische Erscheinungen sind, dass die zwei langen parallelen Randlinien der grösseren leistenförmigen Plagioklasdurchschnitte gewöhnlich nicht sehr scharf ausgezogen sind, dass sehr kleine Augitkörner vielfach in den grösseren Feldspathen reihenförmig nach Linien eingebettet liegen, welche der triklinen Zwillingslamellirung entsprechen, sowie dass zwei Feldspathindividuen nahe aneinander gerückt sind und nur durch eine Zeile von Augit- und Magnetitkörnchen

getrennt werden. Dieser sehr gekennzeichnete Structurtypus ist auch in N.W.-Amerika stellenweise vortrefflich entwickelt. Einmal wurden (King's Station, Truckee Range) auch tümpelähnliche lichtbraune Glasflecken in dem Grundgewebe wahrgenommen.

c) Gesteine, worin eine homogene reine Glasbasis gewöhnlich von einer gelblichbraunen oder kaffeebraunen Farbe reichlich vorhanden ist, doch kaum in solcher Menge, dass sie die krystallinischen Gemengtheile übertrifft. Dieser Structurtypus ist unter den n.w.-amerikanischen Basalten nicht sonderlich beliebt, es fand sich nur ein hierher gehöriges, allerdings höchst charakteristisches Vorkommniss, vom Gipfel des Anita Peak, Elkhead Mts, welches aufs genaueste mit den deutschen Basalten vom Stillberg im Habichtswald, von Elfershausen in Hessen, vom Weissholz bei Lütgeneder u. s. w. übereinstimmte.

d) Gesteine bestehend aus grösseren und kleineren Krystallen mit einer globulitisch glasigen Basis, welche in keilförmigen Partieen zwischen dieselben geklemmt erscheint. Diese ausserordentlich gut gekennzeichnete Structurausbildung, welche in anderen basaltischen Regionen nur als eine freilich sehr charakteristische Ausnahme vorkommt, ist hier längs des 40. Parallels ohne Zweifel die vorwaltend entwickelte, während, wie oben angeführt, hier nur verhältnissmässig selten diejenige auftritt, welche in den europäischen Basaltterritorien die häufigere ist.

In diesen amerikanischen Gegenden ist die in Rede stehende Structur nebenbei in besonderer Deutlichkeit ausgebildet und lässt manche, sonst weniger klar hervortretende Eigenthümlichkeiten sehr gut erkennen. Die eigentliche Basis ist ein fast farbloses oder sehr blass gelblichgraues Glas, die globulitischen Kügelchen sind durchschnittlich 0,0015 Mm. dick, haben eine dunkelbraune Farbe und zeigen mit starker Vergrösserung einen lichten centralen Fleck, erweisen sich dabei als optisch völlig isotrop. Häufig enthält das Glas ausser diesen Globuliten lange schmale spiessige Nadeln und Strahlen, oft mit kleinen Pünktchen bestäubt, vielfach an den Enden dichotom, entweder parallel oder verwirrt gestellt, von denen die längeren und kräftigeren häufig in die benachbarten Feldspathkrystalle hineinragen. Diese Mikrolithen sind in dem farblos ausgefallenen Glas so oft entschieden blassgelblichgrün, dass wenigstens hier ihre Augitnatur kaum

zweifelhaft ist. Die Art und Weise der Einklemmung der globulitischen Basis darf als bekannt gelten: nur selten sind die Fälle, wo sie nicht lange schmale keilförmige oder pfeilspitzenähnliche Partieen, sondern rundliche insulare Flecken bildet, oder in dem Gestein wie ein förmlicher Grundteig vorhanden ist (z. B. Ostende der Kawsoh Mts). Tendenz zu molecularer Alteration ist hier, wo diese Structur so weit verbreitet, auch manchfach zu gewahren: das Endproduct sind gewundene oder concentrische Schichten einer schmutzig grauen oder bräunlichgelben faserigen, schwach polarisirenden Substanz mit ringförmigen etwas abweichend gefärbten Durchschnitten. Manchmal findet sich stellenweise anstatt der globulitischen Basis in demselben Gestein ein reines körnerloses Glas, welches alsdann eine tiefbraune Farbe hat, wodurch auch ausgesprochen wird, dass es als solches das Aequivalent der anderen, in helles Glas und dunklere Globuliten differenzirten Masse darstellt. — Eine nicht unbeträchtliche Anzahl der Feldspathe ist in dieser charakteristischen Structurvarietät monoklin. Sie und die vorwaltenden Plagioklase enthalten gewöhnlich lange fetzen- und striemenähnliche Einlagerungen der globulitischen Basis. Grössere Augitkrystalle sind verhältnissmässig selten, das Mineral bildet gewöhnlich nur kleine unregelmässige und verkrüppelte Individuen, völlig abweichend von den morphologisch so exact gebildeten in den Augitandesiten. Manche Vorkommnisse enthalten sogar sehr wenig Augit und es ist bemerkenswerth, dass dies diejenigen sind, welche sich zugleich reich an der braunen amorphen Basis erweisen; da auch das umgekehrte Verhältniss obwaltet, so wird es höchst wahrscheinlich, dass beide Substanzen als gegenseitige Aequivalente fungiren. Die Olivine sind an Zahl und Beschaffenheit dieselben, wie in den anderen Varietäten. Magnetit hat hier entschieden mehr als in den anderen Structurtypen die Neigung, Skelete oder kreusförmige Gruppen zu bilden; Apatit ist sehr selten, Hornblende und Nephelin sind ganz ausgeschlossen.

Die globulitische Basis dieser Gesteine wird nicht im mindesten durch Chlorwasserstoffsäure angegriffen: Pulver derselben, welches damit 5 Stunden gekocht und dann noch 4 Tage im kalten Zustande behandelt wurde, zeigte u. d. M., dass die kleinen Fragmente der Basis ganz frisch und unangegriffen verblieben waren. Das Glas kann daher hier keine tachylytische Natur, sondern

muss wohl eine kieselsäurereichere Zusammensetzung besitzen. Bei der langen Behandlung mit Säure blieben auch die Feldspathe ganz unangegriffen, nur Olivin und Magnetit verschwanden, und so ist das sehr schwache Gelatiniren dieser Gesteine begreiflich. Den Kieselsäuregehalt eines solchen Basalts aus dem Truckee Valley bestimmte Dr. Councler in Leipzig zu 56,53 pCt., das ist erheblich mehr, als die durchschnittliche Menge in anderen Basalten. Dadurch, durch die häufige Anwesenheit von Sanidin und durch die reichliche Betheiligung hyaliner Materie nähert sich unter allen Basaltstructurvarietäten diese am meisten dem Augitandesit, wovon sie aber andererseits durch den Olivingehalt sehr deutlich geschieden ist.

Schon oben wurde angeführt, dass dieser Structurtypus längs des 40. Breitegrades hier zweifellos der weitest verbreitete ist; und mit der hier zu Tage tretenden grossen Neigung zur Entwickelung der globulitischen Masse mag es auch zusammenhängen, dass selbst bei den fast ganz krystallinischen Basalten, wo sonst nur ein Hauch reinen Glases zwischen den Gemengtheilen zu liegen pflegt, in diesen Gegenden solche ganz zurückstehenden spärlichen Theile amorpher Substanz abermals meistentheils globulitisch ausgefallen sind.

In der Ruby Valley Range findet sich in Verbindung mit Basalten eine feinporöse schwarzbraune, pechglänzende Masse, welche sich u. d. M. als ein Glas erweist, frei von jeder Spur eines Devitrificationsproducts bis auf ganz schwache Andeutungen dunkler unbestimmter Körnchen. Da dieses Glas mit kochender Salzsäure, welche dasselbe nur etwas bleicht, nicht im mindesten gelatinirt, so liegt hier kein Tachylyt, sondern diejenige Substanz vor, welche man neuerdings Hyalomelan nennt [1]).

Jene oben angeführten Structurvarietäten sind übrigens, wenn sie auch stellenweise in weiter Ausdehnung festgehalten werden, doch nicht etwa einzeln local in gewissen Gegenden ausschliesslich vorhanden; so finden sich z. B. an den Diabase Hills in der Truckee Range sowohl Basalte, welche den Gefügetypus b) (vgl. oben), als solche, die den Typus d) besitzen; an der Strasse von Clark's Station zum Eingang in den Truckee Cañon erscheint ebenfalls der in diesem Cañon vorwaltende Typus d) begleitet von b); und n. ö. von Wadsworth kommen in

1) Rosenbusch, Mikroskopische Physiographie, I. 134.

der Nähe des dortigen hohen Piks der Truckee Range auch fast ganz krystallinisch-körnige Basalte vor. Als völlige Ausnahme tritt an der Südflanke des Eingangs in den Truckee Cañon ein Basaltgestein auf, welches makro- und mikroskopisch bis in die grössten Einzelheiten dem bekannten Anamesit von Steinheim bei Hanau [1]) gleicht. Sonst sind derlei Anamesite, wie sie z. B. auf Island so weite Verbreitung besitzen, in diesen Gegenden gar nicht gefunden worden.

Schliesslich mögen noch einige Bemerkungen über einzelne Gemengtheile Platz finden. Die Plagioklase sind, häufiger als in deutschen Basalten der Fall, aus Schichtenzonen aufgebaut. Auffallend ist, was sonst nie beobachtet wurde, dass die Plagioklase mehrfach Körner und Kryställchen von unzweifelhaftem Olivin (messend bis 0,015 Mm. in der Dicke) in sich enthalten, die manchmal sehr deutlich halb serpentinisirt sind. Die selbständigen Olivine erweisen sich durchschnittlich reich an schönen scharfen Picotiten. In mehreren Vorkommnissen, welche ausnahmsweise in der sonst völlig basaltgleichen Masse grosse, bis halbzollange Feldspathe ausgeschieden enthalten, gehören diese sämmtlich dem Sanidin an, während die kleineren Feldspathe der eigentlichen Gesteinsmasse alle triklin sind. Titaneisen ist äusserst selten und fehlt selbst in den grobkörnigen Doleriten gewöhnlich. An dem Südende der Kawsoh Mts enthält ein ächter Basalt mikroskopische Gruppen von unzweifelhaftem Tridymit, die ersten, die in diesem Gesteine je wahrgenommen wurden; sie machen durchaus nicht den Eindruck, als ob es sich bei ihnen um eine secundäre Infiltration von Kieselsäure handele; da aber dieser Basalt durch oder in unmittelbarer Nähe von Infusorienschieferschichten emporbricht, so hat Clarence King die sehr zusagende Vermuthung geäussert, dass ein eingeschlossenes Fragment derselben Veranlassung zur Ausbildung des Tridymits im Basalt gegeben habe, wodurch die freie Kieselsäure befriedigend als eine dem letzteren fremde Substanz erscheint.

Anhang. Geologisch sind mit diesen ächten Basalten noch einige Gesteine eng verknüpft, welche sich durch den Gehalt an Nephelin auszeichnen (vgl. auch S. 211). Dazu gehören: das Vorkommniss von den Hügeln zwischen Haw's und Reed's Stations beim Carson River, am Südende der Kawsoh Mts, ein

1) F. Z., Basaltgesteine. S. 98.

schwärzlichgraues, schimmerndes, dünn- und flach schieferndes, äusserlich mehr phonolith- als basaltähnliches Gestein, welches nach der bisherigen Untersuchung aus Sanidin, Augit, nicht selbständig begrenztem[1]) Nephelin und Magnetit besteht; Plagioklas ist jedenfalls höchst selten, viel braunstaubiger Apatit vorhanden, Biotit, Hornblende, Olivin fehlen; das Gestein gelatinirt unverzüglich, aber doch nicht besonders kräftig mit Säuren. Aehnliche Massen erscheinen auch an anderen Punkten der Kawsoh-Berge, wo die Augite besser krystallisirt, und die Nepheline an den Rändern in charakteristischer Weise faserig umgewandelt sind (wie in den Basalten der schwäbischen Alb), aber der Plagioklas vorwaltet. — Am Fortification Peak, Colorado, tritt ein doleritähnliches Gestein auf, welches neben Plagioklas, Augit, Olivin und Magnetit, auch etwas Biotit, nicht wenig Nephelin, abermals in üblicher Weise der selbständigen Umgrenzung entbehrend, führt und ziemlich stark gelatinirt; damit stimmt die Gipfelmasse vom Navesink Peak, Elkhead Mts, und ein Ganggestein am Yampah River, südl. vom Fortification Peak völlig überein. Sanidin, Nephelin, Augit, Biotit und Apatit sind die Gemengtheile eines lichter grauen Gesteins vom Fortification Rampart, Elkhead Mts, in welchem millimetergrosse Glimmerblätter makroskopisch hervortreten; es hat schon äusserlich mit den Basalten wenig Aehnlichkeit, mit denen es aber geologisch innig verknüpft ist. Diese Vorkommnisse der Elkhead Mts (vgl. auch S. 211) mit ihrer abweichenden eigenthümlichen Zusammensetzung verdienen wohl einstmals eine eingehendere Untersuchung; bisher konnten nur jene wenigen und wahrscheinlich nicht einmal sonderlich charakteristischen Handstücke studirt werden, welche die Feldgeologen, natürlich unkundig der näheren Natur, aus diesen entfernten Gegenden mitgebracht.

Leucitgestein.

Bis zum Jahre 1874 konnte die alte Bemerkung von A. v. Humboldt, der Leucit sei ein lediglich europäisches Mineral, immer noch als zu Recht bestehend gelten, bis dann der der Wissenschaft leider zu früh entrissene H. Vogelsang dasselbe in

1) Die Bezeichnung »nicht individualisirter Nephelin« ist, wie Rosenbusch sehr richtig bemerkt, in der That zu verwerfen.

einem Basalt vom Gunung Bantal Soesoem auf der kleinen Insel Bawean, n. von Java entdeckte [1]). Auch in der neuen Welt ist inzwischen ein Leucitgestein aufgefunden worden, reicher an diesem Gemengtheil als irgend ein anderes der bekannten, und zudem von abweichender und eigenthümlicher Zusammensetzung. Dasselbe bildet die »Leucite Hills«, n. w. vom Point of Rocks im Territorium Wyoming; es ist eine lichtgelblichgraue, felsitisch aussehende, sehr feinporöse Masse, welche makroskopisch nur broncefarbigen, bräunlichgelben und -rothen Glimmer in sonderbar langen Striemen und Streifen enthält und gar nichts von ihrem Leucitgehalt verräth. U. d. M. fällt sogleich die ungeheure Menge von sehr scharfen, farblosen Leucitdurchschnitten auf, mit denen das Präparat geradezu wie gepflastert erscheint; die grössten achteckigen messen 0,035 Mm., die kleinsten 0,003 Mm.; alle enthalten blassgrüne Augitkörnchen (mitunter glaseinschlussführend) in sich, welche oft zu 5 oder 8 ein zierliches Kränzchen bilden, wie im römischen Gestein vom Grabmal der Caecilia Metella; auch kommen wohl radial gestellte Augitmikrolithen darin vor. Ausserdem enthält das Gestein neben dem Leucit im Gemenge mit demselben blassgrüne Prismen, Nadeln, Strahlen, Mikrolithen, welche, obschon keine deutliche Begrenzung vorhanden ist, und auch kein grösseres Individuum vorkommt, doch mit Gewissheit dem Augit zugezählt werden müssen. In diesem feinen Aggregat, worin der Leucit weitaus vorwaltet, liegen dann die grösseren braunen Glimmerblätter, die ihrerseits nicht zu mikroskopischer Kleinheit hinabsinken; sie sind ausgezeichnet durch ihre geringe Absorption, und die Querschnitte bringen es bei der Untersuchung mit einem Nicol nur bis zu einem tiefen Rothbraun. Keine Spur zeigt sich in diesem Gestein von irgend einem Feldspath, oder von Hornblende, Olivin, Melilith, Nosean oder Hauyn; nur etwas Magneteisen und eine relativ grosse Anzahl von Apatiten ist noch zugegen, möglicherweise auch, aber jedenfalls sehr spärlich, Nephelin. Der übergrosse Reichthum an Leucit, sowie das Zurücktreten des Augits, bedingen die im Gegensatz zu anderen leucitführenden Gesteinen auffallend helle Farbe dieses Vorkommnisses, welches auch wegen der grossen Glimmerstreifen und wegen der Abwesenheit anderer sonst so häufig sich einstellender Gemengtheile sich mit keinem

1) Neues Jahrb. f. Mineralogie u. s. w. 1875. S. 175.

der bekannten vergleichen lässt. — Eine chemische Analyse dieses Gesteins, angestellt von Herrn Pawel, ergab folgende, durch ihren sehr hohen Kaligehalt charakteristische Zusammensetzung:

Kieselsäure	56,30
Thonerde	12,63
Eisenoxyd	6,92
Kalk	5,63
Magnesia	5,08
Kali	11,50
Natron	2,21
	100,27

Klastische Massen der tertiären Eruptivgesteine.

Die Rhyolithe des westlichen Nevada werden oft begleitet von reichlichen Tuffen und Breccien, z. B. am Ende des Winnemucca Valley, an den Warm und Hot Springs, in den Kawsoh- und Montezuma Mts. Die tertiären Hügel zwischen den letzteren Bergzügen sind rhyolithische Tuffabsätze in vormaligen Süsswasserseen, und ihre Masse besteht u. d. M. vorwiegend aus fast farblosen Splitterchen und Scherbchen von sehr porösem Glas, wozu sich einige Diatomeenreste (Melosira, Navicula) gesellen. — Eines der bemerkenswerthesten klastischen Gesteine, die es überhaupt gibt, ist eine unscheinbare rhyolithische Breccie vom Mullen's Gap an der W.-Seite des Pyramid Lake. Sie wird gebildet aus haselnussgrossen scharfkantigen Bruchstücken eines lichtgrauen und eines dunkelgrauen rhyolithischen Gesteins, welche beide in einem vorwaltenden schmutziggrauen Material liegen. Letzteres sowie die lichtgrauen Fragmente geben zu keinen weiteren Bemerkungen Veranlassung, die schwarzgrauen etwas pechglänzenden Rhyolithstücke sind es, welche besondere Beachtung verdienen. U. d. M. bestehen sie zur Hauptsache aus einem im Schliff pelluciden Glas von eigenthümlich blassbräunlichviolettem Farbenton. Feldspathkrystalle (meist Sanidin), eine Menge kleiner Mikrolithen, auch schwarze eckige Körnchen (wohl Magnetit) sind ausgezeichnet fluidal durch das Glas zerstreut, welches nebenbei dunkelumrandete runde oder eiförmige Hohlräume, parallel den Strömungsrichtungen in die Länge gezogen, enthält. Ausserdem liegen in diesem Glas die allerausgezeich-

netsten Flüssigkeitseinschlüsse mit mobiler Libelle, welche bald langsam in dem Liquidum umherrollt, bald nur in leise zitternder Bewegung ist, bald erst durch gelinde Erwärmung, z. B. den Dampf einer glimmenden Cigarre zu einer Ortsveränderung veranlasst wird. Diese sehr zahlreichen Flüssigkeitseinschlüsse, deren Libelle selbst bei 110° C. keine Spur einer Absorption zeigt, sind meist eiförmig und ziemlich gross, bis zu 0,012 Mm. im l. Durchmesser. Ihre directe Einlagerung in einer leibhaftigen Glasmasse ist in der That sehr bemerkenswerth und vormals nie so beobachtet worden. Wo in individualisirten Gemengtheilen liquide Einschlüsse bekannt waren, da fehlte in der Regel eine am Gestein sich betheiligende Glassubstanz, und wo letztere reichlich zugegen war, wie in Obsidianen, Pechsteinen u. dgl., da enthielten umgekehrt die krystallinischen Gemengtheile keine Flüssigkeitseinschlüsse; und hier liegen sie sogar unmittelbar in der Glasmasse selbst, erweisend, dass die Gegenwart von Flüssigkeit oder eines sich zu Flüssigkeit verdichtenden Gases und der geschmolzene Zustand einer Masse sich keineswegs gegenseitig ausschliessen, und dass das reichliche Vorhandensein von Liquidum in den Quarzen des Granits durchaus nicht als solches zu einem Argument gegen den einstmaligen Schmelzfluss des letzteren erhoben werden darf. Dieses interessante Glas bietet noch eine andere seltene Erscheinung dar: ein 0,14 Mm. langer, 0,024 Mm. breiter farbloser Krystall (wahrscheinlich dem Apatit angehörig) enthält, parallel der Längsaxe eingelagert, einen isolirten 0,02 Mm. langen, 0,009 Mm. dicken Einschluss von blassbräunlichem Glas, und in diesem Glaskorn liegt nun ein Flüssigkeitseinschluss mit beweglicher Libelle, so dass dieser, ringsum von Krystallmasse umschlossene hyaline Partikel genau dieselbe Eigenthümlichkeit aufweist, wie die glasige Hauptmasse des Gesteins. Es mag hier daran erinnert werden, dass solche, merkwürdige, Flüssigkeitseinschlüsse enthaltende Glaseinschlüsse schon 1868 in den Leuciten der Lava vom Capo di Bove und des Gesteins von Rieden am Laacher See beobachtet wurden [1]).

Am Cold Spring, Forman Mts, findet sich eine Breccie, bestehend aus vorwaltend braunrother Rhyolithmasse, in welcher so viele splitterförmige Bruchstückchen eines gelblichgrauen Rhyo-

1) F. Z., Zeitschr. d. d. geol. Gesellsch. XX. 117. 122.

liths liegen, dass man in einem Präparat von der Grösse eines Fingernagels deren schon über 30 mit blossem Auge gewahrt; es scheint eine wahre Reibungsbreccie zu sein (vgl. S. 223). Tuffe und Breccien sind auch mit Rhyolithen an dem Lovelock's Knob, an den unteren Hügeln der Montezuma Range vergesellschaftet; eine schmutzig graue Masse erscheint hier, von welcher es nicht mit Gewissheit auszumachen ist, ob sie ein solides Massengestein, oder eine innige Verflössung feinklastischer Fragmente darstellt; das letztere wäre insofern interessant, weil als Ausfüllungsmasse von Hohlräumen eine sehr grosse Menge der schönsten charakteristischsten Tridymitaggregate von besonderer Grösse erscheint, die dann wohl nur als epigenetisch gelten könnten. — Am Indian Creek, Humboldt River Range, steht ein förmlich arkose-ähnlicher Rhyolithtuff an, bestehend u. d. M. aus: a) verschiedenen Sorten von rhyolithisch-felsitischen Grundmassen als Bruchstückchen; b) Feldspathfragmenten, z. Th. gestreift; c) abgerundeten Quarzen, z. Th. mit Glaseinschlüssen; d) Fragmenten von Biotit und von e) brauner Hornblende. Alle Ingredienzien sind ohne Cement zusammengehäuft, aber mit wohl ersichtlichen Lücken zwischen einander. — Ein weisslicher, milchig chalcedonähnlich aussehender sinterartiger Kieselabsatz, der an den Hügeln zwischen den Kawsoh und Montezuma Mts als Quellenproduct über Rhyolithtuffen auftritt, gibt einen Dünnschliff, in welchem trübere Stellen fleckenweise mit pellucideren abwechseln; u. d. M. sieht man, dass die ganze Masse durch und durch krystallinisch ist, zwischen den Nicols erscheint ein prächtig buntblitzendes Bild und es liegt reiner Hornstein vor, bestehend aus einem Aggregat feinster Quarzpartikelchen ohne jedwede Opalsubstanz, ähnlich dem Hornstein von den Schneeberger Erzgängen, nur etwas feiner krystallinisch. Die trüberen Flecken kommen daher, dass eine ungeheure Menge von eckigen und rundlichen dunkelumrandeten leeren Hohlräumen (durchschnittlich nur 0,01 Mm. gross) in diesem Hornstein liegen. Diese Masse ist, soweit bekannt, der erste Sinterabsatz von kieselsäurehaltigen Quellen, der als völlig krystallinischer Quarz befunden wurde, während sonst solches Material immer als amorpher Opal gilt.

Die massigen Basalte scheinen nicht in demselben Maasse von fragmentaren Gesteinen begleitet zu werden, wie die Rhyolithe, und die untersuchten geben auch kaum zu besonderen

Hervorhebungen Veranlassung. Nur müssen schliesslich noch die ausgezeichneten, bisher in den Vereinigten Staaten unbekannten Palagonit-(Sideromelan-)Tuffe aus Nevada erwähnt werden, welche sich im Tertiärgebirge am S.-Ende der Kawsoh Mts nahe der Overland Road, westlich von den Kawsoh Mts bei Hot Spring, und am Black Rock finden. Es sind Tuffe, welche zum grössten Theil aus Körnern und Bröckchen einer heller oder dunkler gelblichbraunen amorphen Materie bestehen, die sich völlig einfachbrechend verhält. Diese Substanz, welche in der That wie ein Glas aussieht, ist enorm reich an mikroskopischen grösseren und kleineren dunkelumrandeten meist eiförmigen Dampfporen. Als einzige Ausscheidungen finden sich darin farblose Leisten von Plagioklas, keine Spuren von Augit, Olivin, Magnetit oder Nephelin. Hin und wieder bemerkt man scharf und eckig contourirte Partieen von Glasmassen, welche sich von den vorwaltenden durch ganz verschiedene Farbentöne auszeichnen, wodurch der Eindruck einer hyalinen Breccie erhöht wird. Stellenweise sind die Innenwände der grösseren leeren Hohlräume einer eigenthümlichen Alteration unterworfen gewesen, namentlich in einer Schicht, welche s. ö. von Haw's Station zu Tage ausgeht. Die Veränderung, welche zonenweise von der Innenwand in die umgebende Masse einwärts fortschreitet, erzeugt aus dieser ursprünglich homogenen Substanz ein kurzfaseriges Aggregat von gleichbleibender Farbe. Der Durchschnitt durch einen solchen Hohlraum offenbart diese Structur der Wände sehr gut, obschon es nicht immer leicht ist, auf den ersten Blick den radialfaserigen Aussenring von derjenigen faserigen Masse zu unterscheiden, welche die inneren Theile und den Boden der napfförmigen Vertiefung bildet. Zwischen den Nicols zeigen diese Objecte Aggregatpolarisation, ja sogar das schwarze Kreuz (auf Taf. XII Fig. 4 des englischen Textes haben durch ein Versehen beim Druck in der zugehörigen Zeichnung die Kreuzchen eine nicht parallel gerichtete Stellung erhalten). Diese Faserwand der Hohlräume ist hier die einzige Umwandlungserscheinung, und jene verschiedengefärbten rothen, gelben und braunen bandähnlichen Zonen, welche in der amorphen Substanz z. B. der isländischen Vorkommnisse auftreten und wahrscheinlich verschiedene Stadien der Zersetzung (erst zu Palagonit) repräsentiren, finden sich hier nicht. Die Glasmasse in diesen Nevada-Tuffen ist daher weniger eigentlicher Palagonit,

als vielmehr dem Sideromelan von Sartorius v. Waltershausen genähert. — Bemerkenswerth ist noch ein basaltischer Tuff von der Basalt ridge, ö. vom Grass Cañon, Pah-tson Mts, bestehend vorwiegend aus kleinen eckigen und kantigen Scherbchen und Splittern eines braunen etwas porösen Glases, in welchem nur spurenhafte krystallinische Ausscheidungen stattgefunden haben; ausserdem sieht man selbständige polarisirende Bruchstücke von farblosen Feldspathen und von dunkelbraunen Augitkrystallen. Alle diese klastischen Gebilde sind ohne ein verkittendes Cäment zusammengehäuft, weshalb die Masse auch ziemlich locker und leicht zerreiblich ist. Selbst nach langem Kochen mit Chlorwasserstoffsäure gelatinirt dieses braune Glas nicht, und es gehört dieser Tuff, der zweifelsohne von vulkanischen Sand- und Ascheauswürfen abzuleiten ist, demzufolge nicht dem Sideromelan oder Tachylyt, sondern dem Hyalomelan (vgl. S. 235) an.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Widener Library
3 2044 092 879 915